第 46 卷 第 6 期　　西 南 师 范 大 学 学 报（自然科学版）　　2021 年 6 月
Vol. 46　No. 6　　Journal of Southwest China Normal University (Natural Science Edition)　　Jun.　2021

DOI：10.13718/j.cnki.xsxb.2021.06.029

线性代数中行列式展开定理的教学难点及解决方案[①]

杨毓萍，　宋科研

西南大学 数学与统计学院，重庆 400715

摘要：行列式的展开定理在线性代数中具有非常重要的基础性地位，克莱姆法则、可逆矩阵的判定和矩阵的秩都依赖于这一定理. 不同于行列式的定义和基本性质，行列式按行展开的定理对学生们而言比较困难，尤其是其证明过程，如果学生不懂其证明思路，就很难真正理解定理的意义，并直接影响问题的解决. 本文将从教材、教学、练习这 3 个重要环节分析学生的实际困难在哪里，并给出解决教学难点的有效的解决办法，并且本文所提出的方法也完全适用于其他类似课程的教学.

关　键　词：行列式；余子式；代数余子式

中图分类号：O642.0　　**文献标志码：A**　　**文章编号：**1000－5471(2021)06－0190－05

在线性代数这门课程中，行列式按行(列) 展开的定理在后续的课程中多次用到，例如，证明克莱姆法则的存在性和唯一性，以及讲授可逆矩阵的判定和求解时需要利用这一定理给出方阵和它的伴随矩阵之间的一个重要公式，学习矩阵的秩这一重要概念的时候也会利用这一定理给出等价的描述，在证明初等变换不改变矩阵秩的时候也要用到. 其他的课程，例如解析几何和高等代数也会用到此定理. 因此行列式的展开定理在大学数学中具有非常重要的基础性地位.

行列式按行(列) 展开的定理还是行列式这一章非常困难的教学内容，它的难点包括很多个方面：编写教材难，主要体现在如果要让读者彻底明白每一个细节，需要大量的篇幅来论证，因此很多教材写得很简略，省略了许多技术上的细节，导致学生初次接触时不易理解；教师教学难，由于定理的证明涉及几个关键引理，证明过程复杂且其中涉及到的公式规模庞大，即使用 PPT 展示也很难向学生展示清楚，于是绝大多数老师就只讲这个定理的意义和应用，而舍弃其证明，但是在实际的教学过程中，效果并不理想，只有极少数人才能灵活运用；学生学习难，对大多数学生而言，他们还是很容易接受行列式按行(列) 展开的定理，知道其基本意义，但由于该定理表达形式复杂，证明牵扯太多，因此导致学生掌握不了证明思路从而不能解决问题.

定理 1[1]　行列式等于它的任一行(列) 的元素与其对应的代数余子式乘积之和，即若

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

① 收稿日期：2021－03－15

基金项目：西南大学教育教学改革研究项目(2019JY094).

作者简介：杨毓萍，讲师，博士，主要从事 Hopf 代数的研究.

通信作者：宋科研，副教授.

则

$$a_{i1}A_{i1}+a_{i2}A_{i2}+\cdots+a_{in}A_{in}=D \qquad i=1,2,\cdots,n$$

或

$$a_{1j}A_{1j}+a_{2j}A_{2j}+\cdots+a_{nj}A_{nj}=D \qquad j=1,2,\cdots,n$$

定理 2[1]　行列式某一行(列) 的元素与另一行(列) 的对应元素的代数余子式乘积之和等于 0，即若

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

则

$$a_{i1}A_{j1}+a_{i2}A_{j2}+\cdots+a_{in}A_{jn}=0 \qquad i\neq j$$

或

$$a_{1i}A_{1j}+a_{2i}A_{2j}+\cdots+a_{ni}A_{nj}=0 \qquad i\neq j$$

从学生方面讲，许多同学没有真正理解上述两个定理，很难做到灵活运用，其主要原因就是上课时没有时间推敲老师讲的内容，对上面主要定理的证明细节不清楚．从教师方面讲，如果没有组织好教学设计，不能很好地区分这两个定理的教学重点和难点，那么授课的时候必然会给学生带来似懂非懂的感觉，这直接影响学生后续运用定理解决问题．我们将分析教学过程中的几个关键难点，给出解决方法，并引入重要习题加深对定理的理解．

1　行列式展开定理的几个教学难点和解决方案

1.1　定理的合理导入

第一个面临的问题就是要向学生介绍余子式和代数余子式的概念，这一点可以通过二阶和三阶行列式来讲授．实际的教学过程中我们先对 n 阶行列式引入余子式和代数余子式的概念，然后用二阶和三阶行列式来举例．假定我们已经在黑板或投影仪上向学生给出了余子式和代数余子式的概念，下面两个简单的例子既能加强对新概念的理解，又能得到一些新的发现，能很好地激发学生的好奇心．

