第 46 卷　第 8 期　西南师范大学学报(自然科学版)　2021 年 8 月
Vol. 46　No. 8　Journal of Southwest China Normal University (Natural Science Edition)　Aug.　2021

DOI:10.13718/j.cnki.xsxb.2021.08.002

真子群个数与极小真子群覆盖数相等的群[①]

苗雷星，　曹洪平

西南大学 数学与统计学院，重庆 400715

摘要： 设 G 为有限群，$\sigma(G)$ 表示 G 的极小真子群覆盖数，即把 G 表示成真子群的并所用子群的最小个数，$k(G)$ 表示 G 的真子群的个数. 通过对有限群 G 的任意两个不同真子群之间的关系的讨论，确定了有限群的真子群个数与其极小子群覆盖数相等的充分条件. 对有限群的阶所含素因子的个数进行分类，利用有限质元群的性质，研究了有限群的真子群个数与其极小子群覆盖数相等时群的结构，得到了如下结论：$\sigma(G)=k(G)$ 当且仅当 $G=C_p\times C_p$，或者 G 为 pq 阶非交换群.

关　键　词： 真子群；极小子群覆盖；质元群

中图分类号： O152.1　　**文献标志码：** A　　**文章编号：** 1000－5471(2021)08－0007－03

在研究有限群的结构的问题上，有很多学者利用元素的阶与子群的个数去刻画群. 文献[1-2]分别通过讨论元素的最高阶元的阶和交换子群的个数去研究有限群的结构与性质. 文献[3]利用最高阶元的阶和 ONC-度量刻画了 Conway 单群和 Fischer 单群. 关于一个群最少可以表示为几个真子群的并的问题，国内外很多优秀的学者对其进行了研究并且取得了丰硕的研究成果. 文献[4]证明了：当 G 是 n 阶有限群时，存在整数 $K\leqslant\frac{n}{2}+1$，使得 G 可以表示为 K 个交换子群的并. 文献[5]证明了：$\sigma(S_n)\leqslant 2^{n-1}$，且当 $n\neq 7,9$ 时，$\sigma(A_n)\geqslant 2^{n-2}$. 文献[6]证明了：不存在能表示为 11 和 13 个真子群的并集的有限群. 文献[7]证明了：一个群能表示为 3 个真子群的并的充要条件为这个群同态于 Klein 四元群，并且进一步讨论了怎样的群可以表示为 4 个真子群的并. 文献[8]给出了同态于 Klein 四元群的群能表示为 3 个真子群的并的一种简单证明方法. 文献[9]研究了有限群表示为 4 个真子群的并的问题，给出了一个新证明，并且对群结构进行了更详细的讨论，证明了：如果一个有限群 G 能表示为 4 个真子群 G_1,G_2,G_3 及 G_4 的并，则要么 G_1,G_2,G_3 及 G_4 中至少有一个是 G 的正规子群，要么 G 同态于 S_3 或 $C_3\times C_3$，且同态核是 $G_1\cap G_2\cap G_3\cap G_4$. 文献[10]通过计算子群的阶的方法，给出了能表示成 $p+1$ 或 $p+2$ 个真子群并的有限群的结构. 但有限群 G 的真子群个数与 G 的极小子群覆盖个数相等时 G 的结构如何尚未讨论. 本文将就这一问题展开讨论.

本文所用符号都是标准的，可参考文献[11].

设 G 为有限群，$\sigma(G)$ 表示 G 的极小真子群覆盖数，即把 G 表示成真子群的并所用子群的最小个数，$k(G)$ 表示 G 的真子群的个数. 有限群由极小个真子群的并表示称为极小子群覆盖. 本文证明下述定理：

定理 1　设 G 为有限群，p,q 为素数，且 $p<q$，则 $\sigma(G)=k(G)$ 当且仅当 G 为下列群：

(i) $G=C_p\times C_p$；

(ii) G 为 pq 阶非交换群.

引理 1　设 G 为有限群，如果 $\sigma(G)=k(G)$，则 G 的任意两个不同的真子群之间没有包含关系.

证　设 $\sigma(G)=s$，$G=A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_s$，其中 $A_1,\cdots,A_s$ 为 G 的两两不同的真子群. 因为

① 收稿日期：2020－11－23

基金项目：国家自然科学基金项目(12071377).

作者简介：苗雷星，硕士研究生，主要从事群论的研究.

通信作者：曹洪平，副教授.

$\sigma(G)=k(G)$，所以 $k(G)=s$，于是 $A_1,\cdots,A_s$ 为 G 的全部真子群.

