第 46 卷 第 8 期　西南师范大学学报(自然科学版)　2021 年 8 月
Vol. 46 No. 8　Journal of Southwest China Normal University (Natural Science Edition)　Aug. 2021

DOI:10.13718/j.cnki.xsxb.2021.08.004

3 个 Toeplitz 算子的乘积①

李永宁[1,2]，　梁焕超[1]，　丁宣浩[1,2]

1. 重庆工商大学 数学与统计学院，重庆 400067；2. 经济社会应用统计重庆市重点实验室，重庆 400067

摘要：研究了 Hardy 空间上 3 个甚至任意有限多个 Toeplitz 算子的乘积问题. 完全刻画了在何种条件下 3 个 Toeplitz 算子的乘积是 Toeplitz 算子，并且给出了 3 个甚至任意有限多个 Toeplitz 算子的乘积是 Hankel 算子的充分必要条件，这里的 Hankel 算子是定义在 Hardy 空间到其自身的算子.

关　键　词：Toeplitz 算子；Hankel 算子；Hardy 空间；乘积

中图分类号：O177.1　　**文献标志码：A**　　**文章编号：**1000-5471(2021)08-0018-06

记 D 是复平面 $\mathbb{C}$ 上的开单位圆盘，∂D 是单位圆周. 记 $\mathrm{d}\theta$ 为 ∂D 上的弧长测度，$L^2(\partial D)$ 表示由 $\dfrac{\mathrm{d}\theta}{2\pi}$ 诱导的 Lebesgue 空间. Hardy 空间 H^2 是由 D 上满足条件

$$\| f \|_2^2 = \sup_{0<r<1} \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} | f(re^{i\theta}) |^2 \mathrm{d}\theta < \infty$$

的解析函数 f 在 $\| \cdot \|_2$ 范数下构成的赋范线性空间.

H^∞ 表示 D 上的有界解析函数空间，且 $\| f \|_\infty = \sup\limits_{0<r<1} \{ | f(z) | : z \in D\}$. 根据 Riesz 定理和 Fatou 定理[1]，H^p 等距同构于 $L^p(\partial D)$ 的一个闭子空间. 本文在不加说明的情况下，将 H^2 视为 $L^2(\partial D)$ 的一个闭子空间，将 $L^p(\partial D)(0<p<\infty)$ 简记为 L^p.

设 $P: L^2 \longrightarrow H^2$ 为正交投影算子，对 $\varphi \in L^\infty$，$f \in H^2$，Hardy 空间 H^2 上以 φ 为符号的 Toeplitz 算子与 Hankel 算子分别定义为

$$T_\varphi f = P(\varphi f) \qquad H_\varphi f = P(U\varphi f)$$

这里 $Uf(w) = \overline{w}\widetilde{f}(w)$ 为酉算子，$\widetilde{f}(w) = f(\overline{w})$. 经简单计算可知 $UP = (I-P)U$. 根据 Hankel 算子的定义可知 $H_f^* = H_{f^*}$，这里 $f^* = \overline{f}(\overline{w})$，而且对于任意的 $\varphi \in H^\infty$，总有 $H_\varphi = 0$.

Toeplitz 算子与 Hankel 算子之间有下述密切的代数关系：对任意的 $f, g \in L^\infty$，

$$T_{fg} - T_f T_g = H_{\tilde{f}} H_g$$
$$H_{fg} = H_f T_g + T_{\tilde{f}} H_g$$

如果 $f \in H^\infty$，则有

$$T_{\tilde{f}} H_g = H_{fg} = H_g T_f$$

在 Hardy 空间上，与研究单个 Toeplitz 算子的性质相比，研究 Toeplitz 算子的乘积的情况要困难得多[2]. 而且在 Toeplitz 算子的代数运算中，2 个 Toeplitz 算子乘积的结果很难推广到 3 个或以上的 Toeplitz

① 收稿日期：2020-03-31
基金项目：国家自然科学基金项目(11871122)；重庆市自然科学基金项目(cstc2018jcyjAX0595，cstc2020jcyj-msxmX0318)；重庆工商大学基金项目(2053010,2020316).
作者简介：李永宁，讲师，博士研究生，主要从事函数空间上的算子理论的研究.
通信作者：丁宣浩，教授.

