第 46 卷　第 8 期　　西 南 师 范 大 学 学 报（自然科学版）　　2021 年 8 月
Vol. 46　No. 8　　Journal of Southwest China Normal University (Natural Science Edition)　　Aug.　2021

DOI：10.13718/j.cnki.xsxb.2021.08.005

具有 Fučik 谱共振的 Kirchhoff 方程非平凡解的存在性[①]

陈兴菊，　欧增奇

西南大学 数学与统计学院，重庆 400715

摘要： 主要通过变分法得到一类在无穷远处具有 Fučik 谱共振的 Kirchhoff 型方程

$$\begin{cases} -\left(\int_{\Omega} |\nabla u|^2 \mathrm{d}x\right)\Delta u = \alpha(u^+)^3 + \beta(u^-)^3 + f(x,\ u) & x \in \Omega \\ u = 0 & x \in \partial\Omega \end{cases}$$

非平凡解的存在性. 其中 Ω 是 $\mathbb{R}^N$ $(N=1,2,3)$ 中的开球，$\alpha,\beta \in \mathbb{R}$，$u^+ = \max\{u,\ 0\}$，$u^- = \min\{u,\ 0\}$，$u = u^+ + u^-$. 非线性项 $f \in C(\overline{\Omega}\times\mathbb{R},\ \mathbb{R})$ 满足 $f(x,\ 0)=0$. 应用带有(Ce)条件的山路定理，得到该方程在 Fučik 谱的两条平凡曲线上非平凡解的存在性.

关　键　词： Kirchhoff 方程；Fučik 谱；山路定理；(Ce)条件

中图分类号：O176.3　　**文献标志码：A**　　**文章编号：** 1000－5471(2021)08－0024－08

考虑 Kirchhoff 型方程

$$\begin{cases} -\left(\int_{\Omega} |\nabla u|^2 \mathrm{d}x\right)\Delta u = \alpha(u^+)^3 + \beta(u^-)^3 + f(x,\ u) & x \in \Omega \\ u = 0 & x \in \partial\Omega \end{cases} \tag{1}$$

这里的 Ω 是 $\mathbb{R}^N$ $(N=1,2,3)$ 中的开球，$\alpha,\beta \in \mathbb{R}$，$u^+ = \max\{u,\ 0\}$，$u^- = \min\{u,\ 0\}$，$u = u^+ + u^-$. 非线性项 $f \in C(\overline{\Omega}\times\mathbb{R},\ \mathbb{R})$，满足 $f(x,\ 0)=0$，即方程(1)有一个平凡解 $u \equiv 0$. 因此我们将考虑方程(1)非平凡解的存在性.

令 $H_0^1(\Omega)$ 是 Sobolev 空间，它的范数为 $\|u\| = \left(\int_{\Omega} |\nabla u|^2 \mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}}$. 记 H^* 为 $H_0^1(\Omega)$ 的对偶空间且 $\langle\cdot,\ \cdot\rangle$ 为 H^* 和 $H_0^1(\Omega)$ 的对偶对. 令 $L^p(\Omega)$ $(1 \leqslant p < +\infty)$ 是 Lebesgue 空间，它的范数为 $|u|_p = \left(\int_{\Omega} |u|^p \mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}}$. 由于对任意的 $p \in [1,\ 2^*)$，$H_0^1(\Omega)$ 嵌入到 $L^p(\Omega)$ 是连续嵌入和紧嵌入. 当 $N=3$ 时，$2^*=6$；当 $N=1,2$ 时，$2^*=\infty$. 故存在 $S_p>0$，使得对任意 $u \in H_0^1(\Omega)$，有

$$|u|_p \leqslant S_p \|u\| \tag{2}$$

考虑 Kirchhoff 特征值方程

① 收稿日期：2020－07－09
基金项目：国家自然科学基金项目(11801465，11971393).
作者简介：陈兴菊，硕士研究生，主要从事非线性泛函分析的研究.
通信作者：欧增奇，副教授.

$$\begin{cases}-\left(\int_\Omega |\nabla u|^2 \mathrm{d}x\right)\Delta u = \alpha(u^+)^3 + \beta(u^-)^3 & x \in \Omega \\ u = 0 & x \in \partial\Omega\end{cases} \tag{3}$$

