第 46 卷 第 7 期 西南师范大学学报(自然科学版) 2021 年 7 月
Vol. 46 No. 7 Journal of Southwest China Normal University (Natural Science Edition) Jul. 2021

DOI:10.13718/j.cnki.xsxb.2021.07.003

混合高斯和带跳模型下的亚式幂期权定价①

丁 毅， 郭精军

兰州财经大学 统计学院，兰州 730020

摘要：考虑到经典的 Black-Scholes(B-S)期权定价模型不能描述资产价格的长相依性和跳跃现象，用混合高斯和带跳模型描述标的资产价格的变动过程．首先，得到了几何平均亚式幂期权价格所满足的数学模型．其次，分别获得了几何平均亚式看涨和看跌幂期权的定价公式．最后，讨论了参数对期权价格的敏感性．

关 键 词：次分数布朗运动；跳扩散；几何平均亚式幂期权；Itô 公式

中图分类号：O211.6 **文献标志码：A** **文章编号：**1000－5471(2021)07－0016－10

经典的 B-S 期权定价模型[1] 假定金融资产价格的变动由几何布朗运动描述，在此情形下，标的资产价格服从对数正态分布．但一些学者通过对金融资产价格的实证研究发现，金融资产价格的分布不完全是对数正态分布，其往往具有“尖峰厚尾”、自相似性和长相依性等特征[2]．而分数布朗运动正好可以描述这些现象，因此有了将分数布朗运动运用于描述金融资产价格的变动这一想法[3]．但是分数布朗运动既不是半鞅也不是马尔可夫过程，不能运用经典的随机分析方法去处理．后来一些学者建立了分数布朗运动的随机积分，但是文献[4]研究表明：在该积分下，会存在套利的情况，建议使用混合分数布朗运动代替几何布朗运动，来反映金融资产价格的运动轨迹．此后，在文献[4]的基础上，文献[5]假设当标的资产价格由混合分数布朗运动描述时，得到了货币期权定价公式的解析解；文献[6]给出了跳环境下的混合分数布朗运动情形下货币期权定价公式的解析解．

在金融衍生品市场，奇异期权是为了满足客户的个性化需求而设计的一类产品．

亚式期权是奇异期权的一种，其到期回报依赖于标的资产在一段特定时间内的平均价格．平均值的采用降低了回报的波动，减少了在期权到期日标的资产价格被操纵的风险．在同等条件下，亚式期权的价格低于普通期权的价格，很受一些投资者青睐．因此一些学者开始对亚式期权的定价问题进行研究[7-8]．幂期权也属于奇异期权的一类，其回报依赖于标的资产价格的整数 $n(n\geqslant 1)$ 次幂，这意味着幂期权比普通期权具有更大的杠杆效应．文献[9-10]分别研究了汇率幂期权的定价，给出了混合分数布朗运动环境下几何亚式幂期权的定价公式．

考虑到股票等金融资产价格有时会出现异常波动，即出现“跳跃”的情形，且这些跳跃往往幅度大且频繁．在对期权进行定价时，应当考虑这些情形，因此一些学者将泊松过程加入到期权定价模型，反映标的

---

① 收稿日期：2020－07－15
基金项目：国家自然科学基金项目(71561017，71961013)；甘肃省科技计划项目(20JR5RA204)；兰州财经大学科研创新团队支持计划项目．
作者简介：丁 毅，硕士研究生，主要从事金融统计与风险管理．
通信作者：郭精军，教授，博士生导师．

资产价格的这种变化特征. 文献[11]考虑了资产价格的跳跃性，运用分数跳扩散过程给出了亚式幂期权定价公式的解析解. 由于次分数布朗运动是比布朗运动更为一般的高斯过程，其性质类似于分数布朗运动，但退化速度要快于分数布朗运动[12]. 有研究者运用次分数布朗运动来刻画金融资产价格的变化过程，例如考虑了带有交易费用的备兑权证定价[13]和支付红利的欧式期权定价[14].

对于奇异期权，已有文献很少考虑标的资产价格出现跳跃的情形，这与实际金融市场上的实际情形不符. 为了体现金融资产价格的长相依性以及跳跃现象，本文考虑用混合高斯和带跳模型来研究几何平均亚式幂期权的定价问题.

1　预备知识

下面介绍混合高斯模型及其性质、几何平均亚式幂期权的回报函数等相关概念.

定义 1[15]　设(Ω, F, P)是一个完备的概率空间，混合高斯模型 M_t^H 定义为

$$M_t^H = M_t^H(a, b) = a\xi_t + b\xi_t^H,\ \forall t \geqslant 0$$

其中：a，b是常数且$(a, b) \neq (0, 0)$，$H \in (0, 1)$为 Hurst 指数，ξ_t 为标准布朗运动，ξ_t^H 为次分数布朗运动且 ξ_t 与 ξ_t^H 相互独立.

混合高斯模型 M_t^H，$\forall t \geqslant 0$ 具有如下性质[15]

1) M_t^H 是一个中心高斯过程；

2) $M_0^H = a\xi_0 + b\xi_0^H = 0$；

3) $\forall s \in \mathbb{R}_+$，$\forall t \in \mathbb{R}_+$，$M_t^H$ 与 M_s^H 的协方差函数为

$$\operatorname{Cov}(M_t^H(a, b), M_s^H(a, b)) = a^2(s \wedge t) + b^2\left(t^{2H} + s^{2H} - \frac{1}{2}((s+t)2H + |t-s|2H)\right)$$

其中 $s \wedge t = \frac{1}{2}(s + t - |s - t|)$.

