第 46 卷 第 8 期 西南师范大学学报(自然科学版) 2021 年 8 月
Vol. 46 No. 8 Journal of Southwest China Normal University (Natural Science Edition) Aug. 2021

DOI:10.13718/j.cnki.xsxb.2021.08.001

$\sum_1$-SDD 矩阵和 B-$\sum_1$-SDD 矩阵线性互补问题的误差界估计[①]

李艳艳, 蒋建新

文山学院 人工智能学院,云南 文山 663099

摘要: 首先研究$\sum_1$-SDD 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的逆矩阵无穷范数的上界,其次,在该上界的基础上,利用$\sum_1$-SDD 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 和$\widetilde{\boldsymbol{A}}=\boldsymbol{I}-\boldsymbol{D}+\boldsymbol{DA}$ 的关系,得到了 $\boldsymbol{A}$ 的线性互补问题的误差界,同时借助数值算例对估计式的优越性进行了说明. 最后,得到了 B-$\sum_1$-SDD 矩阵线性互补问题的误差界.

关 键 词: $\sum_1$-SDD 矩阵;B-$\sum_1$-SDD 矩阵;线性互补;误差界

中图分类号:O151.21 **文献标志码:A** **文章编号:** 1000-5471(2021)08-0001-06

线性互补问题(Lcp($\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{q}$))的模型是指求 $\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^n$,满足

$$\boldsymbol{x}\geqslant 0 \qquad \boldsymbol{Ax}+\boldsymbol{q}\geqslant 0 \qquad (\boldsymbol{Ax}+\boldsymbol{q})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}=0$$

其中 $\boldsymbol{A}$ 是实矩阵,$\boldsymbol{x}$,$\boldsymbol{q}$ 是实向量.

文献[1]指出:当 Lcp($\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{q}$) 中的矩阵 $\boldsymbol{A}$ 是主子式都为正的实矩阵($\boldsymbol{P}$ 矩阵)时,能较容易得到该问题唯一解的误差界.

文献[2] 给出了 Lcp($\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{q}$) 中的矩阵 $\boldsymbol{A}$ 是主子式都为正的实矩阵($\boldsymbol{P}$ 矩阵)时的线性互补的误差界

$$\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}^*\|_\infty\leqslant\max_{\boldsymbol{d}\in(0,\,1]^n}\|(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{D}+\boldsymbol{DA})^{-1}\|_\infty\,\|r(\boldsymbol{x})\|_\infty$$

其中

$$r(\boldsymbol{x})=\min\{\boldsymbol{x},\,\boldsymbol{Ax}+\boldsymbol{q}\} \qquad \boldsymbol{D}=\operatorname{diag}(d_i)$$
$$\boldsymbol{d}=[d_1,\,d_2,\,\cdots,\,d_n]^{\mathrm{T}} \qquad 0<d_i\leqslant 1$$

关于上述误差界中最难求的 $\max\limits_{\boldsymbol{d}\in[0,\,1]^n}\|(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{D}+\boldsymbol{DA})^{-1}\|_\infty$,许多学者进行了卓有成效的研究[3-12].

本文研究目前少有文献研究的 H-矩阵的新子类$\sum_1$-SDD 矩阵的线性互补问题的误差界估计. 首先给出$\sum_1$-SDD 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的逆矩阵无穷范数的上界,其次在该上界的基础上,利用$\sum_1$-SDD 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 和 $\widetilde{\boldsymbol{A}}=\boldsymbol{I}-\boldsymbol{D}+\boldsymbol{DA}$ 的关系,得到了 $\boldsymbol{A}$ 的线性互补问题的误差界.

1 预备知识

设 $S\subseteq\mathbb{N}$, $\bar{S}=\mathbb{N}\backslash S$, 对 $\forall\, i\in\mathbb{N}$, $r_i(\boldsymbol{A})=\sum\limits_{j\in\mathbb{N}\backslash\{i\}}|a_{ij}|$, $r_i^S(\boldsymbol{A})=\sum\limits_{j\in S\backslash\{i\}}|a_{ij}|$.

---

① 收稿日期:2020-03-05
基金项目:云南省教育厅科学研究基金项目(2021J0759).
作者简介:李艳艳,副教授,主要从事矩阵理论及其应用的研究.