文献[1] 证明了：当 $\alpha=\beta$ 时，其主特征值 $\lambda_1 = \inf\{\|u\|^4: u \in H_0^1(\Omega), |u|_4^4 = 1\} > 0$，对应的规范特征函数为 φ_1，且 $|\varphi_1|_4^4 = 1$. 使得方程(3) 有非平凡解的点 $(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2$ 构成的集合 Σ 叫作 Kirchhoff 方程的 Fučik 谱. 文献[2] 得到了 Σ 的两条平凡曲线 $\{\lambda_1\}\times\mathbb{R}$ 和 $\mathbb{R}\times\{\lambda_1\}$，和一条非平凡曲线

$$\ell = \{(s + c(s), c(s)): s \in \mathbb{R}\}$$

这里 $c(s)$ 是泛函 $I_s(u) = \|u\|^4 - s|u^+|_4^4$ 在 $S = \{u \in H_0^1(\Omega): |u|_4^4 = 1\}$ 上的临界值.

具有 Fučik 共振的 p-拉普拉斯问题的非平凡解的存在性已有许多结果(见文献[3-5]). 近年来，许多学者研究了基尔霍夫型问题解的存在性和多重性(见文献[1-2,6-14]). 受文献[2,11-12] 的启发，我们将研究方程(1) 在无穷远处带有 Fučik 谱共振的非平凡解的存在性. 对任意的 $(x, t) \in \Omega\times\mathbb{R}$，令 $F(x, t) = \int_0^t f(x, s)\mathrm{d}s$. 本文的主要结果如下：

定理 1　假设非线性项 f 满足条件：

(f_1)　对任意的 $t \neq 0$，$f(x, t)t > 0$，当 $|t| \to \infty$ 时，$f(x, t) = o(|t|^3)$，且关于 $x \in \Omega$ 一致收敛；

(f_2)　存在 $\delta > 0$，$C_0 > 0$ 和 $r \in (1, 2)$，使得对任意的 $|t| \leqslant \delta$ 和 $x \in \Omega$，$F(x, t) \geqslant C_0|t|^r$；

(f_3)　$\lim\limits_{|t|\to\infty}(f(x, t)t - 4F(x, t)) = -\infty$，且关于 $x \in \Omega$ 一致收敛.

则对于任意的 $(\alpha,\beta) \in (-\infty, \lambda_1)\times\{\lambda_1\} \cup \{\lambda_1\}\times(-\infty, \lambda_1)$，方程(1) 至少有两个非平凡解.

定理 2　若非线性项 f 满足条件(f_1)－(f_3)，则对于任意的 $(\alpha,\beta) \in [\lambda_1, \infty)\times\{\lambda_1\} \cup \{\lambda_1\}\times[\lambda_1, \infty)$，方程(1) 至少有一个具有负能量的非平凡解.

定义如下 C^1 能量泛函 $I: H_0^1(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R}$：

$$I(u) = \frac{1}{4}\|u\|^4 - \frac{\alpha}{4}|u^+|_4^4 - \frac{\beta}{4}|u^-|_4^4 - \int_\Omega F(x, u)\mathrm{d}x \qquad u \in H_0^1(\Omega) \tag{4}$$

从变分的观点来看，方程(1) 的弱解是泛函 I 在 $H_0^1(\Omega)$ 的一个临界点. 利用带有$(\mathrm{PS})_c$ 条件的山路定理(见文献[5] 的定义 6) 证明定理 1 和定理 2. 下面将只证明定理 1 当 $\alpha = \lambda_1$，$\beta < \lambda_1$ 时的情形. 因为当 $\alpha < \lambda_1$，$\beta = \lambda_1$ 时的情形可类似地证明. 故定理 2 也只证明当 $\alpha \geqslant \lambda_1$，$\beta = \lambda_1$ 时的情形.

引理 1　假设 f 满足条件(f_1),(f_3). 则泛函 I 满足(Ce) 条件.