算子乘积的情况[3]．在 Hardy 空间上，文献[4]给出了 2 个 Toeplitz 算子的乘积 $T_\varphi T_\psi$ 是一个 Toeplitz 算子的充要条件是 φ 是余解析的，或者 ψ 是解析的．在这两种情况下，$T_\varphi T_\psi = T_{\varphi\psi}$．文献[5]利用 Berezin 变换得到了 Hardy 空间上有界符号的 Toeplitz 算子的乘积之和 $T_f T_g + T_h T_k$ 是一个 Toeplitz 算子的条件．在单位圆盘 Bergman 空间上，文献[6-7]借助 Laplace 算子和 Berezin 变换研究了有界调和符号的 Toeplitz 算子的乘积在何种条件下是一个 Toeplitz 算子的问题．文献[8]给出了 Dirichlet 空间上的 2 个 Toeplitz 算子的乘积是一个 Toeplitz 算子的条件．文献[9]研究了小 Hankel 算子的性质，文献[10-12]分别研究了幂等算子及 Hardy 空间上 Hankel 算子乘积和复合算子乘积．本文完全刻画了 Hardy 空间上的 3 个 Toeplitz 算子的乘积在何种条件下仍是一个 Toeplitz 算子或是一个 Hankel 算子．

1　预备知识

在本文的主要结果的证明中，会多次用到前人关于 Hardy 空间上的 Toeplitz 算子的紧性以及 Hankel 算子的有限秩性质的刻画．故本文引用相关结果如下：

引理 1[1]　设 $\varphi \in L^\infty$，则 T_φ 是紧算子当且仅当 $\varphi = 0$．

著名的 Kronecker 定理[13]完全描述了有限秩的 Hankel 算子，该定理表明 Hankel 算子 T 是有限秩的当且仅当存在 $h \in H^\infty(\partial D)$ 及 u 为有限 Blaschke 积，使得 $T = H_{\bar{u}g}$．Kronecker 定理揭示了有限秩的 Hankel 算子与有理函数之间的关系．本文引用另一版本的 Kronecker 定理如下：

引理 2[13]　若 $\varphi \in L^\infty$，则 H_φ 是有限秩的当且仅当存在一个非零的解析多项式 $a(z)$，使得 $a\varphi \in H^\infty(\partial D)$．

2　3 个 Toeplitz 算子的乘积等于 Toeplitz 算子

设 $f \in L^\infty$，记 $f^+ = Pf$ 及 $f^- = (I-P)f$，则 f^+, f^- 均属于 $\bigcap\limits_{q>1} L^q$，因而 T_{f^+} 与 T_{f^-} 均是 H^2 上的稠定算子．

定理 1　设 $f_1, f_2, f_3 \in L^\infty$，$h \in L^\infty$，则 $T_{f_1} T_{f_2} T_{f_3} = T_h$ 当且仅当下列条件之一成立：

(a) f_1 与 $f_1 f_2$ 都属于 $\overline{H^2}$；

(b) $f_1 \in \overline{H^2}$ 且 $f_3 \in H^2$；

(c) f_3 与 $f_3 f_2$ 都属于 H^2；

(d) 存在 $\lambda \in \mathbb{C}$，使得 $f_1 f_2^+ - \lambda f_1 \in \overline{H^2}$ 且 $\lambda f_3 + f_2^- f_3 \in H^2$．

证　充分性　显然，条件(a)或(b)或(c)成立可以推出 $T_{f_1} T_{f_2} T_{f_3} = T_h$．由于

$$T_{f_1} T_{f_2} T_{f_3} = T_{f_1}(T_{f_2^+} + T_{f_2^-}) T_{f_3} = T_{f_1 f_2^+} T_{f_3} + T_{f_1} T_{f_2^- f_3}$$