文献[5]首次给出了 H-矩阵的新子类 $\sum_1$-SDD 矩阵.

定义 1[5] 对于矩阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})\in\mathbb{R}^{n,n}$，如果存在非空子集 $S\subseteq\mathbb{N}$，使得：

(i) $|a_{ii}|>r_i^S(\boldsymbol{A})+1,\ i\in S$;

(ii) $(|a_{ii}|-r_i^S(\boldsymbol{A})-1)(|a_{jj}|-r_j^{\bar S}(\boldsymbol{A})-1)>r_i^{\bar S}(\boldsymbol{A})r_j^S(\boldsymbol{A}),\ i\in S,\ j\in\bar S$.

则称 $\boldsymbol{A}$ 是 $\sum_1$-SDD 矩阵.

引理 1[5] 设 $\boldsymbol{A}$ 是主对角元素为正的 $\sum_1$-SDD 矩阵，S 满足定义 1. 则存在对角矩阵 $\boldsymbol{W}=\mathrm{diag}(w_1,w_2,\cdots,w_n)$，且

$$w_i=\begin{cases}\gamma & i\in S\\ 1 & i\in\bar S\end{cases}$$

对 $i\in\mathbb{N}$ 和 $\gamma\in I_s$，有

$$I_s=\left[\max_{i\in S}\frac{r_i^{\bar S}(\boldsymbol{A})}{a_{ii}-r_i^S(\boldsymbol{A})-1},\ \min_{j\in\bar S}\frac{a_{jj}-r_j^{\bar S}(\boldsymbol{A})-1}{r_j^S(\boldsymbol{A})}\right]$$

当 $r_j^S(\boldsymbol{A})=0$ 时，$\dfrac{a_{jj}-r_j^{\bar S}(\boldsymbol{A})-1}{r_j^S(\boldsymbol{A})}=\infty$. 则 $\boldsymbol{AW}$ 是严格对角占优矩阵.

引理 2[13] 设矩阵 $\boldsymbol{A}$ 是 H-矩阵，则 $|\boldsymbol{A}^{-1}|\leqslant\langle\boldsymbol{A}\rangle^{-1}$. 其中

$$|\boldsymbol{A}|=|(a_{ij})| \qquad \langle\boldsymbol{A}\rangle=(\tilde a_{ij})$$

$$\tilde a_{ij}=\begin{cases}|a_{ii}| & i=j\\ -|a_{ij}| & i\neq j\end{cases}$$

$\boldsymbol{A}\leqslant\boldsymbol{B}$ 指的是 $a_{ij}\leqslant b_{ij}$，$i,j\in\mathbb{N}$.

2 $\sum_1$-SDD 矩阵无穷范数的上界估计

本部分利用构造的方法，给出仅与矩阵元素有关的 $\sum_1$-SDD 矩阵无穷范数的上界.

定理 1 设矩阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})\in\mathbb{R}^{n,n}$ 是 $\sum_1$-SDD 矩阵，则

$$\|\boldsymbol{A}^{-1}\|_\infty\leqslant\max\{\max_{i\in S,\ j\in\bar S}\chi_{ij}^S(\boldsymbol{A}),\ \max_{i\in S,\ j\in\bar S}\chi_{ji}^{\bar S}(\boldsymbol{A})\}$$

$$\chi_{ij}^S(\boldsymbol{A})=\frac{|a_{jj}|-r_j^{\bar S}(\boldsymbol{A})+r_i^{\bar S}(\boldsymbol{A})-1}{(|a_{ii}|-r_i^S(\boldsymbol{A})-1)(|a_{jj}|-r_j^{\bar S}(\boldsymbol{A})-1)-r_i^{\bar S}(\boldsymbol{A})r_j^S(\boldsymbol{A})}$$

$$\chi_{ji}^{\bar S}(\boldsymbol{A})=\frac{|a_{ii}|-r_i^S(\boldsymbol{A})+r_j^S(\boldsymbol{A})-1}{(|a_{ii}|-r_i^S(\boldsymbol{A})-1)(|a_{jj}|-r_j^{\bar S}(\boldsymbol{A})-1)-r_i^{\bar S}(\boldsymbol{A})r_j^S(\boldsymbol{A})}$$

