DOI:10.13718/j.cnki.xsxb.2021.08.003

闭 G-V 模糊拟阵的导出圈公理①

吴德垠

重庆大学 数学与统计学院，重庆 401331

摘要： 利用普通拟阵来研究模糊拟阵，得到用有限数列、子集族和映射来描述闭模糊拟阵的一个充要条件. 首先根据模糊拟阵的导出圈的连贯性，定义了导出圈映射；然后，详细讨论了闭模糊拟阵的基本序列、导出圈集和导出圈映射的性质与相互关系，并从中抽取出规范性、导出圈映射、反包含性、合成性和遗传性 5 个关键性质，通过这 5 个关键性质提出并证明了闭模糊拟阵的导出圈公理；最后得到：只要满足上述 5 个关键性质，可以用有限数列、子集族和该集族上的映射唯一确定一个闭模糊拟阵，反之也然. 可以预见，利用这个公理，可以在闭模糊拟阵的理论研究、设计构造、实例应用等多方面开展进一步工作.

关　键　词： 拟阵；圈公理；模糊拟阵；导出圈集；导出圈映射；导出圈公理

中图分类号：O159　　**文献标志码：A**　　**文章编号：** 1000-5471(2021)08-0010-08

文献[1]将模糊集合引入拟阵理论，提出了模糊拟阵的概念(部分学者称为 G-V 模糊拟阵[2]). 后来，文献[3]将完全分配格应用于模糊集合和模糊化拟阵，开始了格值模糊拟阵的研究. 根据文献[4]，拟阵有许多等价刻画，比如基公理、独立集公理和圈公理等，对拟阵的研究起着重要作用. 在模糊拟阵中，是否也存在类似的等价刻画?文献[5-6]对此做了一些探索. 文献[6-8]对模糊圈和导出拟阵圈做了许多深入的研究，使我们想到：是否能够通过导出拟阵圈来找到模糊拟阵的一个等价刻画？这就是本文所要研究的工作.

1　预备知识

设 $E=\{x_1, x_2, \cdots, x_N\}$ 是非空有限集合，则 E 上的模糊集 μ 是一个映射 $\mu: E \longrightarrow [0, 1]$. E 上模糊集的全体记为 $F(E)$. 本文使用的模糊数学有关的概念和符号主要参照文献[1]，有关拟阵的理论主要参照文献[4].

定理 1[4](圈公理)　设 $\boldsymbol{C}$ 是 E 的子集族，则 $\boldsymbol{C}$ 是 E 上某个拟阵 $\boldsymbol{M}=(E, I)$ 全部圈组成的集合(称为圈集)的充要条件是 $\boldsymbol{C}$ 满足下面两条：

(C1) 如果 $C_1, C_2 \in \boldsymbol{C}$ 且 $C_1 \subseteq C_2$，则 $C_1 = C_2$；

(C2) 如果 $C_1, C_2 \in \boldsymbol{C}$ 且 $C_1 \neq C_2$，$x \in C_1 \cap C_2$，则有 $C_3 \in \boldsymbol{C}$ 使得 $C_3 \subseteq (C_1 \cup C_2) \backslash \{x\}$.

此时，$I=\{X \subseteq E \mid \forall C \in \boldsymbol{C}$，都有 $C \nsubseteq X\}$. 要注意到两种极端情况：一是 $\boldsymbol{C}=\varnothing \Leftrightarrow I=\{X \mid X \subseteq E\}$；二是 $\boldsymbol{C} \supseteq \{\{x\} \mid \forall x \in E\} \Leftrightarrow I=\varnothing$.

文献[1]首次给出了模糊拟阵的定义：

定义 1[1]　设 $\ell \subseteq F(E)$ 是满足下列条件的非空模糊集族：

(a)(继承性) 若 $\mu \in \ell$，$v \in F(E)$，$v \leqslant \mu$，则 $v \in \ell$；

(b)(交换性) 若 $\mu, v \in \ell$，$|\operatorname{supp} \mu| < |\operatorname{supp} v|$，则存在 $\omega \in \ell$ 使得：

---

① 收稿日期：2020-06-07

基金项目：国家自然科学基金项目(61374078).

作者简介：吴德垠，教授，主要从事模糊拟阵的研究.

(b1) $\mu < \omega \leqslant \mu \vee v$,

(b2) $m(\omega) \geqslant \min\{m(\mu), m(v)\}$.

则称偶对 $\boldsymbol{M}=(E, \ell)$ 是 E 上的模糊拟阵，ℓ 称为 $\boldsymbol{M}$ 的模糊独立集族. $\forall \mu \in F(E)$，如果 $\mu \in \ell$，则称 μ 为 $\boldsymbol{M}$ 的模糊独立集. 否则，称 μ 为 $\boldsymbol{M}$ 的模糊相关集. $\boldsymbol{M}$ 的最大模糊独立集称为 $\boldsymbol{M}$ 的模糊基. 如果 μ 是 $\boldsymbol{M}$ 的模糊相关集，但 $\forall \alpha \in \operatorname{supp} \mu$ 都有 $\mu \backslash\backslash a \in \ell$，则称 μ 是 $\boldsymbol{M}$ 的模糊圈. 如果 μ 是 $\boldsymbol{M}$ 的模糊圈且 $|\operatorname{supp} \mu| = 1$，则称 μ 是 $\boldsymbol{M}$ 的模糊环. 若有 $r \in (0, 1]$，使得 $\mu = \omega(\operatorname{supp} \mu, r)$，则称 μ 是 $\boldsymbol{M}$ 的初等模糊圈.

中国部分学者称这种模糊拟阵为 G-V 模糊拟阵[2]. 我们的讨论就是针对这种模糊拟阵来进行的. 因此，为了简化叙述，后面提到的模糊拟阵都是指 G-V 模糊拟阵.

文献[1]将模糊拟阵和普通拟阵关联起来，可以看作将模糊拟阵分解为拟阵. 以定理形式表述如下：

定理 2[1]（分解定理）　设 $\boldsymbol{M}=(E, \ell)$ 是模糊拟阵，$\forall r \in (0, 1]$，令 $I_r = \{C_r(\mu) \mid \forall \mu \in \ell\}$，则 $M_r = (E, I_r)$ 是 E 上的拟阵，而且有有限实数列 $r_0 < r_1 < \cdots < r_n$，使得：

(i) $r_0 = 0$, $r_n \leqslant 1$;

(ii) 当 $0 < r \leqslant r_n$ 时 $I_r \neq \varnothing$，当 $r > r_n$ 时 $I_r = \varnothing$;

(iii) $\forall s, t \in (r_i, r_{i+1})$，有 $I_s = I_t (0 \leqslant i \leqslant n-1)$;

(iv) 若 $r_i < s < r_{i+1} < t < r_{i+2}$，则 $I_s \supset I_t (0 \leqslant i \leqslant n-2)$.