证　令 $\{u_n\}$ 是 I 在 $H_0^1(\Omega)$ 中的一个(Ce) 序列，即当 $n \to \infty$ 时，有

$$I(u_n) \to c \qquad (1 + \|u_n\|)\|I'(u_n)\|_{H^*} \to 0 \tag{5}$$

首先证明 $\{u_n\}$ 在 $H_0^1(\Omega)$ 中有界. 若不然，即当 $n \to \infty$ 时，$\|u_n\| \to \infty$. 令 $v_n = \dfrac{u_n}{\|u_n\|}$，则存在 $v \in H_0^1(\Omega)$，使得当 $n \to \infty$ 时，有

$$\begin{cases}v_n \rightharpoonup v & x \in H_0^1(\Omega) \\ v_n \to v & x \in L^p(\Omega),\ p \in [1, 2^*)\end{cases} \tag{6}$$

由条件(f_1)，对任意 $\varepsilon > 0$，存在 $C_1 > 0$，使得对任意的 $(x, t) \in \Omega\times\mathbb{R}$，有

$$|f(x, t)| \leqslant \varepsilon|t|^3 + C_1 \tag{7}$$

由 Ω 的有界性和(2) 式，存在 $C_2 > 0$，使得

$$|f(x, u_n)|_{\frac{4}{3}} \leqslant 2\left(\int_\Omega(\varepsilon^4|u_n|^4 + C_1^{\frac{4}{3}})\mathrm{d}x\right)^{\frac{4}{3}} \leqslant \varepsilon\|u_n\|^3 + C_2$$

因此，当 $n \to \infty$ 时，$\|u_n\| \to \infty$，有

$$\lim_{n\to\infty}\frac{|f(x, u_n)|_{\frac{4}{3}}}{\|u_n\|^3} = 0 \tag{8}$$

由(6),(8)式和Hölder不等式，存在常数 $C_3>0$，使得当 $n\to\infty$ 时，有

$$\left|\int_\Omega\left(\alpha(v_n^+)^3+\beta(v_n^-)^3+\frac{f(x,u_n)}{\|u_n\|^3}\right)(v_n-v)\mathrm{d}x\right|\leqslant C_3\left(|v_n^+|_4^3+|v_n^-|_4^3+\frac{|f(x,u_n)|_{\frac{4}{3}}}{\|u_n\|^3}\right)|v_n-v|_4\to 0$$

结合(5)式，当 $n\to\infty$ 时，有

$$\frac{\langle I'(u_n),v_n-v\rangle}{\|u_n\|^3}=\int_\Omega\nabla v_n\cdot\nabla(v_n-v)\mathrm{d}x-\int_\Omega\left(\alpha(v_n^+)^3+\beta(v_n^-)^3+\frac{f(x,u_n)}{\|u_n\|^3}\right)(v_n-v)\mathrm{d}x\to 0$$

因此 $\int_\Omega\nabla v_n\cdot\nabla(v_n-v)\mathrm{d}x\to 0$. 再结合(5)式，推出在 $H_0^1(\Omega)$ 中，有 $v_n\to v$ 且 $\|v\|=1$. 同样的方法，再结合对任意 $w\in H_0^1(\Omega)$，当 $n\to\infty$ 时，$\frac{\langle I'(u_n),w\rangle}{\|u_n\|^3}\to 0$，有

$$\int_\Omega\nabla v\cdot\nabla w\mathrm{d}x=\alpha\int_\Omega(v^+)^3w\mathrm{d}x+\beta\int_\Omega(v^-)^3w\mathrm{d}x$$

这表明如果 $\alpha=\lambda_1(\beta=\lambda_1)$，则存在 $t>0$ 使得 $v=t\varphi_1(v=-t\varphi_1)$. 因此当 $x\in\Omega$ 时，$|u_n(x)|\to\infty$ 几乎处处成立. 由条件(f_3)和Fatou引理，有

$$\liminf_{n\to\infty}\int_\Omega(f(x,u_n)u_n-4F(x,u_n))\mathrm{d}x=-\infty \tag{9}$$

由(9)式，当 $n\to\infty$ 时，有

$$4c+o(1)=4I(u_n)-\langle I'(u_n),u_n\rangle=\int_\Omega(f(x,u_n)u_n-4F(x,u_n))\mathrm{d}x\to-\infty$$