下面给出亚式幂期权回报函数相关的概念.

定义 2[16]　固定行权价格为 K，连续观测情形下几何平均亚式幂期权的回报函数为

$$\begin{cases} \max\{A_t^n - K^n, 0\}，\text{看涨亚式幂期权}， \\ \max\{K^n - A_t^n, 0\}，\text{看跌亚式幂期权}， \end{cases}$$

其中 $n \in \mathbb{Z}_+$，A_t 表示价格 S_t 在$[0, t]$之间的几何平均值，且

$$A_t = \mathrm{e}^{\frac{1}{t}\int_0^t \ln S_t \mathrm{d}\tau}$$

记

$$G_t = A_t^n = \mathrm{e}^{\frac{n}{t}\int_0^t \ln S_\tau \mathrm{d}\tau}$$

2　定价模型

假设标的资产价格满足如下随机微分方程

$$\mathrm{d}S_t = (\mu - q)S_t\mathrm{d}t + \sigma S_t(\mathrm{d}M_t + \mathrm{d}Q_t) \tag{1}$$

其中：μ，q，σ 均为常数，分别表示股票的预期收益率、股票的红利率、股票价格的波动率，$M_t = a\xi_t + b\xi_t^H$ 是混合高斯过程. 不失一般性，取 $a = b = 1$ 进行讨论. $Q_t = N_t - \lambda t$ 是补偿泊松过程，N_t 是强度为 λ 的泊松过程，且 ξ_t，ξ_t^H，N_t 相互独立.

定理 1(混合高斯跳过程 Itô 公式)　设 $X_t = \xi_t + \xi_t^H + Q_t$ 为混合高斯跳过程，$f(t, x)$ 具有连续的一阶以及二阶偏导数，那么

$$f(t, X_t) = f(0, 0) + \int_0^t \frac{\partial f}{\partial x}(\tau, X_\tau)\mathrm{d}X_\tau +$$
$$\int_0^t \left[\frac{\partial f}{\partial \tau}(\tau, X_\tau) + \frac{1}{2}(1 + \lambda + 2H\tau^{2H-1}(2 - 2^{2H-1}))\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(\tau, X_\tau)\right]\mathrm{d}\tau \tag{2}$$

证 任意给定 $\omega \in \Omega$，从而固定了过程 $X_t = \xi_t + \xi_t^H + Q_t$ 的路径.

设 $0 = t_0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_{n-1} < t_n = t$ 是该路径在$[0, t)$内所有发生跳跃的时刻(t_0 除外). 记 Q_t 在 t_i 时刻发生第 i 次跳跃，则当 $i = 1$ 时，在$[0, t)$内只发生一次跳跃，且跳跃发生的时刻为 t_1，即 X_t 在$[0, t_1)$与(t_1, t)内没有发生跳跃则在$[0, t_1)$与(t_1, t)内分别用分数型 Itô 公式可得

$$f(t_1, X_{t_1^-}) = f(0, 0) + \int_0^{t_1}\left[\frac{\partial f}{\partial \tau} + \frac{1}{2}(1 + 2H\tau^{2H-1}(2 - 2^{2H-1}))\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - \lambda\frac{\partial f}{\partial x}\right]\mathrm{d}\tau + \int_0^{t_1}\frac{\partial f}{\partial x}\mathrm{d}\xi_\tau + \int_0^{t_1}\frac{\partial f}{\partial x}\mathrm{d}\xi_\tau^H$$

$$f(t, X_t) = f(t_1, X_{t_1}) + \int_{t_1}^{t}\left[\frac{\partial f}{\partial \tau} + \frac{1}{2}(1 + 2H\tau^{2H-1}(2 - 2^{2H-1}))\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - \lambda\frac{\partial f}{\partial x}\right]\mathrm{d}\tau + \int_{t_1}^{t}\frac{\partial f}{\partial x}\mathrm{d}\xi_\tau + \int_{t_1}^{t}\frac{\partial f}{\partial x}\mathrm{d}\xi_\tau^H$$

因 X_t 在时刻 t_1 发生 $X_{t_1^-}$ 到 X_{t_1} 的跳跃，则 $f(t, X_t)$ 在 t_1 时刻的变化量为 $f(t_1, X_{t_1}) - f(t_1, X_{t_1^-})$，故

$$f(t, X_t) = f(0, 0) + \int_0^t\left[\frac{\partial f}{\partial \tau} + \frac{1}{2}(1 + 2H\tau^{2H-1}(2 - 2^{2H-1}))\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - \lambda\frac{\partial f}{\partial x}\right]\mathrm{d}\tau +$$
$$\int_0^t\frac{\partial f}{\partial x}\mathrm{d}\xi_\tau + \int_0^t\frac{\partial f}{\partial x}\mathrm{d}\xi_\tau^H + f(t_1, X_{t_1}) - f(t_1, X_{t_1^-})$$

现在考虑在$[0, t)$内所有的跳跃时刻 $t_i(i = 1, 2, \cdots, n)$，则有

$$f(t, X_t) = f(0, 0) + \int_0^t\left[\frac{\partial f}{\partial \tau} + \frac{1}{2}(1 + 2H\tau^{2H-1}(2 - 2^{2H-1}))\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - \lambda\frac{\partial f}{\partial x}\right]\mathrm{d}\tau +$$
$$\int_0^t\frac{\partial f}{\partial x}\mathrm{d}\xi_\tau + \int_0^t\frac{\partial f}{\partial x}\mathrm{d}\xi_\tau^H + \sum_{\tau \leqslant t}(f(\tau, X_\tau) - f(\tau, X_{\tau^-}))$$