称序列 $0 = r_0 < r_1 < \cdots < r_n \leqslant 1$ 为 $\boldsymbol{M}$ 的基本序列.

对正整数 $i = 1, 2, \cdots, n$，设 $\bar{r_i} = \dfrac{1}{2}(r_{i-1} + r_i)$，称拟阵序列

$$M_{\bar{r}_1} = (E, I_{\bar{r}_1}) \supset \cdots \supset M_{\bar{r}_n} = (E, I_{\bar{r}_n})$$

为 $\boldsymbol{M}$ 的导出拟阵序列. 若 $I_{r_i} = I_{\bar{r}_i} (i = 1, 2, \cdots, n)$，则称 $\boldsymbol{M}$ 是闭模糊拟阵[1].

$\forall r \in (0, 1]$，称 $M_r = (E, I_r)$ 是 $\boldsymbol{M}$ 的 r -导出拟阵，M_r 的圈称为 $\boldsymbol{M}$ 的导出圈（或导出拟阵圈）. 令 $\mathscr{C} = \{X \subseteq E \mid$ 存在 $r \in (0, 1]$，使得 X 是 M_r 的圈$\}$，称其为 $\boldsymbol{M}$ 的导出圈集（导出拟阵圈集）.

由文献[1]的定理 1.8，$\forall \mu \in F(E)$，$\mu \in \ell$ 当且当 $\forall r \in (0, 1]$，$C_r(\mu) \in I_r$.

受文献[1]中定理 2.3 的启发，文献[9]的定理 2.8 可以看作定理 2 在闭模糊拟阵中的逆.

定理 3[9]（合成定理）　设 $M_i = (E, I_i) (i = 1, 2, \cdots, m)$ 是 E 上的拟阵序列，使得 $I_1 \supseteq I_2 \supseteq \cdots \supseteq I_m$，取 $0 = \delta_0 < \delta_1 < \delta_2 < \cdots < \delta_m \leqslant 1$，令

$$\psi = \{\mu \in F(E) \mid \forall r \in (0, 1],\ 有\ C_r(\mu) \in I_r\}$$

其中：$r \in (\delta_{i-1}, \delta_i]$ 时，$I_r = I_i (i = 1, 2, \cdots, m)$；$\delta_m < 1$，$r \in (\delta_m, 1]$ 时，$I_r = \varnothing$. 则：

(i) $\boldsymbol{M} = (E, \psi)$ 是闭模糊拟阵；

(ii) 保留 $I_1 \supseteq I_2 \supseteq \cdots \supseteq I_m$ 中等式成立的下标最大部分，$M_{i_1} = (E, I_{i_1}) \supset M_{i_2} = (E, I_{i_2}) \supset \cdots \supset M_{i_h} = (E, I_{i_h})$ 组成 $\boldsymbol{M}$ 的导出拟阵序列，与之对应地，$0 = \delta_0 < \delta_{i_1} < \delta_{i_2} < \cdots < \delta_{i_h} \leqslant 1$ 为 $\boldsymbol{M}$ 的基本序列.

2　模糊拟阵导出圈的性质

本段重点讨论模糊拟阵导出圈的性质，以便从中找出构造模糊拟阵的方法.

定义 2　设 $\boldsymbol{M} = (E, \ell)$ 是闭模糊拟阵，$0 = r_0 < r_1 < \cdots < r_n = 1$ 为其基本序列，$M_{r_1} \supset M_{r_2} \supset \cdots \supset M_{r_n}$ 为其导出拟阵序列，$\mathscr{C}$ 为其导出圈集.

(a) 定义 $\boldsymbol{M}$ 的初等模糊圈集为 $\varepsilon = \{\mu \in F(E) \mid \mu$ 是 $\boldsymbol{M}$ 的初等模糊圈$\}$；

(b) 定义 $\boldsymbol{M}$ 的模糊圈集为 $\zeta = \{\mu \in F(E) \mid \mu$ 是 $\boldsymbol{M}$ 的模糊圈$\}$；

(c) 当 $\mathscr{C} \neq \varnothing$ 时，定义 $\boldsymbol{M}$ 的导出圈映射为 $\mathscr{C}$ 上的映射 $\tau: \mathscr{C} \longrightarrow \{r_0, r_1, \cdots, r_{n-1}\} \times \{r_1, \cdots, r_n\}$. $\forall C \in \mathscr{C}$，根据文献[10]的定理 3，得到两个非负整数 $i, j (i, j = 0, 1, \cdots, n;\ i < j)$，令 $\tau(C) = (r_i, r_j)$，称 $(r_i, r_j]$ 为 C 的导出圈区间.

对导出拟阵 $M_{r_i} (i = 1, 2, \cdots, n)$，令 $\boldsymbol{C}_{r_i}$ 表示其所有圈组成的圈集. 一般地，$\forall r \in (0, 1]$，记 $\boldsymbol{C}_r$ 为导出拟阵 M_r 的圈集. 下面讨论导出圈、导出圈集和模糊圈之间的关系和性质.

定理 4　闭模糊拟阵 $\boldsymbol{M} = (E, \ell)$ 如定义 2 所设. 则：

(i) $\mathscr{C}=\bigcup\limits_{r\in(0,1]}\boldsymbol{C}_r=\bigcup\limits_{i=1}^{n}\boldsymbol{C}_{r_i}=\{\operatorname{supp}\mu\mid\forall\mu\in\varepsilon\}=\{\operatorname{supp}\mu\mid\forall\mu\in\zeta\}$;

(ii) $\mathscr{C}=\varnothing\Leftrightarrow\varepsilon=\varnothing\Leftrightarrow\zeta=\varnothing\Leftrightarrow F(E)=\ell\Leftrightarrow r_1=1$ 且 $I_1=P(E)$，其中，$P(E)$ 表示 E 的幂集，拟阵 $(E,P(E))$ 称为 E 上的自由拟阵[4]；

(iii) $\forall\mu\in F(E)$，$\mu\in\varepsilon\Leftrightarrow$ 存在 $r\in(0,1]$ 和 $C\in\mathscr{C}$，使得

$$\mu=\omega(C,r),\ \tau(C)=(r_j,r_k)\qquad r\in(r_j,r_k],\ j<k$$

(iv) $\forall\mu\in F(E)$，$R^+(\mu)=\{\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_k\}(0<\beta_1<\beta_2<\cdots<\beta_k\leqslant1)$，则 $\mu\in\zeta\Leftrightarrow$ 存在 $C\in\mathscr{C}$，使得 $\tau(C)=(r_j,r_k)$，$\beta_1\in(r_j,r_k]$ 且 $C_{\beta_i}(\mu)\in I_{\beta_i}(i=2,3,\cdots,k\}(j<k)$；

(v) $\forall r\in(0,1]$，令

$$\boldsymbol{C}_r^*=\{C\in\mathscr{C}\mid\tau(C)=(r_j,r_k)\text{ 且 }r\in(r_j,r_k]\}\qquad j<k$$

则 $\boldsymbol{C}_r^*$ 是导出拟阵 M_r 的圈集(即 $\boldsymbol{C}_r^*=\boldsymbol{C}_r$). 我们称 $\boldsymbol{C}_r(=\boldsymbol{C}_r^*)$ 为 $\boldsymbol{M}$ 的水平为 r 的导出圈集.