证 由引理 2 知 $|\boldsymbol{A}^{-1}|\leqslant\langle\boldsymbol{A}\rangle^{-1}$，则

$$\|\boldsymbol{A}^{-1}\|_\infty\leqslant\|\langle\boldsymbol{A}\rangle^{-1}\|_\infty \qquad \langle\boldsymbol{A}\rangle^{-1}\geqslant\boldsymbol{O}$$

令

$$x_j=\sum_{h=1}^n(\langle\boldsymbol{A}\rangle^{-1})_{jh}=\sum_{h=1}^n|(\langle\boldsymbol{A}\rangle^{-1})_{jh}| \qquad j\in\mathbb{N}$$

则 $\langle\boldsymbol{A}\rangle\boldsymbol{x}=\boldsymbol{e}=(1,\cdots,1)^{\mathrm T}$，定义 $x_{i_0}=\max\limits_{i\in S}x_i$，$x_{j_0}=\max\limits_{j\in\bar S}x_j$，由 $\langle\boldsymbol{A}\rangle\boldsymbol{x}=\boldsymbol{e}$ 有

$$|a_{i_0i_0}|x_{i_0}-\sum_{k\in S,\ k\neq i_0}|a_{i_0k}|x_k-\sum_{h\in\bar S,\ h\neq i_0}|a_{i_0h}|x_h=1$$

则

$$1\geqslant(|a_{i_0i_0}|-1)x_{i_0}-\sum_{k\in S,\ k\neq i_0}|a_{i_0k}|x_k-\sum_{h\in\bar S,\ h\neq i_0}|a_{i_0h}|x_h\geqslant$$

$$
\begin{aligned}
&(|a_{i_0 i_0}|-1)x_{i_0}-\sum_{k\in S,\ k\neq i_0}|a_{i_0 k}|x_{i_0}-\sum_{h\in \bar{S},\ h\neq i_0}|a_{i_0 h}|x_{j_0}=\\
&(|a_{i_0 i_0}|-r_{i_0}^{S}(\boldsymbol{A})-1)x_{i_0}-r_{i_0}^{\bar{S}}(\boldsymbol{A})x_{j_0}
\end{aligned}
$$

即

$$
x_{i_0}\leqslant\frac{1+r_{i_0}^{\bar{S}}(\boldsymbol{A})x_{j_0}}{|a_{i_0 i_0}|-r_{i_0}^{S}(\boldsymbol{A})-1} \tag{1}
$$

对于

$$
|a_{j_0 j_0}|x_{j_0}-\sum_{h\in \bar{S},\ h\neq j_0}|a_{j_0 h}|x_h-\sum_{k\in S,\ k\neq j_0}|a_{j_0 k}|x_k=1
$$

同理得

$$
x_{j_0}\leqslant\frac{1+r_{j_0}^{S}(\boldsymbol{A})x_{i_0}}{|a_{j_0 j_0}|-r_{j_0}^{\bar{S}}(\boldsymbol{A})-1} \tag{2}
$$

联合(1),(2) 式，整理化简得

$$
x_{i_0}\leqslant\frac{|a_{j_0 j_0}|-r_{j_0}^{\bar{S}}(\boldsymbol{A})+r_{i_0}^{\bar{S}}(\boldsymbol{A})-1}{(|a_{i_0 i_0}|-r_{i_0}^{S}(\boldsymbol{A})-1)(|a_{j_0 j_0}|-r_{j_0}^{\bar{S}}(\boldsymbol{A})-1)-r_{i_0}^{\bar{S}}(\boldsymbol{A})r_{j_0}^{S}(\boldsymbol{A})}
$$

$$
x_{j_0}\leqslant\frac{|a_{i_0 i_0}|-r_{i_0}^{S}(\boldsymbol{A})+r_{j_0}^{S}(\boldsymbol{A})-1}{(|a_{i_0 i_0}|-r_{i_0}^{S}(\boldsymbol{A})-1)(|a_{j_0 j_0}|-r_{j_0}^{\bar{S}}(\boldsymbol{A})-1)-r_{i_0}^{\bar{S}}(\boldsymbol{A})r_{j_0}^{S}(\boldsymbol{A})}
$$