若条件(d)成立，设

$$f_1 f_2^+ - \lambda f_1 = r_1 \in \overline{H^2} \qquad \lambda f_3 + f_2^- f_3 = r_2 \in H^2$$

则

$$f_1 f_2^+ = r_1 + \lambda f_1 \qquad f_2^- f_3 = r_2 - \lambda f_3$$

因此可得

$$\begin{aligned} T_{f_1 f_2^+} T_{f_3} + T_{f_1} T_{f_2^- f_3} = & T_{r_1 + \lambda f_1} T_{f_3} + T_{f_1} T_{r_2 - \lambda f_3} = \\ & T_{r_1} T_{f_3} + T_{f_1} T_{r_2} + \lambda T_{f_1} T_{f_3} - \lambda T_{f_1} T_{f_3} = \\ & T_{r_1} T_{f_3} + T_{f_1} T_{r_2} = \\ & T_{r_1 f_3 + f_1 r_2} \end{aligned}$$

即 $T_{f_1} T_{f_2} T_{f_3}$ 是一个 Toeplitz 算子，其中最后一个等号成立是由 Brown-Halmos 定理得到的．

必要性　设 $T_{f_1} T_{f_2} T_{f_3} = T_h$．由于

$$T_{f_1} T_{f_2} T_{f_3} = T_{f_1}(T_{f_2^+ + f_2^-}) T_{f_3} =$$

$$T_{f_1f_2^+}T_{f_3}+T_{f_1}T_{f_2^-f_3}=$$
$$T_{f_1f_2^+}(T_zT_{\bar{z}}+1\otimes 1)T_{f_3}+T_{f_1}(T_zT_{\bar{z}}+1\otimes 1)T_{f_2^-f_3}=$$
$$T_{f_1f_2^+z}T_{\bar{z}f_3}+T_{f_1z}T_{\bar{z}f_2^-f_3}+T_{f_1f_2^+}(1\otimes 1)T_{f_3}+T_{f_1}(1\otimes 1)T_{f_2^-f_3}$$

从而则有

$$T_{\bar{z}}T_{f_1}T_{f_2}T_{f_3}T_z=T_{f_1f_2^+}T_{f_3}+T_{f_1}T_{f_2^-f_3}+T_{\bar{z}f_1f_2^+}(1\otimes 1)T_{f_3z}+T_{\bar{z}f_1}(1\otimes 1)T_{f_2^-f_3z}=T_h$$

因此

$$T_{\bar{z}f_1f_2^+}(1\otimes 1)T_{f_3z}+T_{\bar{z}f_1}(1\otimes 1)T_{f_2^-f_3z}=0$$

即

$$P\bar{z}f_1f_2^+\otimes P\overline{zf_3}=-P\bar{z}f_1\otimes P\overline{zf_2^-f_3} \tag{1}$$

下面我们将分 2 种情形进行讨论:

情形 1 如果 $P\bar{z}f_1f_2^+\otimes P\overline{zf_3}=0=-P\bar{z}f_1\otimes P\overline{zf_2^-f_3}=0$,那么有以下两种可能:

情形 1.1 $P\bar{z}f_1f_2^+=0$,则有

$$P\bar{z}f_1=0 \tag{2}$$

或

$$P\overline{zf_2^-f_3}=0 \tag{3}$$

如果(2)式成立,即 $P\bar{z}f_1f_2^+=0$ 且 $P\bar{z}f_1=0$,那么可得 $\bar{z}f_1\in(H^2)^\perp=\bar{z}\overline{H^2}$,从而则有 $f_1\in\overline{H^2}$. 同理,根据 $P\bar{z}f_1f_2^+=0$,则有 $f_1f_2^+\in\overline{H^2}$,从而 $f_1f_2=f_1f_2^++f_1f_2^-\in\overline{H^2}$. 因此,条件(a)成立.