证 借用定义 2 的概念和符号.

(i) 使用定理 1、定理 2 和文献[11]的定理 2.5 以及初等模糊圈的概念即可证明.

(ii) 根据(i)知 $\mathscr{C}=\varnothing\Leftrightarrow\varepsilon=\varnothing\Leftrightarrow\zeta=\varnothing$. 下面证明 $F(E)=\ell\Leftrightarrow\zeta=\varnothing$.

如果 $F(E)=\ell$，则 $\forall\mu\in F(E)$，由 $\mu\in\ell$ 知，$\mu\notin\zeta$. 即 $\zeta=\varnothing$.

反之，如果 $\zeta=\varnothing$，若 $F(E)\neq\ell$，当然有 $F(E)\supset\ell$. 取 $\mu\in F(E)\backslash\ell$，则 μ 是模糊相关集. 根据文献[11]的推论 2.7，存在模糊圈 $\nu\in\zeta$ 使得 $\nu\leqslant\mu$，这与 $\zeta=\varnothing$ 矛盾.

故 $F(E)=\ell$.

最后证明 $F(E)=\ell\Leftrightarrow r_1=1$ 且 $I_1=P(E)$.

当 $F(E)=\ell$ 时，根据基本序列的定义有 $r_1\leqslant1$. 若 $r_1<1$，则由定理 2 知 $I_{r_1}\supset I_1$. 取 $X\in I_{r_1}\backslash I_1$，则 $X\notin I_1$. 即 X 是导出拟阵 M_1 的相关集. 根据文献[11]的定理 2.2(ii)知，存在 M_1 的圈 C，使得 $C\subseteq X$. 即 $\mathscr{C}\neq\varnothing$，这与 $F(E)=\ell$ 矛盾. 故只能 $r_1=1$. 同时，由 $F(E)\supseteq P(E)$ 知 $I_1=P(E)$.

如果 $r_1=1$ 且 $I_1=P(E)$，则从 $E\in P(E)=I_1$ 知 $\omega(E,1)\in\ell$，得出

$$\ell\supseteq\{\mu\in F(E)\mid\mu\leqslant\omega(E,1)\}=F(E)$$

故 $F(E)=\ell$.

(iii) 任取 $\mu\in F(E)$，那么若 $\mu\in\varepsilon$，则存在 $r\in(0,1]$ 和 $A\subseteq E$，使得 $\mu=\omega(A,r)$. 根据文献[11]的定理 2.5 知，$\operatorname{supp}\mu=A=C_r(\mu)$ 是 M_r 的圈. 即 $A\in\boldsymbol{C}_r\subseteq\mathscr{C}$. 如果 $\tau(C)=(r_j,r_k)$，则由文献[10]的定理 3 知 $r\in(r_j,r_k]$.

若 $r\in(0,1]$ 和 $C\in\mathscr{C}$，使得 $\mu=\omega(C,r)$. 而且

$$\tau(C)=(r_j,r_k)\qquad r\in(r_j,r_k]$$

由文献[10]的定理 3，$C=C_r(\mu)$ 是 M_r 的圈. 再由文献[11]的定理 2.5 知，$\mu\in\varepsilon$.

(iv) 取 $\mu\in F(E)$，设 $R^+(\mu)=\{\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_k\}(0<\beta_1<\beta_2<\cdots<\beta_k\leqslant1)$，$C=C_{\beta_1}(\mu)$.

如果 $\mu\in\zeta$，则根据文献[11]的定理 2.5，$C_{\beta_i}(\mu)\in I_{\beta_i}(i=2,3,\cdots,k\}$ 且 $C=C_{\beta_1}(\mu)$ 是 M_{β_1} 的圈. 即 $C\in\mathscr{C}$，不妨设 $\tau(C)=(r_j,r_k)$. 再利用文献[10]的定理 3 知 $\beta_1\in(r_j,r_k]$.

如果 $C\in\mathscr{C}$，$\tau(C)=(r_j,r_k)$，$\beta_1\in(r_j,r_k]$. 由文献[10]的定理 3 知，C 是 M_{β_1} 的圈. 结合 $C_{\beta_i}(\mu)\in I_{\beta_i}(i=2,3,\cdots,k\}$ 以及文献[11]的定理 2.5 知 $\mu\in\zeta$.

(v) 显然. $\boldsymbol{C}_r^*\subseteq\mathscr{C}$. 任取 $C\in\boldsymbol{C}_r^*$. 不妨设，$\tau(C)=(r_j,r_k)$. 根据已知 $r\in(r_j,r_k]$，因此由文献[10]的定理 3 知 $C\in\boldsymbol{C}_r$. 即 $\boldsymbol{C}_r^*\subseteq\boldsymbol{C}_r$.

任取 $C'\in\boldsymbol{C}_r$. 由 $C'\in\boldsymbol{C}_r\subseteq\mathscr{C}$，可设 $\tau(C')=(r_j',r_k')$. 由 C' 是 M_r 的圈，结合文献[10]的定理 3 知，必定 $r\in(r_j',r_k']$. 因此，根据 $\boldsymbol{C}_r^*$ 的定义有 $C'\in\boldsymbol{C}_r^*$. 即 $\boldsymbol{C}_r^*\supseteq\boldsymbol{C}_r$.

综上所述，$\boldsymbol{C}_r^*=\boldsymbol{C}_r$.

既然 $\boldsymbol{C}_r^*=\boldsymbol{C}_r$，说明 $\boldsymbol{C}_r^*$ 一定满足圈公理，也是某个拟阵的圈集.

根据定理 4(ii)，我们知道 $\mathscr{C}=\varnothing\Leftrightarrow F(E)=\ell$. 此时，所有模糊子集都是模糊独立集，这是一种平凡情况. 因此，我们排除这种情况，即要求 $\mathscr{C}\neq\varnothing$. 接下来，再讨论导出圈的两个精细性质.

定理 5　闭模糊拟阵 $\boldsymbol{M}=(E,l)$ 如定义 2 所设. 则：

(i) $\forall C,C'\in\mathscr{C}$, $\tau(C)=(r_j, r_k)$, $\tau(C')=(r_j', r_k')$. 若 $C\subseteq C'$ 且 $(r_j, r_k]\cap(r_j', r_k']\neq\varnothing$，则必有 $C=C'$.