设 $g(s) \in C^2(\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R})$，由于$(\mathrm{d}N_t, \mathrm{d}N_t) = \lambda\mathrm{d}t$，对 $g(N_t)$ 应用广义 Itô 积分[11]，有

$$\sum_{\tau \leqslant t} g(N_\tau) - g(N_{\tau^-}) = \int_0^t g'(N_\tau)\mathrm{d}N_\tau + \frac{\lambda}{2}\int_0^t g''(N_\tau)\mathrm{d}\tau$$

因 $X_t = \xi_t + \xi_t^H + N_t - \lambda t$，则

$$\sum_{\tau \leqslant t}[f(\tau, X_\tau) - f(\tau, X_{\tau^-})] = \int_0^t\frac{\partial f}{\partial x}\mathrm{d}N_\tau + \frac{\lambda}{2}\int_0^t\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\mathrm{d}\tau \tag{3}$$

将(3)式带入 $f(t, X_t)$ 的表达式得

$$f(t, X_t) = f(0, 0) + \int_0^t\left[\frac{\partial f}{\partial \tau} + \frac{1}{2}(1 + 2H\tau^{2H-1}(2 - 2^{2H-1}))\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - \lambda\frac{\partial f}{\partial x}\right]\mathrm{d}\tau +$$
$$\int_0^t\frac{\partial f}{\partial x}\mathrm{d}\xi_\tau + \int_0^t\frac{\partial f}{\partial x}\mathrm{d}\xi_\tau^H + \int_0^t\frac{\partial f}{\partial x}\mathrm{d}N_\tau + \frac{\lambda}{2}\int_0^t\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\mathrm{d}\tau =$$
$$f(0, 0) + \int_0^t\left[\frac{\partial f}{\partial \tau} + \frac{1}{2}(1 + 2H\tau^{2H-1}(2 - 2^{2H-1}) + \lambda)\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right]\mathrm{d}\tau + \int_0^t\frac{\partial f}{\partial x}\mathrm{d}X_\tau$$

证毕.

由定理 1 可得如下推论.

推论 1 随机微分方程(1)的解是

$$S_t = S_0\mathrm{e}^{(\mu-q)t-\frac{\sigma^2}{2}((2-2^{2H-1})t^{2H}+\lambda t+t)+\sigma X_t} \tag{4}$$

定理 2 假设标的资产价格 S_t 满足混合高斯跳过程驱动的随机微分方程(1)，则行权价格为 K，到期日为 T 的几何平均看涨亚式幂期权在 $t(0 \leqslant t \leqslant T)$ 时刻的价格 $V_c(t, S_t, G_t)$ 满足如下的偏微分方程

$$\frac{\partial V}{\partial t} + (r - q)S_t\frac{\partial V}{\partial S_t} + \frac{1}{2}\delta^2 S_t^2\frac{\partial^2 V}{\partial S_t^2} + \frac{G_t(n\ln S_t - \ln G_t)}{t}\frac{\partial V}{\partial G_t} = rV_t \tag{5}$$

其中 $0 < S_t < \infty$，$0 < G_t < \infty$，$\delta^2 = \sigma^2[1+\lambda+2Ht^{2H-1}(2-2^{2H-1})]$，边界条件为

$$V_c(T, S_T, G_T) = \max\{G_T - K^n, 0\}$$

证　设 A_t 为标的资产价格在 $[0, t]$ 上的几何平均值，即

$$A_t = \mathrm{e}^{\frac{1}{t}\int_0^t \ln S_\tau \mathrm{d}\tau}$$

令

$$G_t = A_t^n = \mathrm{e}^{\frac{n}{t}\int_0^t \ln S_\tau \mathrm{d}\tau}$$

则

$$\mathrm{d}G_t = \frac{G_t(n\ln S_t - \ln G_t)}{t}\mathrm{d}t$$

假设在金融市场上交易两种资产，一种是无风险资产，比如债券；另一种是有风险资产，比如股票. 债券价格 P_t 和股票价格 S_t 分别满足下列微分方程

$$\begin{cases} \mathrm{d}P_t = rP_t\mathrm{d}t, P_0 = 1, 0 \leqslant t \leqslant T \\ \mathrm{d}S_t = (\mu - q)S_t\mathrm{d}t + \sigma S_t\mathrm{d}X_t \end{cases} \tag{6}$$

其中 r 为无风险利率.

考虑一个自融资投资策略 $\boldsymbol{\theta} = (\theta_t^0, \theta_t^1)$，则其资产价值为 $V_t = \theta_t^0 P_t + \theta_t^1 S_t$，又因股票需要连续支付股息 q，故

$$\mathrm{d}V_t = \theta_t^0\mathrm{d}P_t + \theta_t^1\mathrm{d}S_t + \theta_t^1 qS_t\mathrm{d}t \tag{7}$$

将(6)式带入(7)式可得

$$\begin{aligned} \mathrm{d}V_t =& \theta_t^0\mathrm{d}P_t + \theta_t^1\mathrm{d}S_t + \theta_t^1 qS_t\mathrm{d}t = \\ & (V_t - \theta_t^1 S_t)r\mathrm{d}t + \theta_t^1(\mu - q)S_t\mathrm{d}t + \theta_t^1\sigma S_t\mathrm{d}X_t + \theta_t^1 qS_t\mathrm{d}t = \\ & (V_t - \theta_t^1 S_t)r\mathrm{d}t + \theta_t^1\mu S_t\mathrm{d}t + \theta_t^1\sigma S_t\mathrm{d}X_t \end{aligned}$$