令

$$
\chi_{i_0 j_0}^{S}(\boldsymbol{A})=\frac{|a_{j_0 j_0}|-r_{j_0}^{\bar{S}}(\boldsymbol{A})+r_{i_0}^{\bar{S}}(\boldsymbol{A})-1}{(|a_{i_0 i_0}|-r_{i_0}^{S}(\boldsymbol{A})-1)(|a_{j_0 j_0}|-r_{j_0}^{\bar{S}}(\boldsymbol{A})-1)-r_{i_0}^{\bar{S}}(\boldsymbol{A})r_{j_0}^{S}(\boldsymbol{A})}
$$

$$
\chi_{j_0 i_0}^{\bar{S}}(\boldsymbol{A})=\frac{|a_{i_0 i_0}|-r_{i_0}^{S}(\boldsymbol{A})+r_{j_0}^{S}(\boldsymbol{A})-1}{(|a_{i_0 i_0}|-r_{i_0}^{S}(\boldsymbol{A})-1)(|a_{j_0 j_0}|-r_{j_0}^{\bar{S}}(\boldsymbol{A})-1)-r_{i_0}^{\bar{S}}(\boldsymbol{A})r_{j_0}^{S}(\boldsymbol{A})}
$$

则

$$
\|\boldsymbol{A}^{-1}\|_{\infty}\leqslant\max\{\max_{i\in S,\ j\in \bar{S}}\chi_{ij}^{\bar{S}}(\boldsymbol{A}),\ \max_{i\in S,\ j\in \bar{S}}\chi_{ji}^{\bar{S}}(\boldsymbol{A})\} \tag{3}
$$

3　$\sum_1$-SDD 矩阵线性互补问题的误差界

本部分利用定理 1 中 $\sum_1$-SDD 矩阵逆矩阵无穷范数的上界，得到它线性互补问题的上界估计式.

定理 2　设矩阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})\in\mathbb{R}^{n,n}$ 是 $\sum_1$-SDD 矩阵，$S\subseteq\mathbb{N}$，$S\neq\varnothing$，$a_{ii}>0$，令 $\widetilde{\boldsymbol{A}}=\boldsymbol{I}-\boldsymbol{D}+\boldsymbol{DA}=(\tilde{a}_{ij})$，$\boldsymbol{D}=\mathrm{diag}(d_i)$，$0<d_i\leqslant 1$，则对 $\forall\, i,j\in\mathbb{N}$，有

$$
d_i r_i^{S}(\boldsymbol{A})=r_i^{S}(\widetilde{\boldsymbol{A}})\qquad\qquad d_j r_j^{S}(A)=r_j^{S}(\widetilde{\boldsymbol{A}}) \tag{4}
$$

且对 $i\in S$，$j\in\bar{S}$，有

$$
\begin{aligned}
&|\tilde{a}_{ii}|>r_i^{S}(\widetilde{\boldsymbol{A}})+1\qquad\qquad i\in S\\
&(|\tilde{a}_{ii}|-r_i^{S}(\widetilde{\boldsymbol{A}})-1)(|\tilde{a}_{jj}|-r_j^{\bar{S}}(\widetilde{\boldsymbol{A}})-1)>r_i^{\bar{S}}(\widetilde{\boldsymbol{A}})r_j^{S}(\widetilde{\boldsymbol{A}})
\end{aligned} \tag{5}
$$

即矩阵 $\widetilde{\boldsymbol{A}}$ 是 $\sum_1$-SDD 矩阵.

证　由 $\widetilde{\boldsymbol{A}}$ 的定义知，(4) 式显然成立.

下面重点证明(5) 式. 由(4) 式和 $\widetilde{\boldsymbol{A}}$ 的定义知

$$
|\tilde{a}_{ii}|-r_i^{S}(\widetilde{\boldsymbol{A}})-1=1-d_i+d_i a_{ii}-d_i r_i^{S}(\boldsymbol{A})-1=d_i(a_{ii}-r_i^{S}(\boldsymbol{A})-1)
$$

又由 $\sum_1$-SDD 矩阵的定义知 $a_{ii}>r_i^{S}(\boldsymbol{A})+1$，所以 $|\tilde{a}_{ii}|>r_i^{S}(\widetilde{\boldsymbol{A}})+1$.