(ii) $\forall C,C'\in\mathscr{C}$, $\tau(C)=(r_j, r_k)$, $\tau(C')=(r_j', r_k')$. 若 $C\neq C'$ 且 $(r_j, r_k]\cap(r_j', r_k']\neq\varnothing$，还有 $x\in C\cap C'$，则对 $\forall r\in(r_j, r_k]\cap(r_j', r_k']$，都有 M_r 的圈 $C''\in\boldsymbol{C}_r$，使得 $C''\subseteq(C\cup C')\backslash\{x\}$.

如果 $\tau(C'')=(r_j'', r_k'')$，则 $(r_j, r_k]\cap(r_j', r_k']\cap(r_j'', r_k'']\neq\varnothing$.

证　(i) 任取 $r\in(r_j, r_k]\cap(r_j', r_k']$，从文献[10]的定理 3 知，$C,C'$ 都是 M_r 的圈. 再根据定理 1 的(C1) 知 $C=C'$.

(ii) $\forall C,C'\in\mathscr{C}$, $\tau(C)=(r_j, r_k)$, $\tau(C')=(r_j', r_k')$. 若 $C\neq C'$ 且 $(r_j, r_k]\cap(r_j', r_k']\neq\varnothing$，还有 $x\in C\cap C'$. 则从文献[10]的定理 3 知，C,C' 都是 M_r 的圈. 再由定理 1 的(C2) 知，存在 M_r 的圈 $C''\in\boldsymbol{C}_r$，使得 $C''\subseteq(C\cup C')\backslash\{x\}$.

因为 $\tau(C'')=(r_j'', r_k'')$，C'' 是 M_r 的圈，由文献[10]的定理 3 知 $r\in(r_j'', r_k'']$. 则 $r\in(r_j, r_k]\cap(r_j', r_k']\cap(r_j'', r_k'']$，即 $(r_j, r_k]\cap(r_j', r_k']\cap(r_j'', r_k'']\neq\varnothing$.

下面继续讨论导出圈、导出圈映射和导出圈集的性质.

定理 6　闭模糊拟阵 $\boldsymbol{M}=(E,l)$ 如定义 2 所设，符号 $\boldsymbol{C}_r^*$ 如定理 4(v) 所设. 则 $0=r_0<r_1<\cdots<r_n=1$，且 $\mathscr{C}$ 和 τ 之间有如下性质：

(M1)（规范性）　$\mathscr{C}\neq\varnothing$.

(M2)（导出圈映射）　$\mathscr{C}$ 上有映射 τ：$\mathscr{C}\longrightarrow\{r_0, r_1, \cdots, r_{n-1}\}\times\{r_1, \cdots, r_n\}$. 对 $\forall C\in\mathscr{C}$，有 $\tau(C)=(r_i, r_j)$，满足：

1) $0\leqslant r_i<r_j\leqslant 1$；

2) $\forall r_i\in\{r_1, r_2, \cdots, r_{n-1}\}$，都存在 $C'\in\mathscr{C}$ 和 $\gamma\in\{r_{i+1}, r_{i+2}, \cdots, r_n\}$，使得 $\tau(C')=(r_i, \gamma)$，如果 $r_i=r_n$，则存在 $C'\in\mathscr{C}$ 和 $\gamma\in\{r_0, r_1, \cdots, r_{n-1}\}$，使得 $\tau(C')=(\gamma, r_n)$；

3) $\forall\lambda\in(r_i, r_j]$，都有 $C\in\boldsymbol{C}_\lambda^*$，$\forall\lambda\in(0,1]\backslash(r_i, r_j]$，都有 $C\notin\boldsymbol{C}_\lambda^*$.

(M3)（反包含性）　$\forall C,C'\in\mathscr{C}$, $\tau(C)=(r_j, r_k)$, $\tau(C')=(r_j', r_k')$，若 $C\subseteq C'$ 且 $(r_j, r_k]\cap(r_j', r_k']\neq\varnothing$，则 $C=C'$.

(M4)（合成性）　$\forall C,C'\in\mathscr{C}$, $\tau(C)=(r_j, r_k)$, $\tau(C')=(r_l, r_h)$，若 $C\neq C'$ 且 $(r_j, r_k]\cap(r_l, r_h]\neq\varnothing$，有 $x\in C\cap C'$，则对 $\forall r\in(r_j, r_k]\cap(r_l, r_h]$，都存在 $C''\in\boldsymbol{C}_r^*$，使得 $C''\subseteq(C\cup C')\backslash\{x\}$.

(M5)（遗传性）　如果 $0<s<t\leqslant 1$，则对 $\forall C\in\boldsymbol{C}_s^*$，都存在 $C'\in\boldsymbol{C}_t^*$，使得 $C'\subseteq C$.

证　延用定义 2、定理 4 的符号. 根据定理 4(v) 知，$\boldsymbol{C}_r^*=\boldsymbol{C}_r(\forall r\in(0,1])$.

规范性(M1) 的证明由定理 4 及其后面的讨论即可完成.

从定理 2、文献[10] 的定理 3 和文献[11] 的定理 2.2(ii) 即可证性质(M2) 成立.

由定理 5(i) 即得反包含性(M3) 成立.

由定理 5(ii) 即得合成性(M4) 成立.

从 $0<s<t\leqslant 1$ 知，$I_s\supseteq I_t$. $\forall C\in\boldsymbol{C}_s^*$，则 $C\notin I_s$，更有 $C\notin I_t$. 由文献[11] 的定理 2.2(ii) 知，必有 $C'\in\boldsymbol{C}_t^*=\boldsymbol{C}_t$ 且 $C'\subseteq C$. 因此，遗传性(M5) 成立.

此定理 6 中，要特别注意反包含性(M3) 和遗传性(M5) 的区别.(M3) 的关键在于 C,C' 同为 M_r 的圈.(M5) 的关键是前面的导出拟阵的圈也会是后面的导出拟阵的圈，或真包含后面的导出拟阵的一个圈. 因此，在 $\mathscr{C}$ 中，两个不同的导出圈很可能出现真包含. 如果出现真包含，则其导出圈的区间一定不会相交.

3　闭模糊拟阵的导出圈公理

我们仍然假设 $\boldsymbol{M}=(E,\boldsymbol{l})$ 是闭模糊拟阵，$0=r_0<r_1<\cdots<r_n=1$ 为其基本序列，$M_{r_1}\supset M_{r_2}\supset\cdots\supset M_{r_n}$ 为其导出拟阵序列. 设 $\mathscr{C}$ 和 τ 分别为 $\boldsymbol{M}$ 的导出圈集和导出圈映射.

下面证明，一个 E 的非空子集族、一组 0 到 1 之间的数和一个映射，在满足一定条件时，可以确定一个

模糊拟阵. 为此，先做一些准备工作.