例 1　设 $D_2=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$，则

$$M_{11}=a_{22} \qquad M_{12}=a_{21}$$

$$A_{11}=(-1)^{1+1}M_{11}=a_{22} \qquad A_{12}=(-1)^{1+2}M_{12}=-a_{21}$$

$$D_2=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}=a_{11}A_{11}+a_{12}A_{12}$$

例 2　设 $D_3=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$，则

$$M_{11}=\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \qquad M_{12}=\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} \qquad M_{13}=\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

$$A_{11}=(-1)^{1+1}M_{11}=M_{11} \qquad A_{12}=(-1)^{1+2}M_{12}=-M_{12} \qquad A_{13}=(-1)^{1+3}M_{13}=M_{13}$$

$$D_3=a_{11}M_{11}-a_{12}M_{12}+a_{13}M_{13}=a_{11}A_{11}+a_{12}A_{12}+a_{13}A_{13}$$

通过上面两个例子，我们可以带领学生观察和总结出一个事实：

二、三阶行列式能展开成第一行的元素与第一行元素的代数余子式乘积之和．

此时，下面几个提问是重要的：

(1) 既然二阶和三阶行列式能展开成第一行的元素与第一行元素的代数余子式乘积之和，那么一般的 n 阶行列式能展开成第一行的元素与第一行元素的代数余子式乘积之和吗？

(2) 如果 n 阶行列式能展开成第一行的元素与第一行元素的代数余子式乘积之和，那么 n 阶行列式能展开成第 i 行的元素与第 i 行元素的代数余子式乘积之和吗？这很有可能是对的，因为由行列式的性质，我们可以把第 i 行调到第一行.

(3) 如果 n 阶行列式能展开成第 i 行的元素与第 i 行元素的代数余子式乘积之和，那么 n 阶行列式能展开成第 i 列的元素与第 i 列元素的代数余子式乘积之和吗？这也很有可能是对的，因为由行列式的转置性质，我们可以把第 i 行变成第 i 列.

通过以上几个提问和猜测，层层递进，让学生充分意识到定理1很可能是对的，然后我们再带领学生一步步探索.

1.2 定理1的证明

定理1的证明涉及到如下一个基本且重要的观察，如果没有注意到这一点，理解就要出问题，后面解决问题就比较困难.

事实1 设 $D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$，$\widetilde{D}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{j1} & b_{j2} & \cdots & b_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$，即 $\widetilde{D}$ 是把 D 的第 j 行换成了 $b_{j1},b_{j2},\cdots,b_{jn}$ 所得到的行列式，且 M_{jk} 和 $\widetilde{M}_{jk}$ 分别是 D 和 $\widetilde{D}$ 的第 j 行元素的余子式，A_{jk} 和 $\widetilde{A}_{jk}$ 分别是 D 和 $\widetilde{D}$ 的第 j 行元素的代数余子式，则 $M_{jk}=\widetilde{M}_{jk}$，从而 $A_{jk}=\widetilde{A}_{jk}$，其中 $k=1,2,\cdots,n$.

如果教学过程中，我们像上面这样明确地写出这个事实，那么这个事实的证明几乎是显然的，因为根据余子式的定义，D 和 $\widetilde{D}$ 的第 j 行元素总要被删除.

许多教科书和授课者正是省略了这一基本的事实[2-4]，导致很多学生没有真正掌握定理1的证明过程. 下面我们利用以上的事实阐述定理1证明的难点.

证明定理1一般会用到以下的引理：

引理1 设 $D=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$，$D_j'=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & a_{ij} & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$，则 $D_j'=a_{ij}A_{ij}$，其中 A_{ij} 是 D 的第 i 行 j 列处元素 a_{ij} 的代数余子式.

引理1利用行列式换行换列的性质就可以证明，但是如果用板书讲解的话费时费力，用PPT演示这个引理的证明则比较省时省力(我们省略其证明过程)，但是我们仍然需要强调：D_j' 的第 i 行 j 列处元素 a_{ij} 的代数余子式 $A_{ij}'=A_{ij}$.

利用引理1，我们就可以来证明定理1.

定理1的证明 由行列式的性质显然有

$$D=D_1'+D_2'+\cdots+D_n'=a_{i1}A_{i1}+a_{i2}A_{i2}+\cdots+a_{in}A_{in}$$

1.3 定理2的证明

由引理1就可以得到如下事实的证明：

事实2 设 $D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$，$\widetilde{D}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{j1} & b_{j2} & \cdots & b_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$，即 $\widetilde{D}$ 是把 D 的第 j 行换成了 $b_{j1},b_{j2},\cdots,b_{jn}$ 所得到的行列式，A_{jk} 是 D 的第 j 行元素的代数余子式，则 $\widetilde{D}=b_{j1}A_{j1}+b_{j2}A_{j2}+\cdots+b_{jn}A_{jn}$，

其中 $k = 1, 2, \cdots, n$.