同理对任意 $j\in\bar{S}$，有

$$|\tilde{a}_{jj}|-r_j^{\bar{S}}(\tilde{\boldsymbol{A}})-1=d_j(a_{jj}-r_j^{\bar{S}}(\boldsymbol{A})-1)$$

则

$$(|\tilde{a}_{ii}|-r_i^{S}(\tilde{\boldsymbol{A}})-1)(|\tilde{a}_{jj}|-r_j^{\bar{S}}(\tilde{\boldsymbol{A}})-1)=d_i(a_{ii}-r_i^{S}(\boldsymbol{A})-1)d_j(a_{jj}-r_j^{\bar{S}}(\boldsymbol{A})-1)>$$
$$d_id_jr_i^{\bar{S}}(\boldsymbol{A})r_j^{S}(\boldsymbol{A})=d_ir_i^{\bar{S}}(\boldsymbol{A})d_jr_j^{S}(\boldsymbol{A})=r_i^{\bar{S}}(\tilde{\boldsymbol{A}})r_j^{S}(\tilde{\boldsymbol{A}})$$

则由定义1知，$\tilde{\boldsymbol{A}}$ 是 $\sum_1$-SDD 矩阵.

定理3 设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})\in\mathbb{R}^{n,n}$ 是 $\sum_1$-SDD 矩阵，$S\subseteq\mathbb{N}$，$S\neq\varnothing$，$a_{ii}>0$，令

$$\tilde{\boldsymbol{A}}=\boldsymbol{I}-\boldsymbol{D}+\boldsymbol{DA}=(\tilde{a}_{ij})\qquad \boldsymbol{D}=\operatorname{diag}(d_i)\qquad 0<d_i\leqslant 1$$

则

$$\max_{\boldsymbol{d}\in(0,1]^n}\|(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{D}+\boldsymbol{DA})^{-1}\|_\infty\leqslant\max_{i\in S,\,j\in\bar{S}}\max\{\chi_{ij}^{S}(\tilde{\boldsymbol{A}}),\chi_{ji}^{\bar{S}}(\tilde{\boldsymbol{A}})\}=\max_{i\in S,\,j\in\bar{S}}\max\{\kappa_{ij}^{S}(\boldsymbol{A}),\kappa_{ji}^{\bar{S}}(\boldsymbol{A})\}$$

$$\kappa_{ij}^{S}(A)=\frac{d_j(a_{jj}-r_j^{\bar{S}}(\boldsymbol{A})-1)+d_ir_i^{\bar{S}}(\boldsymbol{A})}{d_id_j[(a_{ii}-r_i^{S}(\boldsymbol{A})-1)(a_{jj}-r_j^{\bar{S}}(\boldsymbol{A})-1)-r_i^{\bar{S}}(\boldsymbol{A})r_j^{S}(\boldsymbol{A})]}$$

$$\kappa_{ji}^{\bar{S}}(\boldsymbol{A})=\frac{d_i(|a_{ii}|-r_i^{S}(\boldsymbol{A})-1)+d_jr_j^{S}(\boldsymbol{A})}{d_id_j[(|a_{ii}|-r_i^{S}(\boldsymbol{A})-1)(|a_{jj}|-r_j^{\bar{S}}(\boldsymbol{A})-1)-r_i^{\bar{S}}(\boldsymbol{A})r_j^{S}(\boldsymbol{A})]}$$

证 令 $\tilde{\boldsymbol{A}}=\boldsymbol{I}-\boldsymbol{D}+\boldsymbol{DA}=(\tilde{a}_{ij})$，由 $\tilde{\boldsymbol{A}}$ 的定义知，对任意 $i\in S$，$j\in\bar{S}$，有

$$\tilde{a}_{ii}-r_i^{S}(\tilde{\boldsymbol{A}})-1=d_i(a_{ii}-r_i^{S}(\boldsymbol{A})-1)$$
$$\tilde{a}_{jj}-r_j^{\bar{S}}(\tilde{\boldsymbol{A}})-1=d_j(a_{jj}-r_j^{\bar{S}}(\boldsymbol{A})-1)$$