定理 7 设 $\mathscr{Q} \subseteq P(E)$ 是 E 的非空子集族，取数列 $0 = r_0 < r_1 < \cdots < r_n = 1$，有 $\mathscr{Q}$ 上的映射 τ^* : $\mathscr{Q} \longrightarrow \{r_0, r_1, \cdots, r_{n-1}\} \times \{r_1, \cdots, r_n\}$. $\forall r \in (0, 1]$，构造 $\mathscr{Q}$ 的子集:

$$\boldsymbol{C}_r^* = \{C \in \mathscr{Q} \mid \tau^*(C) = (r_i, r_j) \text{ 且 } r \in (r_i, r_j]\} \tag{1}$$

假设 $\mathscr{Q}$，$0 = r_0 < r_1 < \cdots < r_n = 1$ 和 τ^* 满足定理 6 的性质(M1),(M2),(M3),(M4) 和(M5). 则有如下性质:

(i) $\boldsymbol{C}_r^*$ 满足拟阵的圈公理(即定理 1);

(ii) 如果 $r_i < r_j$ 且 $C \in \boldsymbol{C}_{r_i}^* \cap \boldsymbol{C}_{r_j}^*$，则对任意 $r_i \leqslant \gamma \leqslant r_j$，都有 $C \in \boldsymbol{C}_\gamma^*$;

(iii) $\forall i(=1,2,\cdots,n)$, $\forall r \in (r_{i-1}, r_i]$，都有 $\boldsymbol{C}_r^* = \boldsymbol{C}_{r_i}^*$;

(iv) 如果 $0 < r_i < r_j \leqslant 1$，则 $\forall C \in \boldsymbol{C}_{r_i}^*$，都有 $C' \in \boldsymbol{C}_{r_j}^*$，使得 $C' \subseteq C$，一般地，如果 $0 < s < t \leqslant 1$，则 $\forall C \in \boldsymbol{C}_s^*$，都有 $C' \in \boldsymbol{C}_t^*$，使得 $C' \subseteq C$;

(v) 如果 $0 < s < t \leqslant 1$ 且 $\boldsymbol{C}_s^* = \boldsymbol{C}_t^*$，则对任意 $s \leqslant \gamma \leqslant t$，都有 $\boldsymbol{C}_s^* = \boldsymbol{C}_\gamma^* = \boldsymbol{C}_t^*$;

(vi) $\boldsymbol{C}_{r_1}^*, \boldsymbol{C}_{r_2}^*, \cdots, \boldsymbol{C}_{r_n}^*$ 互不相同，而且 $\mathscr{Q} = \boldsymbol{C}_{r_1}^* \cup \boldsymbol{C}_{r_2}^* \cup \cdots \cup \boldsymbol{C}_{r_n}^*$.

证 首先，由性质(M1)知，映射 τ^* 有意义.

(i) 证明 $\boldsymbol{C}_r^*$ 满足定理 1 的(C1) 和(C2).

如果 $\boldsymbol{C}_r^* = \varnothing$，$\boldsymbol{C}_r^*$ 当然满足定理 1 的(C1) 和(C2). 下面讨论 $\boldsymbol{C}_r^* \neq \varnothing$ 的情况.

1) $\forall C, C' \in \boldsymbol{C}_r^*$，设

$$\tau^*(C) = (r_j, r_k) \qquad \tau^*(C') = (r_l, r_h)$$

若 $C \subseteq C'$，则从 C，$C' \in \boldsymbol{C}_r^*$ 和(1) 式知 $r \in (r_j, r_k] \cap (r_l, r_h]$，即$(r_j, r_k] \cap (r_l, r_h] \neq \varnothing$. 由定理 6 的性质(M3) 知 $C = C'$. 因此，$\boldsymbol{C}_r^*$ 满足(C1).

2) $\forall C, C' \in \boldsymbol{C}_r^*$，若 $C \neq C'$ 和 $x \in C \cap C'$. 不妨设

$$\tau*(C) = (r_j, r_k) \qquad \tau*(C') = (r_l, r_h)$$

由(1) 式知 $r \in (r_j, r_k] \cap (r_l, r_h]$. 根据性质(M4)知，存在 $C'' \in \boldsymbol{C}_r^*$，使得 $C'' \subseteq (C \cup C') \backslash \{x\}$. 所以，$\boldsymbol{C}_r^*$ 满足(C2).

故 $\boldsymbol{C}_r^*$ 满足拟阵的圈公理. 即 $\boldsymbol{C}_r^*$ 是 E 上某个拟阵 $M_r^* = (E, I_r^*)$ 的圈集. 而且，根据圈公理有

$$I_r^* = \{X \subseteq E \mid \forall C \in \boldsymbol{C}_r^*, C \not\subseteq X\} \tag{2}$$

(ii) 直接用(1) 式即知 $r_i < r_j$ 且 $C \in \boldsymbol{C}_{r_i}^* \cap \boldsymbol{C}_{r_j}^*$，则对任意 $r_i \leqslant \gamma \leqslant r_j$，都有 $C \in \boldsymbol{C}_\gamma^*$.

(iii) 从 $\boldsymbol{C}_r^*$ 的定义和(1) 式即可证明 $\boldsymbol{C}_r^* = \boldsymbol{C}_{r_i}^*$.

(iv) 根据遗传性(M5) 即知结论成立.

(v) 根据(1),(2) 式和性质(M5)，可以证明 $\boldsymbol{C}_s^* = \boldsymbol{C}_\gamma^* = \boldsymbol{C}_t^*$.

(vi) 首先证明 $\boldsymbol{C}_{r_1}^*, \boldsymbol{C}_{r_2}^*, \cdots, \boldsymbol{C}_{r_n}^*$ 互不相同. 反证，若有某两个子集合相同，不妨设 $\boldsymbol{C}_{r_i}^* = \boldsymbol{C}_{r_j}^* (r_i < r_j)$. 根据性质(M2) 的 2)，有 $C \in \mathscr{Q}$ 和 $\gamma \in \{r_{i+1}, \cdots, r_n\}$，使得 $\tau^*(C) = (r_i, \gamma)$.

首先讨论 $r_{i+1} = r_j$ 时的情况. 如果 $\tau^*(C) = (r_i, \gamma)$，则有 $r_i < r_{i+1} = r_j \leqslant \gamma$. 从 $r_j \in (r_i, \gamma]$，得到 $C \in C_{r_j}^*$. 从已知有 $\boldsymbol{C}_{r_i}^* = \boldsymbol{C}_{r_j}^*$，因此 $C \in C_{r_i}^*$. 然而，从性质(M2) 的 3) 和 $r_i \in [0, 1] \backslash (r_i, \gamma]$ 知 $C \notin C_{r_i}^*$，矛盾.