如果(3)式成立,即 $P\bar{z}f_1f_2^+=0$ 且 $P\overline{zf_2^-f_3}=0$,则可得 $f_1f_2^+\in\overline{H^2}$ 及 $\overline{f_2^-f_3}\in\overline{H^2}$,从而有 $f_1f_2^+\in\overline{H^2}$ 及 $f_2^-f_3\in H^2$,故存在 $\lambda=0$,使得 $f_1f_2^+-0f_1\in\overline{H^2}$ 且 $0f_3+f_2^-f_3\in H^2$,因此条件(d)成立.

情形 1.2 $P\overline{zf_3}=0$,则有

$$P\bar{z}f_1=0 \tag{4}$$

或

$$P\overline{zf_2^-f_3}=0 \tag{5}$$

如果(4)式成立,即 $P\overline{zf_3}=0$ 且 $P\bar{z}f_1=0$,则可得 $\overline{f_3}\in\overline{H^2}$ 且 $f_1\in\overline{H^2}$,即 $f_1\in\overline{H^2}$ 且 $f_3\in H^2$. 因此,条件(b)成立.

如果(5)式成立,即 $P\overline{zf_3}=0$ 且 $P\overline{zf_2^-f_3}=0$,则由 $P\overline{zf_3}=0$ 可得 $f_3\in H^2$,以及由 $P\overline{zf_2^-f_3}=0$ 可得 $\overline{f_2^-f_3}\in\overline{H^2}$,从而 $f_2^-f_3\in H^2$,因此 $f_2f_3=f_2^-f_3+f_2^+f_3\in H^2$,故条件(c)成立.

情形 2 如果 $P\bar{z}f_1f_2^+\otimes P\overline{zf_3}\neq 0$,则存在不为 0 的数 λ,使得

$$P\bar{z}f_1f_2^+=\lambda P\bar{z}f_1 \tag{6}$$

即 $P(\bar{z}f_1f_2^+-\lambda\bar{z}f_1)=0$,从而,$f_1f_2^+-\lambda f_1\in\overline{H^2}$. 而且将(6)式代入(1)式中,可得

$$\lambda P\bar{z}f_1\otimes P\overline{zf_3}=-P\bar{z}f_1\otimes P\overline{zf_2^-f_3}$$

即

$$P\bar{z}f_1\otimes\bar{\lambda}P\overline{zf_3}=-P\bar{z}f_1\otimes P\overline{zf_2^-f_3}$$

故

$$P\bar{z}f_1\otimes P(\overline{\lambda zf_3}+\overline{zf_2^-f_3})=0$$

从而 $P[\overline{(\lambda f_3+f_2^-f_3)z}]=0$,即 $\overline{\lambda f_3+f_2^-f_3}\in\overline{H^2}$,因而 $\lambda f_3+f_2^-f_3\in H^2$,即条件(d)成立.

例 1 若 f_1,f_2,f_3 均为解析多项式,则 $h=f_1f_2f_3$ 且 $T_{f_1}T_{f_2}T_{f_3}=T_h$.

3 3 个及以上的 Toeplitz 算子的乘积等于 Hankel 算子

本节我们考虑 Toeplitz 算子的乘积与 Hankel 算子之间的关系. 下面首先寻找使得 2 个 Toeplitz 算子的乘积等于一个 Hankel 算子的条件.

问题 1　设 $f,g,\varphi \in L^{\infty}$，什么条件下，成立 $T_f T_g = H_{\varphi}$?

对于问题 1，我们得到如下的结论：

定理 2　若 $f,g,\varphi \in L^{\infty}$，则 $T_f T_g = H_{\varphi}$ 当且仅当 f 或 g 为 0，且 $\varphi \in H^{\infty}$.