矛盾. 因此 $\{u_n\}$ 是有界的. 故 $H_0^1(\Omega)$ 中存在一个子序列(仍表示为 $\{u_n\}$)，使得 $\{u_n\}$ 在 $H_0^1(\Omega)$ 中弱收敛到 u，$\{u_n\}$ 在 $L^p(\Omega)(p\in[1,2^*))$ 中强收敛到 u. 再结合(2),(7)式和Hölder不等式，当 $n\to\infty$ 时，有

$$\int_\Omega|f(x,u_n)(u_n-u)|\mathrm{d}x\leqslant(\varepsilon|u_n|_4^3+C_1|\Omega|^{\frac{4}{3}})|u_n-u|_4\to 0$$

由(5)式和Hölder不等式，推出当 $n\to\infty$ 时，有

$$\|u_n\|^2\int_\Omega\nabla u_n\cdot\nabla(u_n-u)\mathrm{d}x=\langle I'(u_n),u_n-u\rangle+\alpha\int_\Omega(u_n^+)^3(u_n-u)\mathrm{d}x+$$
$$\beta\int_\Omega(u_n^-)^3(u_n-u)\mathrm{d}x+\int_\Omega f(x,u_n)(u_n-u)\mathrm{d}x\to 0$$

因为序列 $\{u_n\}$ 是有界的，故当 $n\to\infty$ 时，有

$$\int_\Omega\nabla u_n\cdot\nabla(u_n-u)\mathrm{d}x\to 0 \tag{10}$$

因此由(9),(10)式，当 $n\to\infty$ 时，有

$$\|u_n-u\|^2=\int_\Omega\nabla u_n\cdot\nabla(u_n-u)\mathrm{d}x-\int_\Omega\nabla u\cdot\nabla(u_n-u)\mathrm{d}x\to 0$$

即在 $H_0^1(\Omega)$ 中 $u_n\to u$，证毕.

现在我们在 $H_0^1(\Omega)$ 上定义如下 C^1 泛函：

$$I_\beta^-(u)=\frac{1}{4}\|u\|^4-\frac{\beta}{4}|u^-|_4^4-\int_\Omega F_-(x,u)\mathrm{d}x$$

当 $t\leqslant 0$ 时，$f_-(x,t)=0$；当 $t>0$ 时，$f_-(x,t)=f(x,t)$. $F_-(x,t)=\int_0^t f_-(x,s)\mathrm{d}s$. 类似于引理1的证明，得到如下结论：

引理2 若条件(f_1)成立，则任何使得 $n\to\infty$ 时，$I_\beta^{-\prime}(u_n)\to 0$ 的序列 $\{u_n\}\subset H_0^1(\Omega)$ 都有一个收敛子列.

引理3 若条件(f_1)和(f_2)成立，则 I_β^- 有一个负的全局极小值点.

证 由条件(f_1)，当 $\|u\|\to\infty$ 时，$\int_\Omega F_-(x,u)\mathrm{d}x=o(\|u\|^4)$. 故

$$I_\beta^-(u) \geqslant \frac{1}{4}\|u^+\|^4 + \frac{(\lambda_1-\beta)}{4\lambda_1}\|u^-\|^4 - o(\|u\|^4)$$

因此 I_β^- 在 $H_0^1(\Omega)$ 中是强制有下界的．由条件(f_1)和(f_2)，存在 $C_4>0$，使得对任意$(x,t)\in\Omega\times\mathbb{R}$，有

$$F(x,t) \geqslant C_0|t|^r - C_4|t|^4 \tag{11}$$

因此，有

$$I_\beta^-(-t\varphi_1) \leqslant \frac{1}{4}(\lambda_1-\beta+C_4)t^4 - C_0|\varphi_1|_r^r t^r$$

因为 $r\in(1,2)$，所以 $\inf\limits_{u\in H_0^1(\Omega)} I_\beta^- < 0$．由引理 2，$I_\beta^-$ 有一个非平凡全局极小值点 u_1，即

$$I_\beta^-(u_1) = \inf_{u\in H_0^1(\Omega)} I_\beta^-(u) \qquad I_\beta^{-\prime}(u_1)=0$$

注意到

$$0 = \langle I_\beta^-(u_1), u_1^+\rangle = \frac{1}{4}\|u_1\|^2\|u_1^+\|^2$$

所以 $\|u_1^+\|=0$，即 $u_1\leqslant 0$．由 Harnack 不等式，有 $u_1<0$，因此 I_β^- 有一个非负全局极小值点．