再讨论 $r_{i+1} < r_j$ 时的情况. 根据 $\boldsymbol{C}_{r_i}^* = \boldsymbol{C}_{r_j}^*$，得出 $\boldsymbol{C}_{r_i}^* = \boldsymbol{C}_{r_{i+1}}^* = \boldsymbol{C}_{r_j}^*$. 但根据 $r_{i+1} = r_j$ 时情形的讨论知 $\boldsymbol{C}_{r_i}^* \neq \boldsymbol{C}_{r_{i+1}}^*$，即 $\boldsymbol{C}_{r_i}^* \neq \boldsymbol{C}_{r_j}^*$，矛盾.

综上所述，$\boldsymbol{C}_{r_1}^*, \boldsymbol{C}_{r_2}^*, \cdots, \boldsymbol{C}_{r_n}^*$ 互不相同.

最后证明 $\mathscr{Q} = \boldsymbol{C}_{r_1}^* \cup \boldsymbol{C}_{r_2}^* \cup \cdots \cup \boldsymbol{C}_{r_n}^*$. 显然 $\mathscr{Q} \supseteq \boldsymbol{C}_{r_1}^* \cup \boldsymbol{C}_{r_2}^* \cup \cdots \cup \boldsymbol{C}_{r_n}^*$. 任取 $C \in \mathscr{Q}$，根据性质(M2) 中 τ^* 的定义知，必有 $r_i, r_j \in \{r_0, r_1, \cdots, r_n\}$，使得 $\tau^*(C) = (r_i, r_j)$. 则由性质(M2) 的 3) 知 $C \in \boldsymbol{C}_{r_j}^*$. 所以 $\mathscr{Q} \subseteq \boldsymbol{C}_{r_1}^* \cup \boldsymbol{C}_{r_2}^* \cup \cdots \cup \boldsymbol{C}_{r_n}^*$.

综上所述，$\mathscr{Q} = \boldsymbol{C}_{r_1}^* \cup \boldsymbol{C}_{r_2}^* \cup \cdots \cup \boldsymbol{C}_{r_n}^*$.

我们利用定理 7 证明: 当一个子集族、一组数和一个映射满足某些性质时，能够确定唯一的闭模糊拟阵.

定理 8　设 $\mathscr{Q}\subseteq P(E)$ 是 E 的非空子集族，取数列 $0=r_0<r_1<\cdots<r_n=1$，有 $\mathscr{Q}$ 上的映射 $\tau^*:\mathscr{Q}\longrightarrow\{r_0,r_1,\cdots,r_{n-1}\}\times\{r_1,\cdots,r_n\}$. $\forall r\in(0,1]$，通过(1)式，构造 $\mathscr{Q}$ 的子集 $\boldsymbol{C}_r^*$. 假设 $\mathscr{Q}$，$0=r_0<r_1<\cdots<r_n=1$ 和 τ^* 满足定理 6 的性质(M1)，(M2)，(M3)，(M4) 和(M5). 则：

(i) 由(2)式能够得到一个拟阵序列

$$M_{r_1}^*=(E,I_{r_1}^*)\supset M_{r_2}^*=(E,I_{r_2}^*)\supset\cdots\supset M_{r_n}^*=(E,I_{r_n}^*)\tag{3}$$

(ii) 通过数列 $0=r_0<r_1<\cdots<r_n=1$ 和(3)式，利用定理 3 能够得到一个闭模糊拟阵 $\boldsymbol{M}=(E,\ell)$；

(iii) 闭模糊拟阵 $\boldsymbol{M}=(E,\ell)$ 的基本序列是 $0=r_0<r_1<\cdots<r_n=1$，导出拟阵序列是(3)式，导出圈集是 $\mathscr{Q}$ 和导出圈映射是 τ^*；

(iv) 如果闭模糊拟阵 $\boldsymbol{M}'=(E,\ell')$ 的基本序列也是 $0=r_0<r_1<\cdots<r_n=1$，导出圈集是 $\mathscr{Q}$ 和导出圈映射是 τ^*，则 $\boldsymbol{M}'=\boldsymbol{M}$.

证　(i) 根据定理 7(i)，$M_{r_i}^*=(E,I_{r_i}^*)(i=1,2,\cdots,n)$ 都是 E 上的拟阵. 再由定理 7(vi) 知，这 n 个拟阵互不相同. 下面证明它们之间有包含关系.

任取 $r_i\in\{r_1,\cdots,r_{n-1}\}$，考察 $M_{r_i}^*=(E,I_{r_i}^*)$ 与 $M_{r_{i+1}}^*=(E,I_{r_{i+1}}^*)$. 它们的圈集分别为 $\boldsymbol{C}_{r_i}^*$ 与 $\boldsymbol{C}_{r_{i+1}}^*$. 根据拟阵圈公理有

$$I_{r_i}^*=\{X\subseteq E\mid\forall C\in\boldsymbol{C}_{r_i}^*,C\nsubseteq X\}\}$$

$$I_{r_{i+1}}^*=\{X\subseteq E\mid\forall C\in\boldsymbol{C}_{r_{i+1}}^*,C\nsubseteq X\}$$

从 $r_i<r_{i+1}$ 和定理 7(iv) 知，$\forall C\in\boldsymbol{C}_{r_i}^*$，都有 $C'\in\boldsymbol{C}_{r_{i+1}}^*$，使得 $C'\subseteq C$.

任取 $X\in I_{r_{i+1}}^*$，如果有某个 $C\in\boldsymbol{C}_{r_i}^*$，使得 $C\subseteq X$，则有某个 $C'\in\boldsymbol{C}_{r_{i+1}}^*$，使得 $C'\subseteq X$，这与 $I_{r_{i+1}}^*$ 的定义矛盾.

因此，$\forall C\in\boldsymbol{C}_{r_i}^*$，都有 $C\nsubseteq X$. 所以 $X\in I_{r_i}^*$，即 $I_{r_{i+1}}^*\subseteq I_{r_i}^*$.

再结合 $M_{r_i}^*\neq M_{r_{i+1}}^*$ 知

$$M_{r_1}^*=(E,I_{r_1}^*)\supset M_{r_2}^*=(E,I_{r_2}^*)\supset\cdots\supset M_{r_n}^*=(E,I_{r_n}^*)$$

(ii) 由数列 $0=r_0<r_1<\cdots<r_n=1$，(3) 式和定理 3，得到闭模糊拟阵 $\boldsymbol{M}=(E,\ell)$，其模糊独立集族定义为

$$\ell=\{\mu\in F(E)\mid\forall r\in(0,1],C_r(\mu)\in I_r\}\tag{4}$$

其中，若 $r\in(r_{i-1},r_i](i=1,2,\cdots,n)$，则 $I_r=I_{r_i}^*$(注意此时 $r_n=1$).