证　必要性　设 $T_f T_g = H_{\varphi}$，则

$$T_f T_g = T_f(T_z T_{\bar{z}} + 1 \otimes 1) T_g = T_{fz} T_{\bar{z}g} + T_f(1 \otimes 1) T_g = H_{\varphi}$$

从而可得

$$T_{\bar{z}} H_{\varphi} T_z = T_f T_g + T_{\bar{z}f}(1 \otimes 1) T_{gz} = H_{\varphi} + P\bar{z}f \otimes P\,\overline{gz}$$

即

$$T_{\bar{z}} H_{\varphi} T_z - H_{\varphi} = P\bar{z}f \otimes P\,\overline{gz}$$

由于 $T_{\bar{z}} H_{\varphi} T_z = H_{\varphi z^2}$，故 $H_{\varphi(z^2-1)} = P\bar{z}f \otimes P\,\overline{gz}$. 下面我们分 2 种情况进行讨论：

情形 1　若 $P\bar{z}f \otimes P\,\overline{gz} = 0$，则 $H_{\varphi(z^2-1)} = 0$，从而 $\varphi(z^2-1) \in H^2$. 根据引理 2 知，H_{φ} 是有限秩算子. 故由 $T_f T_g = H_{\varphi}$ 及引理 1 可知 f 或 g 为 0.

情形 2　若 $P\bar{z}f \otimes P\,\overline{gz} \neq 0$，则由于 $H_{\varphi(z^2-1)}$ 是秩为 1 的算子，根据引理 2 知，存在一次解析多项式 $a(z)$，使得 $a(z)\varphi(z^2-1) \in H^2$. 由于 $a(z)(z^2-1)$ 仍然是解析多项式，再次根据引理 2，H_{φ} 为有限秩算子. 因此，由 $T_f T_g = H_{\varphi}$ 及引理 1 可得 f 或 g 为 0.

由 $T_f T_g = H_{\varphi}$，f 或 g 为 0 以及 $\varphi \in L^{\infty}$，易得 $\varphi \in H^{\infty}$.

充分性　显然.

下面，我们考虑 3 个 Toeplitz 算子的乘积等于一个 Hankel 算子的条件. 设 $T_{f_1} T_{f_2} T_{f_3} = H_{\varphi}$，则

$$T_{f_1 f_2^+} T_{f_3} + T_{f_1} T_{f_2^- f_3} = H_{\varphi}$$

从而

$$\begin{aligned} T_{\bar{z}} H_{\varphi} T_z = & T_{\bar{z}}(T_{f_1 f_2^+} T_{f_3} + T_{f_1} T_{f_2^- f_3}) T_z = \\ & T_{\bar{z}} T_{f_1 f_2^+}(T_z T_{\bar{z}} + 1 \otimes 1) T_{f_3} T_z + T_{\bar{z}} T_{f_1}(T_z T_{\bar{z}} + 1 \otimes 1) T_{f_2^- f_3} T_z = \\ & T_{f_1 f_2^+} T_{f_3} + T_{f_1} T_{f_2^- f_3} + T_{\bar{z} f_1 f_2^+}(1 \otimes 1) T_{f_3 z} + T_{\bar{z} f_1}(1 \otimes 1) T_{f_2^- f_3 z} = \\ & H_{\varphi} + P\bar{z} f_1 f_2^+ \otimes P\,\overline{f_3 z} + P\bar{z} f_1 \otimes P\,\overline{f_2^- f_3 z} \end{aligned}$$

由于 $T_{\bar{z}} H_{\varphi} T_z = H_{\varphi z^2}$，故

$$H_{\varphi(z^2-1)} = P\bar{z} f_1 f_2^+ \otimes P\,\overline{f_3 z} + P\bar{z} f_1 \otimes P\,\overline{f_2^- f_3 z}$$

这表明 $H_{\varphi} T_{z^2-1} = H_{\varphi(z^2-1)}$ 是秩至多为 2 的算子. 由引理 2 知 H_{φ} 为有限秩算子. 从而 $T_{f_1} T_{f_2} T_{f_3} = H_{\varphi}$ 为有限秩算子. 因此，根据引理 1 可知，f_1 或 f_2 或 f_3 为 0，从而有 $\varphi \in H^{\infty}$.