如果 G 中存在两个真子群 $A_i\subseteq A_j(i<j)$，那么 $A_i\cup A_j\subseteq A_j$，于是

$$G=A_1\cup\cdots\cup A_i\cup\cdots\cup A_j\cup\cdots\cup A_s=$$
$$A_1\cup\cdots\cup A_{i-1}\cup A_{i+1}\cup\cdots\cup A_j\cup\cdots\cup A_s$$

这与 $\sigma(G)=s$ 矛盾.

由引理1我们可以知道：对于有限 p- 群 G，如果要满足 $\sigma(G)=k(G)$，则 G 中不能含有 $p^r(r\geqslant 2)$ 阶真子群，否则，如果 G 中存在 $p^r(r\geqslant 2)$ 阶真子群 H，H 中包含 p 阶真子群，由引理1可知这样的群 G 不能满足 $\sigma(G)=k(G)$；阶为 $p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_m^{\alpha_m}(m\geqslant 2)$ 的群 G，若要满足 $\sigma(G)=k(G)$，则 G 中不能存在 $p_i^t(i=1,2,\cdots,m;\ t\geqslant 2)$ 阶子群，否则，如果存在某个 k，$\alpha_k>1$，则 G 中有 $p_k^{\alpha_k}$ 阶子群 P_k，P_k 中包含 p_k 阶真子群，通过引理1可知这样的 G 无法满足 $\sigma(G)=k(G)$. 由此我们可以初步判断，如果群 G 满足 $\sigma(G)=k(G)$，则群 G 的阶要么为 $p^t(t\leqslant 2)$，要么为 $p_1p_2\cdots p_m$.

引理2[12] 如果 G 是一个非循环 p- 群，则 $\sigma(G)=p+1$.

引理3[11] 设 G 为 p^n 阶初等交换 p- 群，则 G 的 p^m 阶$(1\leqslant m\leqslant n)$子群的个数为

$$\frac{(p^n-1)(p^{n-1}-1)\cdots(p^{n-m+1}-1)}{(p^m-1)(p^{m-1}-1)\cdots(p-1)}$$

引理4 设 p,q 为素数，且 $p<q$，G 为 pq 阶非交换群，则 $k(G)=q+1$.

证 设 n_p 为 G 中 Sylow p- 子群的个数，n_q 为 G 中 Sylow q- 子群的个数. 由 Sylow 定理知，$n_q\equiv 1(\bmod q)$，且 $n_q\mid p$. 因为 $p<q$，所以 $n_q=1$，即 G 中只有一个 Sylow q- 子群，设为 Q. 同样地，$n_p\equiv 1(\bmod p)$，$n_p\mid q$. 因为 q 为素数，所以 $n_p=1,q$. 若 $n_p=1$，那么此时 G 中只有一个 Sylow p- 子群，这样的 G 为 pq 阶循环群，矛盾. 从而 $n_p=q$，即 G 中有 q 个 Sylow p- 子群. 设 H 为 G 中任一真子群，由拉格朗日定理知，$|H|\,\big|\,|G|$，即 $|H|=p,q$，从而得到 G 中的 Sylow p- 子群和 Sylow q- 子群组成了 G 的全部真子群，即 $k(G)=q+1$.

引理5 设 p,q 为素数，且 $p<q$，G 为 pq 阶非交换群，则 $\sigma(G)=q+1$.

证 由引理4，G 中有 q 个 Sylow p- 子群，设为 $P_1,P_2,\cdots,P_q$，同时设 Q 为 G 的 Sylow q- 子群.

设 G 可表示为最少 m 个两两不同真子群的并，即 $G=A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_m$. 因为 G 中有 $q-1$ 个 q 阶元，所以 $A_1,\cdots,A_m$ 中必有一个为 Q，令 $A_m=Q$，即

$$G=A_1\cup\cdots\cup A_{m-1}\cup Q$$

其中 $|A_i|=p(i=1,\cdots,m-1)$. 由于 $A_1,\cdots,A_{m-1}$ 互不相同，且它们的阶均为 p，所以 $|A_i\cap A_j|=1$，$1\leqslant i\neq j\leqslant m-1$，又因 $|A_i\cap Q|=1$，$i=1,\cdots,m-1$，所以 $pq=(m-1)(p-1)+q-1+1$. 于是 $m=q+1$. 所以 $\sigma(G)=q+1$.

引理6[13] 若有限群 G 的元的阶除单位元1外都是素数，则称 G 为有限质元群. 有限质元群有且仅有下述3种类型：

1) q^n 阶群；

2) pq^n 阶群；

3) A_5.

定理1的证明

如果 $G=C_p\times C_p$，则由引理2可知，$\sigma(G)=p+1$. 又由引理3知

$$k(G)=\frac{p^2-1}{p-1}=p+1$$

故 $\sigma(G)=k(G)$.

若 G 为 pq 阶非交换群，由引理4、引理5，有 $\sigma(G)=k(G)$.