则对任意 $i\in S$，$j\in\bar{S}$，有

$$\chi_{ij}^{S}(\tilde{\boldsymbol{A}})=\frac{|\tilde{a}_{jj}|-r_j^{\bar{S}}(\tilde{\boldsymbol{A}})+r_i^{\bar{S}}(\tilde{\boldsymbol{A}})-1}{(|\tilde{a}_{ii}|-r_i^{S}(\tilde{\boldsymbol{A}})-1)(|\tilde{a}_{jj}|-r_j^{\bar{S}}(\tilde{\boldsymbol{A}})-1)-r_i^{\bar{S}}(\tilde{\boldsymbol{A}})r_j^{S}(\tilde{\boldsymbol{A}})}=$$
$$\frac{d_j(|a_{jj}|-r_j^{\bar{S}}(\boldsymbol{A})-1)+d_ir_i^{\bar{S}}(\boldsymbol{A})}{d_id_j[(|a_{ii}|-r_i^{S}(\boldsymbol{A})-1)(|a_{jj}|-r_j^{\bar{S}}(\boldsymbol{A})-1)-r_i^{\bar{S}}(\boldsymbol{A})r_j^{S}(\boldsymbol{A})]}=\kappa_{ij}^{S}(\boldsymbol{A})$$

同理对 $i\in S$，$j\in\bar{S}$，类似地有

$$\chi_{ji}^{\bar{S}}(\tilde{\boldsymbol{A}})=\frac{d_i(|a_{ii}|-r_i^{S}(\boldsymbol{A})-1)+d_jr_j^{S}(\boldsymbol{A})}{d_id_j[(|a_{ii}|-r_i^{S}(\boldsymbol{A})-1)(|a_{jj}|-r_j^{\bar{S}}(\boldsymbol{A})-1)-r_i^{\bar{S}}(\boldsymbol{A})r_j^{S}(\boldsymbol{A})]}=\kappa_{ji}^{\bar{S}}(\boldsymbol{A})$$

则由定理1知

$$\max_{\boldsymbol{d}\in(0,1]^n}\|(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{D}+\boldsymbol{DA})^{-1}\|_\infty\leqslant\max_{i\in S,\,j\in\bar{S}}\max\{\chi_{ij}^{S}(\tilde{\boldsymbol{A}}),\chi_{ji}^{\bar{S}}(\tilde{\boldsymbol{A}})\}=\max_{i\in S,\,j\in\bar{S}}\max\{\kappa_{ij}^{S}(\boldsymbol{A}),\kappa_{ji}^{\bar{S}}(\boldsymbol{A})\}$$

例1 设 $\boldsymbol{A}_1=\begin{pmatrix}16&-9&-9\\-9&27&-9\\-9&-9&27\end{pmatrix}$. 经验证，当 $S=\{1\}$ 时，$\boldsymbol{A}_1$ 为 $\sum_1$-SDD 矩阵，且 $I_s=\left[\frac{6}{5},\frac{17}{9}\right)$. 应用定理3，当 $d_i,d_j=1$ 时，计算得

$$\max_{\boldsymbol{d}\in(0,1]^n}\|(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{D}+\boldsymbol{DA})^{-1}\|_\infty\leqslant 1.46$$

例2 设 $\boldsymbol{A}_2=\begin{pmatrix}4&-1&0&-1\\-1&6&-1&0\\-2&-1&8&-1\\\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&\frac{1}{4}&4\end{pmatrix}$，经验证，当 $S=\{1,2\}$ 时，$\boldsymbol{A}_2$ 为 $\sum_1$-SDD 矩阵，且 $I_s=\left[\frac{1}{2},2\right)$. 应用定理3，当 $d_i,d_j=1$ 时，计算得

$$\max_{\boldsymbol{d}\in(0,1]^n}\|(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{D}+\boldsymbol{DA})^{-1}\|_\infty\leqslant 1.33$$

本部分给出了形式比较简洁，易于计算的线性互补误差界的上界.