另外，由定理 1 和推论 1 可得

$$\begin{aligned} \mathrm{d}V_t =& \mathrm{d}V_t(t, S_t, G_t) = \\ & \frac{\partial V}{\partial t}\mathrm{d}t + \frac{\partial V}{\partial S_t}\mathrm{d}S_t + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 V}{\partial S_t^2}\mathrm{d}S_t\mathrm{d}S_t + \frac{\partial V}{\partial G_t}\mathrm{d}G_t = \\ & \left[\frac{\partial V}{\partial t} + (\mu - q)S_t\frac{\partial V}{\partial S_t} + \frac{G_t(n\ln S_t - \ln G_t)}{t}\frac{\partial V}{\partial G_t}\right]\mathrm{d}t + \\ & \frac{1}{2}\sigma^2 S_t^2[1+\lambda+2Ht^{2H-1}(2-2^{2H-1})]\frac{\partial^2 V}{\partial S_t^2}\mathrm{d}t + \sigma S_t\frac{\partial V}{\partial S_t}\mathrm{d}X_t \end{aligned}$$

由无风险套利原理可知：期权价值与投资组合 $\boldsymbol{\theta} = (\theta_t^0, \theta_t^1)$ 的价值相等，故令 $\theta_t^1 = \dfrac{\partial V}{\partial S_t}$，则可以对冲包含风险的项 $\mathrm{d}X_t$. 于是

$$\begin{aligned} \left(V_t - \frac{\partial V}{\partial S_t}S_t\right)r\mathrm{d}t + \mu S_t\frac{\partial V}{\partial S_t}\mathrm{d}t =& \left[\frac{\partial V}{\partial t} + (\mu - q)S_t\frac{\partial V}{\partial S_t} + \frac{G_t(n\ln S_t - \ln G_t)}{t}\frac{\partial V}{\partial G_t}\right]\mathrm{d}t + \\ & \frac{1}{2}\sigma^2 S_t^2[1+\lambda+2Ht^{2H-1}(2-2^{2H-1})]\frac{\partial^2 V}{\partial S_t^2}\mathrm{d}t \end{aligned}$$

经过整理可得

$$\frac{\partial V}{\partial t} + (r-q)S_t\frac{\partial V}{\partial S_t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S_t^2[1+\lambda+2Ht^{2H-1}(2-2^{2H-1})]\frac{\partial^2 V}{\partial S_t^2} + \frac{G_t(n\ln S_t - \ln G_t)}{t}\frac{\partial V}{\partial G_t} = rV_t$$

令 $\delta^2 = \sigma^2[1+\lambda+2Ht^{2H-1}(2-2^{2H-1})]$，从而

$$\frac{\partial V}{\partial t} + (r-q)S_t\frac{\partial V}{\partial S_t} + \frac{1}{2}\delta^2 S_t^2\frac{\partial^2 V}{\partial S_t^2} + \frac{G_t(n\ln S_t - \ln G_t)}{t}\frac{\partial V}{\partial G_t} = rV_t$$

证毕.

3 模型求解

定理3 假设标的资产价格 S_t 满足混合高斯跳过程驱动的随机微分方程(1),则行权价格为 K,到期日为 T 的几何平均看涨亚式幂期权在 $t(0 \leqslant t \leqslant T)$ 时刻的价格 $V_c(t, S_t, G_t)$ 为

$$V_c(t, S_t, G_t) = (\mathrm{e}^{\mathrm{e}^{\tau+\eta_\tau} N(d_1) - K^n N(d_2)})^{-\beta(t)} \tag{8}$$

其中

$$\beta(t) = r(T-t)$$

$$\tau = \frac{n^2\sigma^2(1+\lambda)(T-t)^3}{6T^2} + \frac{n^2\sigma^2(2-2^{2H-1})(T^{2H}-t^{2H})}{2} - \frac{2Hn^2\sigma^2(2-2^{2H-1})(T^{2H+1}-t^{2H+1})}{T(2H+1)} + \frac{Hn^2\sigma^2(2-2^{2H-1})(T^{2H+2}-t^{2H+2})}{2T^2(H+1)}$$

$$\eta_\tau = \frac{t\ln G_t + (T-t)n\ln S_t}{T} + \frac{n\left[r-q-\frac{1}{2}\sigma^2(1+\lambda)\right](T-t)^2}{2T} - \frac{n\sigma^2(2-2^{2H-1})(T^{2H}-t^{2H})}{2} + \frac{n\sigma^2 H(2-2^{2H-1})(T^{2H+1}-t^{2H+1})}{T(2H+1)}$$

$$d_1 = \frac{\eta_\tau + 2\tau - n\ln K}{\sqrt{2\tau}}$$

$$d_2 = \frac{\eta_\tau - n\ln K}{\sqrt{2\tau}}$$

$$N(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x} \mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}\,\mathrm{d}t$$

证 由定理2可知,在 $t(0 \leqslant t \leqslant T)$ 时刻的价格 $V_c(t, S_t, G_t)$ 满足偏微分方程(5). 令

$$\varphi_t = \frac{t\ln G_t + (T-t)n\ln S_t}{T}$$

$$V_c(t, S_t, G_t) = U(t, \varphi_t)$$

则

$$\frac{\partial V}{\partial t} = \frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial U}{\partial \varphi_t}\frac{\ln G_t - n\ln S_t}{T}$$

$$\frac{\partial V}{\partial G_t} = \frac{\partial U}{\partial \varphi_t}\frac{t}{TG_t},\ \frac{\partial V}{\partial S_t} = \frac{\partial U}{\partial \varphi_t}\frac{n(T-t)}{TS_t}$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial S_t^2} = \left[\frac{n(T-t)}{TS_t}\right]^2\frac{\partial^2 U}{\partial \varphi_t^2} - \frac{n(T-t)}{TS_t^2}\frac{\partial U}{\partial \varphi_t}$$