(iii) 由于(3)式是严格包含关系，因此，根据定理 3，$\boldsymbol{M}=(E,\ell)$ 的基本序列是 $0=r_0<r_1<\cdots<r_n=1$，导出拟阵序列是(3)式.

一般地，$\forall r\in(0,1]$，总有某个 $i(=1,2,\cdots,n)$，使得 $r\in(r_{i-1},r_i]$. 因此，$\boldsymbol{M}$ 的 r -导出拟阵是 $M_r=M_{r_i}^*=M_r^*$(M_r^* 由(2)式定义). 因此，其圈集为 $\boldsymbol{C}_r=\boldsymbol{C}_{r_i}^*=\boldsymbol{C}_r^*$.

由 $M_{r_i}^*(i=1,2,\cdots,n)$ 的圈集为 $\boldsymbol{C}_{r_i}^*$，再结合定理 7(vi)，得到 $\mathscr{Q}=\boldsymbol{C}_{r_1}^*\cup\boldsymbol{C}_{r_2}^*\cup\cdots\cup\boldsymbol{C}_{r_n}^*$. 利用定理 4(i) 知，$\mathscr{Q}$ 是 $\boldsymbol{M}$ 的导出圈集.

假设 $\tau:\mathscr{Q}\longrightarrow\{r_0,r_1,\cdots,r_{n-1}\}\times\{r_1,\cdots,r_n\}$ 是 $\boldsymbol{M}$ 的导出圈映射. $\forall C\in\mathscr{Q}$，我们证明 $\tau(C)=\tau^*(C)$. 分别假设 $\tau(C)=(r_i,r_j)$，$\tau^*(C)=(r_k,r_l)$.

1) 按照导出圈映射 τ 的定义，$\forall r\in(r_i,r_j]$，C 都是 M_r^* 的圈. 即 $C\in\boldsymbol{C}_r^*$；$\forall r\in[0,1]\backslash(r_i,r_j]$，$C$ 都不是 M_r^* 的圈. 即 $C\notin\boldsymbol{C}_r^*$.

2) 按照 τ^* 的定义，满足性质(M2) 的 3)，$\forall\lambda\in(r_k,r_l]$，都有 $C\in\boldsymbol{C}_\lambda^*$；$\forall\lambda\in[0,1]\backslash(r_k,r_l]$，都有 $C\notin\boldsymbol{C}_\lambda^*$.

1) 和 2) 要同时成立，必定$(r_i,r_j]=(r_k,r_l]$，因此，$\tau(C)=\tau^*(C)$. 故 τ^* 是 $\boldsymbol{M}$ 的导出圈映射.

(iv) 闭模糊拟阵 $\boldsymbol{M}'=(E,\ell')$ 的基本序列是 $0=r_0<r_1<\cdots<r_n=1$，导出圈集是 $\mathscr{Q}$ 和导出圈映射是 τ^*. 设 $\boldsymbol{M}'=(E,\ell')$ 的导出拟阵序列为

$$M_{r_1}=(E,I_{r_1})\supset M_{r_2}=(E,I_{r_2})\supset\cdots\supset M_{r_n}=(E,I_{r_n})$$

$\forall r\in(0,1]$，设 $\boldsymbol{C}_r$ 是 $\boldsymbol{M}'$ 的水平为 r 的导出圈集(即 M_r 的圈集). 则由定理 4(v) 知，$\boldsymbol{C}_r=$

$\{C \in \mathscr{Q} \mid \tau(C) = \tau^{*}(C) = (r_j, r_k)$ 且 $r \in (r_j, r_k]\}$. 再由(1)式知 $\boldsymbol{C}_r = \boldsymbol{C}_r^{*}$. 得出 $\boldsymbol{C}_{r_i} = \boldsymbol{C}_{r_i}^{*}$ $(i=1,2,\cdots,n)$. 通过拟阵的圈公理，得到 $M_{r_i} = M_{r_i}^{*}$. 因此，$\boldsymbol{M}' = (E, \iota')$ 的导出拟阵序列也是(3)式.

因为 $\boldsymbol{M}$ 和 $\boldsymbol{M}'$ 都是闭模糊拟阵，而且它们的基本序列和导出拟阵序列也都相同，所以利用文献[9]的命题 2.4 知 $\boldsymbol{M} = \boldsymbol{M}'$.

通过以上的讨论，现在得出本文的主要结论.

定理 9(闭 G-V 模糊拟阵导出圈公理)　设 $\mathscr{Q} \subseteq P(E)$ 是 E 的非空子集族，取数列 $0 = r_0 < r_1 < \cdots < r_n = 1$，取 $\mathscr{Q}$ 上的映射 $\tau^{*}: \mathscr{Q} \longrightarrow \{r_0, r_1, \cdots, r_{n-1}\} \times \{r_1, \cdots, r_n\}$. 则有某个闭模糊拟阵 $\boldsymbol{M} = (E, \iota)$，使得 $\boldsymbol{M}$ 的基本序列是 $0 = r_0 < r_1 < \cdots < r_n = 1$，导出圈集是 $\mathscr{Q}$ 和导出圈映射是 τ^{*} 的充要条件是 $\mathscr{Q}$、$0 = r_0 < r_1 < \cdots < r_n = 1$ 和 τ^{*} 满足性质(M1),(M2),(M3),(M4)和(M5).

定理 9 的必要性可从定理 6 得出，充分性可从定理 8 得出.

已知闭模糊拟阵 $\boldsymbol{M} = (E, \iota)$，通过定理 2 可以得出 $\boldsymbol{M}$ 的基本序列是 $0 = r_0 < r_1 < \cdots < r_n = 1$ 和导出拟阵序列. 从导出拟阵序列和定理 4(i)可以计算出导出圈集 $\mathscr{C}$. 最后，由定义 2 和文献[10]的定理 3 可以找出导出圈映射 τ，同时，它们满足性质(M1),(M2),(M3),(M4)和(M5).

反过来，已知非空子集族 $\mathscr{Q}$、数列 $0 = r_0 < r_1 < \cdots < r_n = 1$ 和映射 τ^{*} 满足性质(M1),(M2),(M3),(M4)和(M5)，怎么去找到一个闭模糊拟阵，使其基本序列、导出圈集和导出圈映射分别是 $0 = r_0 < r_1 < \cdots < r_n = 1$，$\mathscr{Q}$ 和 τ^{*}？其实，利用定理 8 就可以设计出找到这种闭模糊拟阵的算法.

最后，讨论导出拟阵圈公理在理论方面的一个应用例子.

文献[12]的定义 3 定义了模糊拟阵的圈好性，这种圈好性利用本文的概念和符号可以描述为：$\forall C \subseteq E(|C| > 1)$，若有 $C \in C_{r_i}$，则必有 $C \in C_{r_1}$. 即圈好性可简单概括为：任何非环的导出圈都是导出拟阵 M_{r_1} 的圈.