4　B-$\sum_1$-SDD 矩阵误差界的估计

令 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})\in\mathbb{R}^{n,n}$，$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}^{+}+\boldsymbol{C}$，

$$\boldsymbol{B}^{+}=(b_{ij})=\begin{pmatrix} a_{11}-r_1^{+} & \cdots & a_{1n}-r_1^{+} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1}-r_n^{+} & \cdots & a_{nn}-r_n^{+}\end{pmatrix} \tag{6}$$

$$\boldsymbol{C}=\begin{pmatrix} r_1^{+} & \cdots & r_1^{+} \\ \vdots & & \vdots \\ r_n^{+} & \cdots & r_n^{+}\end{pmatrix} \qquad r_i^{+}=\max\{0,a_{ij}\mid j\neq i\}$$

$\boldsymbol{B}^{+}$ 是 Z-矩阵(非主对角元素非正的矩阵)，$\boldsymbol{C}$ 是非负矩阵.

定义 2　若矩阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})\in\mathbb{R}^{n,n}$ 能写成(6)式的形式，且 $\boldsymbol{B}^{+}$ 是主对角元素为正的 $\sum_1$-SDD 矩阵，则称 $\boldsymbol{A}$ 是 B-$\sum_1$-SDD 矩阵.

引理 3　若 $\boldsymbol{A}$ 是 B-$\sum_1$-SDD 矩阵，则 $\boldsymbol{A}$ 是 P-矩阵.

定理 4　设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})\in\mathbb{R}^{n,n}$ 是 B-$\sum_1$-SDD 矩阵，$\varnothing\neq S\subset\mathbb{N}$，$\boldsymbol{B}^{+}$ 如(6)式定义，则

$$\max_{\boldsymbol{d}\in(0,1]^n}\|(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{D}+\boldsymbol{DA})^{-1}\|_\infty\leqslant(n-1)\max_{i\in S,\,j\in\bar{S}}\max\{\kappa_{ij}^{S}(\boldsymbol{B}^{+}),\kappa_{ji}^{\bar{S}}(\boldsymbol{B}^{+})\}$$

证　因为 $\boldsymbol{A}$ 是 B-$\sum_1$-SDD 矩阵，$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}^{+}+\boldsymbol{C}$，$\boldsymbol{B}^{+}$ 是主对角元素为正的 $\sum_1$-SDD-Z 矩阵. 设矩阵 $\boldsymbol{D}=\mathrm{diag}(d_i)$，$0<d_i\leqslant 1$，

$$\widetilde{\boldsymbol{A}}=\boldsymbol{I}-\boldsymbol{D}+\boldsymbol{DA}=(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{D}+\boldsymbol{DB}^{+})+\boldsymbol{DC}=\boldsymbol{B}_D^{+}+\widetilde{\boldsymbol{C}}_D$$

$$\widetilde{\boldsymbol{B}}_D^{+}=\boldsymbol{I}-\boldsymbol{D}+\boldsymbol{DB}^{+} \qquad \widetilde{\boldsymbol{C}}_D=\boldsymbol{DC}$$

由文献[11]知 $\widetilde{\boldsymbol{B}}_D^{+}$ 仍是主对角元素为正的 $\sum_1$-SDD 矩阵，且 $\widetilde{\boldsymbol{B}}_D^{+}$ 是非奇异 M-矩阵. 由文献[11]中定理 2 的证明知

$$\|\boldsymbol{A}_D^{-1}\|_\infty\leqslant\|(\boldsymbol{I}+(\widetilde{\boldsymbol{B}}_D^{+})^{-1}\widetilde{\boldsymbol{C}}_D)^{-1}\|_\infty\|(\widetilde{\boldsymbol{B}}_D^{+})^{-1}\|_\infty\leqslant(n-1)\|(\widetilde{\boldsymbol{B}}_D^{+})^{-1}\|_\infty$$

因为 $\widetilde{\boldsymbol{B}}_D^{+}$ 是 $\sum_1$-SDD 矩阵，由定理 1 的证明知

$$\|(\widetilde{\boldsymbol{B}}_D^{+})^{-1}\|_\infty\leqslant\max_{i\in S,\,j\in\bar{S}}\max\{\kappa_{ij}^{S}(\boldsymbol{B}^{+}),\kappa_{ji}^{\bar{S}}(\boldsymbol{B}^{+})\}$$

本文首先给出了 $\sum_1$-SDD 矩阵逆的无穷范数的新上界，其次研究了目前较少有文献研究的 $\sum_1$-SDD 矩阵和 B-$\sum_1$-SDD 矩阵的线性互补问题的误差界，这是对该类矩阵这方面研究空白的填充，也是对线性互补误差界问题研究的进一步拓展.