那么偏微分方程(5)可以转化为

$$\begin{cases} \dfrac{\partial U}{\partial t} + \left(r-q-\dfrac{1}{2}\delta^2\right)\dfrac{n(T-t)}{T}\dfrac{\partial U}{\partial \varphi_t} + \dfrac{1}{2}\delta^2\left[\dfrac{n(T-t)}{T}\right]^2\dfrac{\partial^2 U}{\partial \varphi_t^2} = rU_t \\ U(T, \varphi_T) = \max\{\mathrm{e}^{\varphi_T} - K^n, 0\} \end{cases} \tag{9}$$

令

$$\tau = \gamma(t)$$

$$\eta_\tau = \varphi_t + \alpha(t)$$

$$X(\tau, \eta_\tau) = U(t, \varphi_t)\mathrm{e}^{\beta(t)}$$

其中 $\alpha(t)$, $\beta(t)$, $\gamma(t)$ 为待定函数,则

$$\frac{\partial U}{\partial t}=\mathrm{e}^{-\beta(t)}\left[\frac{\partial X}{\partial \tau}\gamma'(t)-\beta'(t)X+\frac{\partial X}{\partial \eta_\tau}\alpha'(t)\right]$$

$$\frac{\partial U}{\partial \varphi_t}=\mathrm{e}^{-\beta(t)}\frac{\partial X}{\partial \eta_\tau}$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial \varphi_t^2}=\frac{\partial}{\partial \varphi_t}\left(\mathrm{e}^{-\beta(t)}\frac{\partial X}{\partial \eta_\tau}\right)=\mathrm{e}^{-\beta(t)}\frac{\partial^2 X}{\partial \eta_\tau^2}$$

带入(9)式，整理后得

$$\begin{aligned}&\gamma'(t)\frac{\partial X}{\partial \tau}+\left[\alpha'(t)+\left(r-q-\frac{1}{2}\delta^2\right)\frac{n(T-t)}{T}\right]\frac{\partial X}{\partial \eta_\tau}+\\&\frac{1}{2}\delta^2\left(\frac{n(T-t)}{T}\right)^2\frac{\partial^2 X}{\partial \eta_\tau^2}-(r+\beta'(t))X=0\end{aligned}\tag{10}$$

再令

$$\gamma'(t)+\frac{1}{2}\delta^2\left(\frac{n(T-t)}{T}\right)^2=0$$

$$\alpha'(t)+\left(r-q-\frac{1}{2}\delta^2\right)\frac{n(T-t)}{T}=0$$

$$r+\beta'(t)=0$$

由终止条件 $\alpha(T)=\beta(T)=\gamma(T)=0$ 解得

$$\beta(t)=r(T-t)$$

$$\begin{aligned}\alpha(t)=&\frac{n\left[r-q-\frac{1}{2}\sigma^2(1+\lambda)\right](T-t)^2}{2T}-\frac{n\sigma^2(2-2^{2H-1})(T^{2H}-t^{2H})}{2}+\\&\frac{n\sigma^2 H(2-2^{2H-1})}{T(2H+1)}(T^{2H+1}-t^{2H+1})\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\gamma(t)=&\frac{n^2\sigma^2(1+\lambda)(T-t)^3}{6T^2}+\frac{n^2\sigma^2(2-2^{2H-1})(T^{2H}-t^{2H})}{2}-\frac{2Hn^2\sigma^2(2-2^{2H-1})(T^{2H+1}-t^{2H+1})}{T(2H+1)}+\\&\frac{Hn^2\sigma^2(2-2^{2H-1})(T^{2H+2}-t^{2H+2})}{2T^2(H+1)}\end{aligned}$$

则(10)式可化为

$$\begin{cases}\dfrac{\partial X}{\partial \tau}=\dfrac{\partial^2 X}{\partial \eta_\tau^2}\\X(0,\eta_0)=\max\{\mathrm{e}^{\eta_0}-K^n,0\}\end{cases}\tag{11}$$

根据热传导方程经典理论，其存在唯一强解，从而

$$\begin{aligned}X(\tau,\eta_\tau)=&\frac{1}{2\sqrt{\pi\tau}}\int_{n\ln K}^{+\infty}(\mathrm{e}^y-K^n)\mathrm{e}^{-\frac{(y-\eta_\tau)^2}{4\tau}}\mathrm{d}y=\\&\frac{1}{2\sqrt{\pi\tau}}\int_{n\ln K}^{+\infty}\mathrm{e}^{y-\frac{(y-\eta_\tau)^2}{4\tau}}\mathrm{d}y-\frac{K^n}{2\sqrt{\pi\tau}}\int_{n\ln K}^{+\infty}\mathrm{e}^{-\frac{(y-\eta_\tau)^2}{4\tau}}\mathrm{d}y=\\&I_1+I_2\end{aligned}$$

分别计算 I_1 和 I_2.