我们用导出圈映射可以得到准模糊图拟阵[12]的一个充要条件.

定理 10　设 $\boldsymbol{M} = (E, \iota)$ 是闭模糊拟阵，则 $\boldsymbol{M}$ 是准模糊图拟阵的充要条件是 $\boldsymbol{M}$ 的导出圈映射 τ 具有如下性质：$\forall C \in \mathscr{C}$，只要 $|C| > 1$，都有 $r_i \in \{r_1, r_2, \cdots, r_n\}$，使得 $\tau(C) = (0, r_i)$.

我们根据准模糊图拟阵的定义、文献[10]的命题 1 和文献[10]的定理 3，容易证明定理 10.

我们使用定理 9 的描述方法来表达定理 10，可以得到准模糊图拟阵导出圈公理.

定理 11(准模糊图拟阵导出圈公理)　设 $\mathscr{Q} \subseteq P(E)$ 是 E 的子集族，取数列 $0 = r_0 < r_1 < \cdots < r_n = 1$，有 $\mathscr{Q}$ 上的映射 $\tau^{*}: \mathscr{Q} \longrightarrow \{r_0, r_1, \cdots, r_{n-1}\} \times \{r_1, \cdots, r_n\}$. 则有某个准模糊图拟阵 $\boldsymbol{M} = (E, \iota)$，使得 $\boldsymbol{M}$ 的基本序列是 $0 = r_0 < r_1 < \cdots < r_n = 1$，导出圈集是 $\mathscr{Q}$ 和导出圈映射是 τ^{*} 的充要条件是 $\mathscr{Q}$，$0 = r_0 < r_1 < \cdots < r_n = 1$ 和 τ^{*} 满足性质(M1),(M2)*,(M3),(M4)和(M5). 其中性质(M2)* 是在(M2)的基础上，增强条件而成，可表述为：(M2)的 2),3)和如下的 1)*：

1)* $0 \leqslant r_i < r_j \leqslant 1$. 当 $|C| > 1$ 时，有 $\tau^{*}(C) = (0, r_j)$.

证　首先证明必要性. 设 $\boldsymbol{M} = (E, \iota)$ 是准模糊图拟阵，$\mathscr{Q}$，$0 = r_0 < r_1 < \cdots < r_n = 1$ 和 τ^{*} 分别为其导出圈集、基本序列和导出圈映射. 则根据定理 9，$\mathscr{Q}$，$0 = r_0 < r_1 < \cdots < r_n = 1$ 和 τ^{*} 满足性质(M1),(M2),(M3),(M4)和(M5).

(M2)* 的 2)和 3)自然成立，主要考察(M2)* 的 1)*.

根据定理 10，$\forall C \in \mathscr{Q}$，只要 $|C| > 1$，都有 $r_k \in \{r_1, r_2, \cdots, r_n\}$，使得 $\tau^{*}(C) = (0, r_k)$. 所以 $\tau^{*}(C) = (0, r_k) = (r_i, r_j)$，即 $\tau^{*}(C) = (0, r_j)$. 故性质(M2)* 成立.

再考察充分性. 从性质(M2)* 可以看出，若(M2)* 成立，则(M2)自然成立. 因此，根据定理 9，有闭模糊拟阵 $\boldsymbol{M}$，其基本序列是 $0 = r_0 < r_1 < \cdots < r_n = 1$，导出圈集是 $\mathscr{Q}$ 和导出圈映射是 τ^{*}. 再由性质(M2)* 的 1)* 和定理 10 知，$\boldsymbol{M}$ 是准模糊图拟阵.

参考文献：

[1]　GOETSCHEL R, VOXMAN W. Fuzzy Matroids [J]. Fuzzy Sets And Systems, 1988, 27(3): 291-302.

[2]　LI X N, LIU S Y, LI S G. Connectedness of Refined Goetschel-Voxman Fuzzy Matroids [J]. Fuzzy Sets and Systems,

2010，161(20)：2709-2723.
[3] 史福贵. 格值模糊拟阵的研究进展 [J]. 模糊系统与数学，2012，26(6)：1-13.
[4] 刘桂真，陈庆华. 拟阵 [M]. 长沙：国防科技大学出版社，1994.
[5] WU D Y，LI Y H. The Induced Basis Axioms for a Closed G-V Fuzzy Matroid [J]. Journal of Intelligent and Fuzzy Systems，2021，40(1)：1037-1049.
[6] 吴德垠，杨高进. 闭 G-V 模糊拟阵的模糊圈公理 [J]. 吉林大学学报(理学版)，2020，58(2)：239-250.
[7] 吴德垠. 闭模糊拟阵模糊圈的极值问题 [J]. 模糊系统与数学，2020，34(2)：1-14.
[8] 吴德垠. G-V 模糊拟阵模糊圈的极值问题 [J]. 东北师大学报(自然科学版)，2020，52(2)：9-18.
[9] 吴德垠. 模糊横贯拟阵的再研究 [J]. 模糊系统与数学，2019，33(3)：1-18.
[10] 吴德垠，杨高进. 闭模糊拟阵圈函数和圈区间的推广 [J]. 西南大学学报(自然科学版)，2020，42(2)：36-40.
[11] GOETSCHEL R，VOXMAN W. Fuzzy Circuits [J]. Fuzzy Sets and Systems，1989，32(1)：35-43.
[12] 吴德垠. 一个准模糊图拟阵的新特征 [J]. 西南大学学报(自然科学版)，2018，40(2)：35-39.

The Induced Circuit Axioms of Closed G-V Fuzzy Matroids

WU De-yin

School of Mathematics and Statistics，Chongqing University，Chongqing 401331，China

Abstract：In this paper，fuzzy matroids has been studied by matroids，and the necessary and sufficient conditions for the closed fuzzy matroids been obtained. A finite number sequence，a subset family and a mapping describe the necessary and sufficient conditions. Firstly，according to the consistency of induced circuits for a fuzzy matroid，the article defines the induced circuit mapping. Then，in a closed fuzzy matroid，the properties and relations among the fundamental sequence，the set of induced circuits and the induced circuit mapping have been discussed in detail. The five key properties of normalizations，induced circuit mappings，anti-inclusions，syntheses and heredity have been extracted. Through these five key properties，the induced circuit axioms of closed fuzzy matroids have been proposed and proved. By these axioms，a set of finite numbers，a family of subsets and a mapping can uniquely determine a closed fuzzy matroid as long as the above five key properties are satisfied. And vice versa. It can be foreseen that，through this axiom，further works can be done for theoretical studies，design structures and example applications in close fuzzy matroids.

Key words：matroids；circuits axioms；fuzzy matroids；sets of induced circuits；induced circuit mappings；induced circuit axioms

责任编辑　廖　坤