反过来，如果 f_1 或 f_2 或 f_3 为 0，且 $\varphi \in H^{\infty}$，则显然有 $T_{f_1} T_{f_2} T_{f_3} = 0 = H_{\varphi}$. 因此，我们有下述结论：

定理 3　设 $f_1, f_2, f_3 \in L^{\infty}$，$\varphi \in L^{\infty}$，则 $T_{f_1} T_{f_2} T_{f_3} = H_{\varphi}$ 当且仅当 f_1 或 f_2 或 f_3 为 0，且 $\varphi \in H^{\infty}$.

应用上述的方法和技巧，上面的结论可以推广至任意有限多个 Toeplitz 算子的乘积是一个 Hankel 算子的情形，即：

定理 4　设 $f_1, f_2, \cdots, f_n \in L^{\infty}$，$\varphi \in L^{\infty}$，则 $T_{f_1} T_{f_2} \cdots T_{f_n} = H_{\varphi}$ 当且仅当 f_1 或 f_2 或 $\cdots$ 或 f_n 为 0，且 $\varphi \in H^{\infty}$.

引理 3　设 $f_1, f_2, \cdots, f_n \in L^{\infty}$，$\varphi \in L^{\infty}$，则 $T_{f_1} T_{f_2} \cdots T_{f_n} = \sum_{i=1}^{n-1} T_{a_i} T_{\overline{b_i}} + T_{\varphi}$，这里 $a_i(z), b_i(z) \in \bigcap_{q>1} H^q$ 且 $\varphi \in \bigcap_{q>1} L^q$.

证　应用数学归纳法证明该结论. 首先，如果 $n = 2$，则

$$T_{f_1} T_{f_2} = T_{f_1^+ + f_1^-} T_{f_2^+ + f_2^-} = T_{f_1^+} T_{f_2^-} + T_{f_1^+ f_2^+ + f_1^- f_2^- + f_1^- f_2^+} = T_a T_{\bar{b}} + T_{\varphi}$$

这里，$a = f_1^+$，$b = \overline{f_2^-}$ 均属于 $\bigcap_{q>1} H^q$，且

$$\varphi = f_1^+ f_2^+ + f_1^- f_2^- + f_1^- f_2^+ \in \bigcap_{q>1} L^q$$

现在假设结论对 n 个 Toeplitz 算子的情况成立，即

$$T_{f_1} T_{f_2} \cdots T_{f_n} = \sum_{i=1}^{n-1} T_{a_i} T_{\overline{b_i}} + T_{\varphi_1}$$

其中 $a_i(z), b_i(z) \in \bigcap\limits_{q>1} H^q$，$\varphi_1 \in \bigcap\limits_{q>1} L^q$，那么对 $n+1$ 个 Toeplitz 算子的乘积有