令 $\dfrac{y-\eta_\tau-2\tau}{\sqrt{2\tau}}=t$

$$I_1=\frac{1}{2\sqrt{\pi\tau}}\int_{n\ln K}^{+\infty}\mathrm{e}^{y-\frac{(y-\eta_\tau)^2}{4\tau}}\mathrm{d}y=$$

$$
\frac{1}{2\sqrt{\pi\tau}}\mathrm{e}^{\tau+\eta_\tau}\int_{n\ln K}^{+\infty}\mathrm{e}^{-\frac{(y-\eta_\tau-2\tau)^2}{4\tau}}\mathrm{d}y=
$$

$$
\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{\tau+\eta_\tau}\int_{-\frac{\eta_\tau+2\tau-n\ln K}{\sqrt{2\tau}}}^{+\infty}\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}\mathrm{d}t=
$$

$$
\mathrm{e}^{\tau+\eta_\tau}N\left(\frac{\eta_\tau+2\tau-n\ln K}{\sqrt{2\tau}}\right)
$$

同理令$\frac{y-\eta_\tau}{\sqrt{2\tau}}=t$

$$
I_2=-\frac{K^n}{2\sqrt{\pi\tau}}\int_{n\ln K}^{+\infty}\mathrm{e}^{-\frac{(y-\eta_\tau)^2}{4\tau}}\mathrm{d}y=
$$

$$
-\frac{K^n}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\frac{\eta_\tau-n\ln K}{\sqrt{2\tau}}}^{+\infty}\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}\mathrm{d}t=
$$

$$
-K^nN\left(\frac{\eta_\tau-n\ln K}{\sqrt{2\tau}}\right)
$$

综上可得(11)式的解为

$$
X(\tau,\eta_\tau)=\mathrm{e}^{\tau+\eta_\tau}N\left(\frac{\eta_\tau+2\tau-n\ln K}{\sqrt{2\tau}}\right)-K^nN\left(\frac{\eta_\tau-n\ln K}{\sqrt{2\tau}}\right)=
$$

$$
\mathrm{e}^{\tau+\eta_\tau}N(d_1)-K^nN(d_2)
$$

其中

$$
d_1=\frac{\eta_\tau+2\tau-n\ln K}{\sqrt{2\tau}}
$$

$$
d_2=\frac{\eta_\tau-n\ln K}{\sqrt{2\tau}}
$$

所以由$U(t,\varphi_t)$和$X(\tau,\eta_\tau)$之间的关系得

$$
V_c(t,S_t,G_t)=U(t,\varphi_t)=\mathrm{e}^{-\beta(t)}X(\tau,\eta_\tau)=
$$

$$
\mathrm{e}^{-\beta(t)}\left[\mathrm{e}^{\tau+\eta_\tau}N(d_1)-K^nN(d_2)\right]
$$

证毕.

推论 2 假设标的资产价格S_t满足混合高斯跳过程驱动的随机微分方程(1),则行权价格为K,到期日为T的几何平均看跌亚式幂期权在$t(0\leqslant t\leqslant T)$时刻的价格$V_p(t,S_t,G_t)$为

$$
V_p(t,S_t,G_t)=\mathrm{e}^{-\beta(t)}\left[K^nN(-d_2)-\mathrm{e}^{\tau+\eta_\tau}N(-d_1)\right] \tag{12}
$$

推论 2 的证明与定理 3 类似,且其中$\beta(t),\tau,\eta_\tau,d_1,d_2$与定理 3 相同.

4 数值模拟

根据定理 3 和推论 2 中的几何平均亚式幂期权看涨以及看跌公式进行数值模拟,讨论定价公式中各参数对于期权价格的影响.对于一份基于(1)式的几何平均亚式幂期权,考虑当期权定价公式中一些参数给定的条件下,某一参数的变化对于期权价格的影响.

第一,研究跳跃强度λ的大小对于期权价格的影响程度.假设标的资产(股票)当前价格$S=100$,无风险利率$r=0.06$,红利率$q=0.02$、股价波动率$\sigma=0.2$,$n=1$,Hurst 指数$H=0.75$,到期日$T=1$,当前时刻$t=0$.图 1 分别给出了在泊松过程的不同跳跃强度下,行权价格与看涨以及看跌期权价格之间的关系.从图 1 可以看出,对于给定的行权价格,跳跃强度越大,看涨期权和看跌期权的价格均越高.

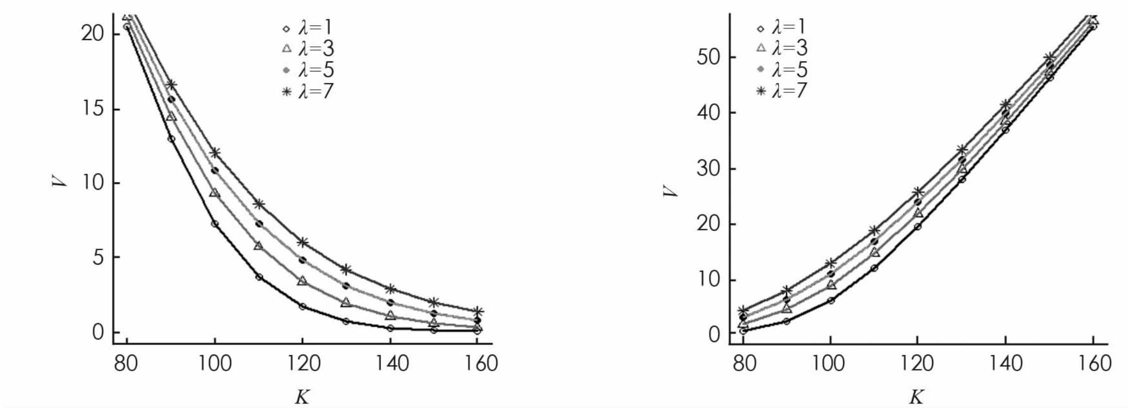

图 1　行权价格 K、跳跃强度 λ 和亚式幂期权价格 V 的关系

第二，研究 Hurst 指数 H 对于期权价格的影响. 假设 $S=100$，$K=100$，$r=0.06$，$q=0.02$，$\lambda=2$，$n=1$，$T=1$，$t=0$. 图 2 分别给出了在不同的 Hurst 指数 H 下，波动率与期权价格之间的关系. 从图 2 可以看出，对于给定的波动率，H 越大，看涨、看跌期权的价格越小；对于不同的 H，随着波动率的增大，看涨、看跌期权价格均上升，但是上升的趋势略有不同.