参考文献：

[1]　PENA J M. A Class of P-Matrices with Applications to the Localization of the Eigenvalues of a Real Matrix [J]. SIAM J Matrix Anal Appl，2001，22(4)：1027-1037.

[2]　CHEN X J，XIANG S H. Computation of Error Bounds for P-Matrix Linear Complementarity Problems [J]. Math Prog，2006，106(3)：513-525.

[3]　GAO L，WANG Y Q，LI C Q，et al. Error Bounds for Linear Complementarity Problems of S-Nekrasov Matrices and B-S-Nekrasov Matrices [J]. Journal of Computational and Applied Mathematics，2018，336：147-159.

[4]　DAI P F，LI Y T，LU C J. Error Bounds for Linear Complementarity Problems for SB-Matrices [J]. Numer Algor，2012，61(1)：121-139.

[5] GARCÍA-ESNAOLA M, PENA J M. Error Bounds for Linear Complementarity Problem with a $\sum$-SDD Matrix [J]. Lineaer Algebra and its Application, 2013, 438: 1339-1346.

[6] LI C Q, LI Y T. Weakly Chained Diagonally Dominant B-Matrices and Error Bounds for Linear Complementarity Problems [J]. Numer Algor, 2016, 73(4): 985-998.

[7] 王 峰, 孙德淑. B-矩阵线性互补问题的误差界估计 [J]. 数学的实践与认识, 2017, 47(8): 253-260.

[8] 徐玉梅, 王 峰. 弱链对角占优 B-矩阵线性互补问题的误差界新估计 [J]. 西南师范大学学报(自然科学版), 2019, 44(2): 18-24.

[9] 刘 毅, 井 霞, 高 磊. Ostrowski-Brauer Sparse B(OBS-B)矩阵及其线性互补问题的误差界 [J]. 云南大学学报(自然科学版), 2021, 43(2): 205-213.

[10] 李艳艳, 周 平. Dashnic-Zusmanovich 矩阵线性互补问题误差界的估计 [J]. 西南师范大学学报(自然科学版), 2019, 44(6): 10-13.

[11] 张小双, 陈 震, 刘奇龙. 求解不同阶对称张量组特征值的带位移高阶幂法 [J]. 西南大学学报(自然科学版), 2020, 42(8): 81-87.

[12] 文慧敏, 冯德成, 杨亚男. 双参数弱(下)鞅的一类极大值不等式 [J]. 西南大学学报(自然科学版), 2021, 43(3): 95-100.

[13] HORN R A, JOHNSON C R. Topics in Matrix Analysis [M]. Cambridge: Cambridge University Press, 1991: 12-36.

Error Bounds for Linear Complementarity Problems of $\sum_1$-SDD Matrix and B-$\sum_1$-SDD Matrix

LI Yan-yan, JIANG Jian-xin

School of artificial intelligence, Wenshan University, Wenshan Yunnan 663099, China

Abstract: First, the upper bound of the infinite norm of the inverse matrix $\sum_1$-SDD of $\boldsymbol{A}$ has been studied, Secondly, on the basis of the upper boundary, using the relation $\sum_1$-SDD matrix of $\boldsymbol{A}$ and $\widetilde{\boldsymbol{A}}=\boldsymbol{I}-\boldsymbol{D}+\boldsymbol{DA}$, the error bounds for linear complementarity of $\boldsymbol{A}$ is obtained. At the same time, numerical examples are used to illustrate the superiority of the estimator. Lastly, Further obtained the error bounds for linear complementarity of B-$\sum_1$-SDD matrix.

Key words: $\sum_1$-SDD matrix; B-$\sum_1$-SDD matrix; linear complementarity; error bound

责任编辑 廖 坤