$$\begin{aligned}
T_{f_1} T_{f_2} \cdots T_{f_n} T_{f_{n+1}} = & \Big(\sum_{i=1}^{n-1} T_{a_i} T_{\overline{b_i}} + T_{\varphi_1}\Big) T_{f_{n+1}} = \\
& \Big(\sum_{i=1}^{n-1} T_{a_i} T_{\overline{b_i}} + T_{\varphi_1}\Big)(T_{f_{n+1}^+} + T_{f_{n+1}^-}) = \\
& \sum_{i=1}^{n-1} T_{a_i} T_{\overline{b_i} f_{n+1}^+} + T_{\varphi_1} T_{f_{n+1}^+} + \sum_{i=1}^{n-1} T_{a_i} T_{\overline{b_i} f_{n+1}^-} + T_{\varphi_1} T_{f_{n+1}^-} = \\
& \sum_{i=1}^{n-1} T_{a_i} (T_{(\overline{b_i} f_{n+1}^+)^+} + T_{(\overline{b_i} f_{n+1}^+)^-}) + T_{\varphi_1} T_{f_{n+1}^+} + \sum_{i=1}^{n-1} T_{a_i} T_{\overline{b_i} f_{n+1}^-} + T_{\varphi_1^+} T_{f_{n+1}^-} + T_{\varphi_1^-} T_{f_{n+1}^-} = \\
& \sum_{i=1}^{n-1} T_{a_i} T_{(\overline{b_i} f_{n+1}^+)^-} + \sum_{i=1}^{n-1} T_{a_i} T_{\overline{b_i} f_{n+1}^-} + T_{\varphi_1^+} T_{f_{n+1}^-} + T_{[\sum_{i=1}^{n-1} a_i (\overline{b_i} f_{n+1}^+)^+ + \varphi_1 f_{n+1}^+ + \varphi_1^- f_{n+1}^-]} = \\
& \sum_{i=1}^{n-1} T_{a_i} T_{[(\overline{b_i} f_{n+1}^+)^- + \overline{b_i} f_{n+1}^-]} + T_{\varphi_1^+} T_{f_{n+1}^-} + T_{[\sum_{i=1}^{n-1} a_i (\overline{b_i} f_{n+1}^+)^+ + \varphi_1 f_{n+1}^+ + \varphi_1^- f_{n+1}^-]} = \\
& \sum_{i=1}^{n} T_{A_i} T_{\overline{B_i}} + T_{\varphi}
\end{aligned}$$

这里

$$A_i = a_i \qquad i = 1, 2, \cdots, n-1$$

$$A_n = \varphi_1^+$$

$$B_i = \overline{(\overline{b_i} f_{n+1}^+)^- + \overline{b_i} f_{n+1}^-} \qquad i = 1, 2, \cdots, n-1$$

$$B_n = \overline{f_{n+1}^-}$$

且 $A_i, B_i \in \bigcap\limits_{q>1} H^q$，

$$\varphi = \sum_{i=1}^{n-1} a_i (\overline{b_i} f_{n+1}^+)^+ + \varphi_1 f_{n+1}^+ \varphi_1^- f_{n+1}^- \qquad \varphi \in \bigcap_{q>1} L^q$$

即结论对 $n+1$ 个 Toeplitz 算子的情况也成立.

综上所述，对一切自然数 n，均有结论成立.

定理 4 的证明 充分性显然，下证必要性. 如果 $T_{f_1} T_{f_2} \cdots T_{f_n} = H_\varphi$，根据引理 3，有

$$T_{f_1} T_{f_2} \cdots T_{f_n} = \sum_{i=1}^{n-1} T_{a_i} T_{\overline{b_i}} + T_\psi$$

此处 $a_i(z), b_i(z) \in \bigcap\limits_{q>1} H^q$ 且 $\psi \in \bigcap\limits_{q>1} L^q$. 从而

$$\begin{aligned}
T_{\bar z} H_\varphi T_z = & T_{\bar z} T_{f_1} T_{f_2} \cdots T_{f_n} T_z = \\
& T_{\bar z}\Big(\sum_{i=1}^{n-1} T_{a_i} T_{\overline{b_i}} + T_\psi\Big) T_z = \\
& \sum_{i=1}^{n-1} T_{\bar z a_i} T_{\overline{b_i} z} + T_\psi = \\
& \sum_{i=1}^{n-1} T_{\bar z a_i} (T_z T_{\bar z} + 1 \otimes 1) T_{\overline{b_i} z} + T_\psi = \\
& \sum_{i=1}^{n-1} T_{a_i} T_{\overline{b_i}} + \sum_{i=1}^{n-1} T_{\bar z a_i} (1 \otimes 1) T_{\overline{b_i} z} + T_\psi = \\
& H_\varphi + \sum_{i=1}^{n-1} T_{\bar z a_i} (1 \otimes 1) T_{\overline{b_i} z}
\end{aligned}$$