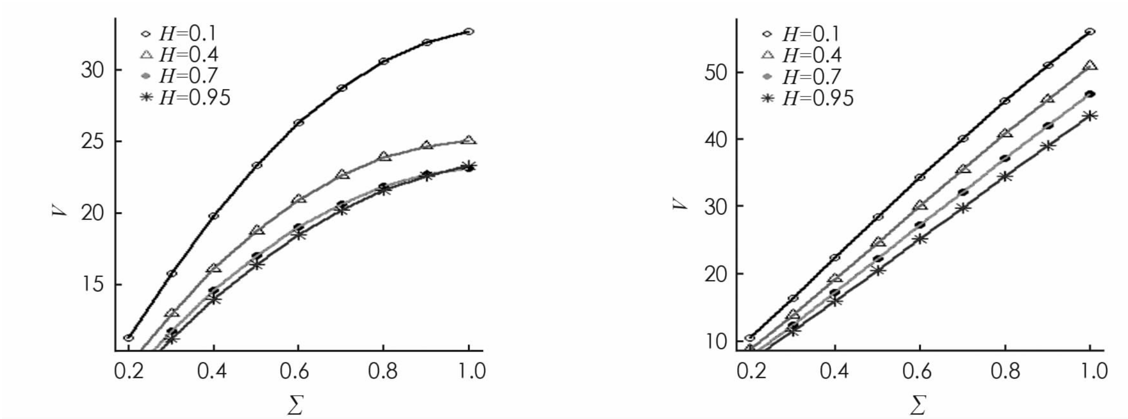

图 2　波动率$\sum$、Hurst 指数 H 和亚式幂期权价格 V 的关系

第三，研究 Hurst 指数 H 与跳跃强度 λ 对期权价格的影响. 假设 $S=100$，$K=100$，$r=0.06$，$\sigma=0.2$，$q=0.02$，$n=1$，$T=1$，$t=0$. 图 3 分别给出了对于不同跳跃强度的大小，随着 Hurst 指数 H 的增加，看涨、看跌期权价格的变化情况. 从图 3 中可以看出，对于给定的 H，跳跃强度越大，看涨、看跌期权价格越高；随着 H 的增大，对于不同的跳跃强度，看涨、看跌期权价格均下降，且跳跃强度越大，价格下降越缓慢.

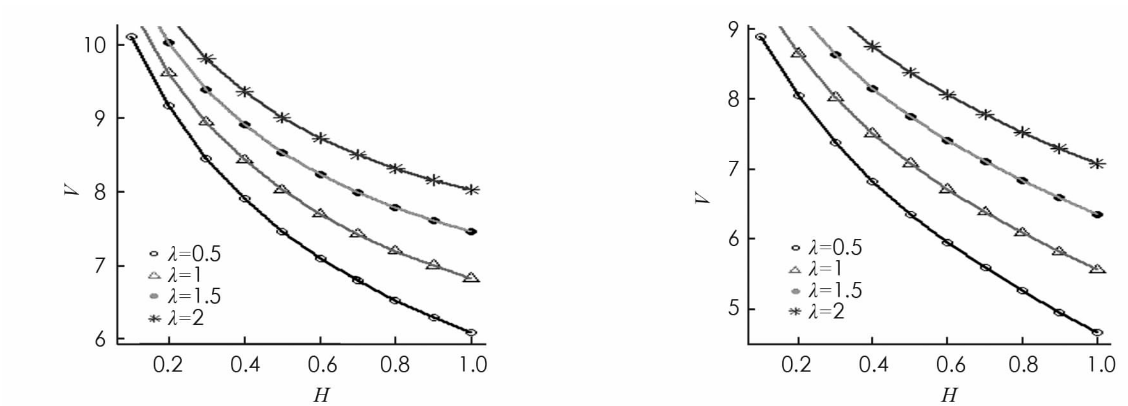

图 3　Hurst 指数 H、跳跃强度 λ 和亚式幂期权价格 V 的关系

第四，研究 n 的变化对于期权价格的影响(以看跌期权为例). 假设 $S=10$，$K=10$，$r=0.06$，$\sigma=0.02$，$q=0.02$，$T=1$，$t=0$. 图 4 分别给出了跳跃强度与 n、Hurst 指数 H 与 n 对看跌期权价格的影响. 从图 4 中可以看出，当 n 超过某一阈值时，n 的增大会对期权价格产生显著影响，这充分体现了幂期权的杠杆效应.