反之，设 G 为有限群，且满足条件 $\sigma(G)=k(G)$，下面证明 G 只能为(i),(ii)中的群.

设 $|G|=p_1^{\alpha_1}\cdots p_m^{\alpha_m}$.

若 $m\geqslant 3$，由引理1知，$|G|=p_1p_2\cdots p_m$. 我们证明 G 中没有 $p_1p_2\cdots p_t(t\geqslant 2)$ 阶真子群. 如果 G 中存在 $p_1p_2\cdots p_t(t\geqslant 2)$ 阶真子群 S，则 S 中必含有 p_i 阶真子群 $N_i(i=1,\cdots,t)$，N_i 同时为 G 的 p_i 阶真子群.

由引理 1 知，这时 $\sigma(G) \neq k(G)$. 所以当 $|G| = p_1 p_2 \cdots p_m (m \geqslant 3)$ 时，G 中的真子群必定为素数阶群，从而 G 中的元除单位元外都为素数阶元，这样的群 G 为有限质元群. 由引理 6，这与有限质元群的阶为 q^n，pq^n，$2^2 \cdot 3 \cdot 5$ 矛盾. 所以 $m \leqslant 2$.

若 $m = 2$，由引理 1 知，$|G| = p_1 p_2$. 记 $p_1 = p$，$p_2 = q$，则 G 为 pq 阶群. 由于 pq 阶群只有两个类型，即 pq 阶循环群与 pq 阶非交换群，而循环群不能表示为真子群的并，所以 G 为 pq 阶非循环群. 即定理 1(ii) 中的群.

若 $m = 1$，由引理 1，记 $p_1 = p$，则 $|G| = p, p^2$. 又因 G 不是循环群，所以 G 为 p^2 阶初等交换群，即定理 1(i) 中的群.

参考文献：

[1] 于宝娟，吴　莲，陈贵云. 2-Sylow 子群的阶及元素最高阶与次高阶与 A_9 相同的有限群 [J]. 西南师范大学学报(自然科学版)，2020，45(2)：1-6.

[2] 钱　焱，陈贵云. 用交换子群的个数刻画 A_5 和 S_5 [J]. 西南师范大学学报(自然科学版)，2020，45(6)：5-8.

[3] 雷　倩，何立官. 关于 Conway 单群和 Fischer 单群的刻画 [J]. 西南大学学报(自然科学版)，2020，42(10)：96-100.

[4] MASON R. On Coverings of a Finite Group by Abelian Subgroups [J]. Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society，1978，83(2)：205-209.

[5] MARÓTI A. Covering the Symmetric Groups with Proper Subgroups [J]. Journal of Combinatorial Theory(Series A)，2005，110(1)：97-111.

[6] ZHANG J P. Finite Groups as the Union of Proper Subgroups [J]. Serdica Math J，2006，32(2)：259-268.

[7] 樊　恽，李　伟. 能表示成三个真子群的并集的群 [J]. 华中师范大学学报(自然科学版)，2008，42(1)：1-3，11.

[8] 宋科研，陈贵云. 再论能表示为三个真子群的并的群 [J]. 西南大学学报(自然科学版)，2009，31(4)：6-7.

[9] 宋科研，晏燕雄. 论能表为 4 个真子群并的群 [J]. 西南大学学报(自然科学版)，2011，33(2)：91-94.

[10] 钱国华. 能表示成四个真子群并的有限群 [J]. 数学杂志，2011，31(5)：891-892.

[11] 徐明曜. 有限群导引(上册) [M]. 北京：科学出版社，1987.

[12] COHN J H E. On n-Sum Groups [J]. Mathematica Scandinavica，1994，75：44-58.

[13] 施武杰，杨文泽. A_5 的一个新刻划与有限质元群 [J]. 西南师范学院学报(自然科学版)，1984，9(1)：40-44.

Groups with Number of Proper Subgroups Equal to Minimal Number of Proper Subgroups Required to Cover the Group

MIAO Lei-xing，　CAO Hong-ping

School of Mathematics and Statistics，Southwest University，Chongqing 400715，China

Abstract：Let G be a finite group，let $\sigma(G)$ denote the minimum number of subgroups that are used to represent G as proper subgroups，that is，the minimal cover number of proper subgroups of G，and $k(G)$ denote the number of true subgroups of G. By discussing the relation between any two different true subgroups of a finite group G，the sufficient condition that the number of true subgroups of a finite group is equal to the covering number of its minimal subgroups is determined，this paper classifies the number of prime factors in the order of a finite group and studies the structure of a group when the number of proper subgroups of a finite group is equal to the covering number of its minimal subgroups. We obtain the following results：$\sigma(G)=k(G)$ if and only if $G=C_p \times C_p$ or G is a nonabelian group of order pq.

Key words：proper subgroups；minimal subgroups covering；prime groups

责任编辑　廖　坤