由于 $T_{\bar{z}} H_{\varphi} T = H_{\varphi z^2}$，因此

$$H_{\varphi(z^2-1)} = \sum_{i=1}^{n-1} T_{\bar{z}a_i} (1 \otimes 1) T_{\overline{b_i}z}$$

是秩至多为 $n-1$ 的算子．又根据 $H_{\varphi(z^2-1)} = H_{\varphi} T_{z^2-1}$ 及引理 2 知，H_{φ} 为有限秩算子，从而 $T_{f_1} T_{f_2} \cdots T_{f_n}$ 是有限秩算子．由引理 1 可得，f_1 或 f_2 或 … 或 f_n 为 0，从而 $H_{\varphi} = 0$，即 $\varphi \in H^{\infty}$．故必要性得证．

参考文献：

[1] ZHU K H. Operator Theory in Function Spaces [M]. Providence, Rhode Island: American Mathematical Society, 2007: 253-286.

[2] GUO K Y, ZHENG D C. The Distribution Function Inequality for A Finite Sum of Finite Products of Toeplitz Operators [J]. Journal of Functional Analysis, 2005, 218(1): 1-53.

[3] GUO K Y. A Problem on Products of Toeplitz Operators [J]. Proceedings of the American Mathematical Society, 1996, 124: 869-871.

[4] BROWN A, HALMOS P. Algebraic Properties of Toeplitz Operators [J]. Journal Für Die Reine und Angewandte Mathematik(Crelles Journal), 1964, 1964(213): 89-102.

[5] STROETHOFF K. Algebraic Properties of Toeplitz Operators on the Hardy Space Via the Berezin Transform [J]. Contemporary Mathematics, 1999, 232: 313-319.

[6] AHERN P, ČUČKOVIĆ Ž. A Theorem of Brown-Halmos Type for Bergman Space Toeplitz Operators [J]. Journal of Functional Analysis, 2001, 187(1): 200-210.

[7] AHERN P. On the Range of the Berezin Transform [J]. Journal of Functional Analysis, 2004, 215(1): 206-216.

[8] LEE Y J. Algebraic Properties of Toeplitz Operators on the Dirichlet Space [J]. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 2007, 329(2): 1316-1329.

[9] 李永宁，梁焕超，丁宣浩．单位圆周上的小 Hankel 算子 [J]．西南大学学报(自然科学版)，2021，43(6)：89-94.

[10] 刘　妮，郭艳鹂，任谨慎，等．幂等算子核空间的刻画 [J]．西南大学学报(自然科学版)，2020，42(8)：102-105.

[11] 丁宣浩，桑元琦．Hankel 算子乘积的两个问题 [J]．中国科学，2021，51(7)：1151-1162.

[12] 关南星．Hardy 空间上的复合算子乘积与 Hankel 算子 [J]．西南师范大学学报(自然科学版)，2014，39(12)：23-26.

[13] KRONECKER L. Zur Theorie Der Elimination Einer Variablen Aus Zwei Algebraischen Gleichungen [M]. Berlin: G Vogt, 1881.

On Products of Three Toeplitz Operators

LI Yong-ning[1,2],　LIANG Huan-chao[1],　DING Xuan-hao[1,2]

1. College of Mathematics and Statistics, Chongqing Technology and Business University, Chongqing 400067, China;

2. Chongqing Key Laboratory of Social Economic and Applied Statistics, Chongqing 400067, China

Abstract: This paper mainly focuses on the problems about the products of three or any finitely many Toeplitz operators on the Hardy space. The conditions on when the product of three Toeplitz operators is a Toeplitz operator are completely characterized, moreover, a sufficient and necessary condition on the product of three or any finitely many Toeplitz operators being a Hankel operator is obtained, where the Hankel operator is defined from the Hardy space to itself.

Key words: Toeplitz operator; Hankel operator; Hardy space; product

责任编辑　廖　坤