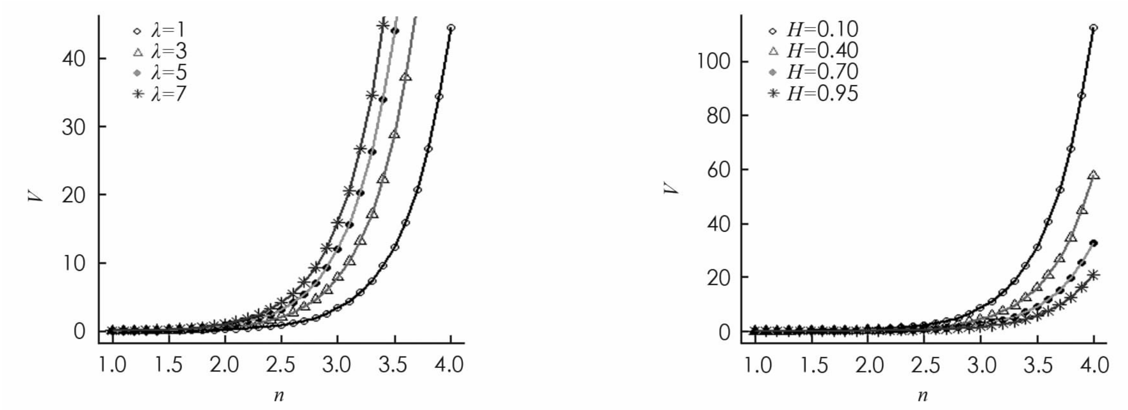

图 4 幂次 n、跳跃强度 λ、Hurst 指数 H 和亚式幂看跌期权价格 V 的关系

5 结 论

通过假设标的资产价格变动由混合高斯跳过程描述，比较全面地考虑了金融资产价格的运动行为. 运用分数型 Itô 公式推导出了混合高斯跳过程 Itô 公式，并运用自融资策略以及风险中性原理得到了几何平均亚式幂期权价格所遵从的数学模型，得到几何平均亚式幂期权的看涨、看跌公式. 最后通过数值模拟验证了 Hurst 指数 H、跳跃强度 λ 以及幂次 n 对期权价格有显著影响. 该结论是对已有研究结果的推广，丰富了奇异期权产品创新的理论依据.

参考文献:

[1] BLACK F, SCHOLES M. The Pricing of Options and Corporate Liabilities [J]. Journal of Political Economy, 1973, 81(3): 637-654.

[2] GREENE M T, FIELITZ B D. Long-Term Dependence in Common Stock Returns [J]. Journal of Financial Economics, 1977, 4(3): 339-349.

[3] MANDELBROT B B. Fractals and Scaling in Finance: Discontinuity, Concentration, Risk[M]. New York: Springer, 1997.

[4] CHERIDITO P. Arbitrage in Fractional Brownian Motion Models [J]. Finance and Stochastics, 2003, 7(4): 533-553.

[5] SUN L. Pricing Currency Options in the Mixed Fractional Brownian Motion [J]. Physica A: Statistical Mechanics and Its Applications, 2013, 392(16): 3441-3458.

[6] SHOKROLLAHI F, KıLıÇMAN A. Pricing Currency Option in a Mixed Fractional Brownian Motion with Jumps Environment [J]. Mathematical Problems in Engineering, 2014, 2014: 1-13.

[7] FUSAI G, MEUCCI A. Pricing Discretely Monitored Asian Options under Lévy Processes [J]. Journal of Banking & Finance, 2008, 32(10): 2076-2088.

[8] CHUNG S F, WONG H Y. Analytical Pricing of Discrete Arithmetic Asian Options with Mean Reversion and Jumps [J]. Journal of Banking & Finance, 2014, 44: 130-140.

[9] WANG X C. Pricing Power Exchange Options with Correlated Jump Risk [J]. Finance Research Letters, 2016, 19: 90-97.

[10] PRAKASA RAO B L S. Pricing Geometric Asian Power Options under Mixed Fractional Brownian Motion Environment [J]. Physica A: Statistical Mechanics and Its Applications, 2016, 446: 92-99.

[11] PENG B, PENG F. Pricing Asian Power Options under Jump-Fraction Process [J]. Journal of Economics Finance and

Administrative Science，2012，17(33)：2-9.
[12] TUDOR C. Some Properties of the Sub-Fractional Brownian Motion [J]. Stochastics，2007，79(5)：431-448.
[13] 肖炜麟，张卫国，徐维军. 次分数布朗运动下带交易费用的备兑权证定价 [J]. 中国管理科学，2014，22(5)：1-7.
[14] 程志勇，郭精军，张亚芳. 次分数布朗运动下支付红利的欧式期权定价 [J]. 应用概率统计，2018，34(1)：37-48.
[15] CHARLES E N，MOUNIR Z. On the Sub-Mixed Fractional Brownian Motion [J]. Applied Mathematics-A Journal of Chinese Universities，2015，30(1)：27-43.
[16] ZHANG W G，LI Z，LIU Y J. Analytical Pricing of Geometric Asian Power Options on an Underlying Driven by a Mixed Fractional Brownian Motion [J]. Physica A：Statistical Mechanics and Its Applications，2018，490：402-418.
[17] 耿延静，周圣武. 混合分数跳-扩散模型下的亚式期权定价 [J]. 华东师范大学学报(自然科学版)，2017(3)：29-38.
[18] 高新羽，刘丽霞. O-U 过程下具有不确定执行价格的领子期权定价 [J]. 西南大学学报(自然科学版)，2019，41(7)：70-76.

Pricing Asian Power Option under Mixed Gaussian Model with Jumps

DING Yi，　GUO Jing-jun

School of Statistics，Lanzhou University of Finance and Economics，Lanzhou 730020，China

Abstract：Considering that the classical Black Scholes (B-S) option pricing model can not describe the long-term dependence and jump phenomenon of asset prices. Firstly，Gaussian mixture and jump model are be used to describe the change process of underlying asset price. Secondly，the mathematical model of geometric average Asian power option price and the pricing formulas of geometric average Asian power options are respectively obtained. And lastly，the sensitivity of parameters to option price are also discussed.

Key words：sub-fractional Brownian motion；jump diffusion；geometric average Asian power option；Itô formula

责任编辑　张　枸