证　由定理 1 知 $\widetilde{D} = b_{j1}\widetilde{A}_{j1} + b_{i2}\widetilde{A}_{j2} + \cdots + b_{jn}\widetilde{A}_{jn} = b_{j1}A_{j1} + b_{j2}A_{j2} + \cdots + b_{jn}A_{jn}$.

定理 2 的证明

构造

$$\widetilde{D} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

即 $\widetilde{D}$ 是把 D 的第 j 行换成了 D 的第 i 行所得到的行列式. 由行列式的性质可知 $\widetilde{D} = 0$.

由上述事实可知 $\widetilde{D} = a_{i1}A_{j1} + a_{i2}A_{j2} + \cdots + a_{in}A_{jn}$. 故 $a_{i1}A_{j1} + a_{i2}A_{j2} + \cdots + a_{in}A_{jn} = 0$.

1.4　合理设置例题

在实际教学过程中，我们发现大多数学生普遍感觉自己能做出以下的例3，但计算太繁琐. 然而通过我们提供的授课思路和讲解，几乎所有的学生都能准确理解和进一步运用课堂的知识求解例 3，并且比一些参考书上的解答更能令人满意.

例 3　设

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 5 & 6 & 8 \end{vmatrix}$$

求：

(a) $3A_{11} + 4A_{12} + 5A_{13} + 6A_{14}$；

(b) $A_{11} + A_{12} + A_{13} + A_{14}$；

(c) $M_{11} + M_{12} + M_{13} + M_{14}$.

设置例 3 的基本思想就是巩固前面的概念和运用定理 1.

(a) 的设置目的是运用定理 1，将 $3A_{11} + 4A_{12} + 5A_{13} + 6A_{14}$ 看成行列式 $\widetilde{D} = \begin{vmatrix} 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 5 & 6 & 8 \end{vmatrix}$ 按第一行展开的结果，即 $3A_{11} + 4A_{12} + 5A_{13} + 6A_{14} = 3\widetilde{A}_{11} + 4\widetilde{A}_{12} + 5\widetilde{A}_{13} + 6\widetilde{A}_{14} = \widetilde{D} = 0$；

(b) 的设置目的是运用定理 1，将 $A_{11} + A_{12} + A_{13} + A_{14}$ 看成行列式 $\widetilde{D} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 5 & 6 & 8 \end{vmatrix}$ 按第一行展开的结果，即 $A_{11} + A_{12} + A_{13} + A_{14} = \widetilde{A}_{11} + \widetilde{A}_{12} + \widetilde{A}_{13} + \widetilde{A}_{14} = \widetilde{D}$；

(c) 的设置目的是复习余子式和代数余子式的联系，并进一步利用定理 1.

2　总结与启示

实际教学过程中，我们总结出下面几点：

(1) 在讲授余子式和代数余子式的时候，通过举例得到二、三阶行列式可以写成第一行元素与对应元素代数余子式乘积之和，然后进行提问，这会让学生自己初步接触到定理 1 要表达的意思，也会促使学生

思考这一定理的正确性；

(2) 强调事实1而淡化处理引理1，原因是相比较而言，事实1对后面的理解至关重要，而引理1的证明又要用到事实1，引理1的证明可以通过PPT展示一下即可；

(3) 强调事实2，并用来证明定理2；

(4) 有回顾性和针对性地讲解例题，会让学生更加深刻地体会定理证明的思想，从而学会灵活运用.

此外，我们强调，即使是数学专业类课程高等代数，上面所讲的方法也完全适用. 事实上，无论是线性代数还是高等代数，我们在实际的教学过程中都采用了上述的教学方法，取得了良好的教学效果.

参考文献：

[1] 同济大学数学系. 线性代数[M]. 6版. 北京：高等教育出版社，2014：15-17.

[2] 吴传生. 线性代数[M]. 北京：高等教育出版社，2015：38-43.

[3] 周 勇，朱 砾. 线性代数[M]. 上海：复旦大学出版社，2009：13-15.

[4] 刘国新，谢成康，刘 花. 线性代数[M]. 北京：科学出版社，2012：15-17.

Difficulties and Effective Solutions in Teaching Determinant Expansion Theorem in Linear Algebra

YANG Yu-ping， SONG Ke-yan

School of Mathematics and Statistics, Southwest University, Chongqing 400715, China

Abstract: The expansion theorem of the determinant has a very important foundational position in Linear Algebra, for example, Cramer's rule, the judgment of invertible matrices, and the rank of the matrix all depend on this theorem. Different from the definition and basic properties of the determinant, the theorem that the determinant expands by rows is more difficult for students, especially the proof process. If students do not understand the proof idea, it is difficult to understand the meaning of the theorem truly and affect problem solving directly. The actual difficulties of students from the three important links of teaching materials, teaching, and exercises will be analyzed, and an effective solution be given to solve the teaching difficulties, and the methods proposed in this article are also fully applicable for teaching other similar courses.

Key words: determinant; cofactor; algebraic cofactor

责任编辑 廖 坤