注 1　令 $u<0$ 是 I_β^- 的临界点，则 u 是下面方程的负解：

$$\begin{cases} -\left(\int_\Omega |\nabla u|^2\mathrm{d}x\right)\Delta u = \lambda_1(u^+)^3 + \beta(u^-)^3 + f(x,u) & x\in\Omega \\ u=0 & x\in\partial\Omega \end{cases}$$

引理 4　令 I 是 $H_0^1(\Omega)$ 中的 C^1 泛函且满足(Ce)条件．若存在 $u_1\in H_0^1(\Omega)$ 和 $r>0$，使得

$$I(u_1) \leqslant \inf_{u\in\partial B_{2r}} I \qquad \gamma = \inf_{u\in\partial B_r} I = I(u_1)$$

这里 $B_r=\{u\in H_0^1(\Omega):\|u-u_1\|<r\}$，则 I 有一个临界点 w_0 且 $\|u_1-w_0\|=r$．

证　令 n 是使得$\frac{1}{\sqrt{n}}<\frac{r}{2}$的任意自然数．由 γ 的定义知，存在 $v_n\in\partial B_r$，使得 $I(v_n)<\gamma+\frac{1}{n}$．因此存在 w_n，使得当

$$w_n \in I^{-1}\left(\left[\gamma-\frac{1}{n},\gamma+\frac{1}{n}\right]\right)\cap S_n$$

且

$$S_n = \left\{u\in H_0^1(\Omega):\|u-v_n\| \leqslant \frac{2}{\sqrt{n}}\right\}$$

时，有

$$\|I'(w_n)\| < \frac{8}{\sqrt{n}} \tag{12}$$

反之，如果对任意的 $u\in I^{-1}\left(\left[\gamma-\frac{1}{n},\gamma+\frac{1}{n}\right]\right)\cap S_n$，有 $\|I'(u)\|\geqslant\frac{8}{\sqrt{n}}$，由 $S=\{v_n\}$，$\varepsilon=\frac{1}{n}$ 和$\delta=\frac{1}{\sqrt{n}}$知，存在 $\zeta\in C([0,1]\times H_0^1(\Omega),H_0^1(\Omega))$，使得

$$I(\zeta(1,v_n)) \leqslant \gamma-\frac{1}{n} \qquad \|\zeta(1,v_n)-v_n\| \leqslant \frac{1}{\sqrt{n}} < \frac{r}{2} \tag{13}$$

由 $\inf\limits_{u\in\partial B_{2r}} I\leqslant\gamma=I(u_1)\leqslant\inf\limits_{u\in\partial B_{2r}} I$，得 $\gamma=\inf\limits_{u\in\partial B_{2r}} I$．故(13)式与 $\inf\limits_{u\in\partial B_{2r}} I$ 的定义矛盾．由(12)式和(Ce)条件，取一个子列(仍记为$\{w_n\}$)强收敛到 w_0，这里 w_0 是 I 的临界点．由不等式

$$\|v_n-w_n\| \geqslant \big|\,\|v_n-u_1\|-\|u_1-w_n\|\,\big| = \big|\,r-\|u_1-w_n\|\,\big|$$

和当 $n\to\infty$ 时，$\|v_n-w_n\|\to 0$，我们得到 $\|u_1-w_0\|=r$．

定理 1 的证明　由引理 4，I_β^- 有一个非平凡全局极小值点 $u_1<0$．由半线性椭圆型方程的正则性[15]，有 $u_1\in C^1(\overline{\Omega})$，且存在 $\delta>0$，使得对任意 $u\in C_0^1(\Omega)$，有

$$I_{\beta}^{-}(u)=I_{\beta}(u)$$

这里 $\|u-u_1\|_{C^1}<\delta$ 且 $u\leqslant 0$. 因此，u_1 是泛函 I 在 $C_0^1(\Omega)$ 中的局部极小值点. 由文献[14]，u_1 也是 I 在 $H_0^1(\Omega)$ 中的局部极小值点. 如果 v_0 也是 I_{β}^{-} $(v_0\neq u_1)$ 的全局极小值点，则 v_0 是 I 的另一个非平凡临界点，证毕.

我们假设 u_1 是 I_{β}^{-} 唯一的全局极小值点，则存在 $r>0$，使得 $2r<\operatorname{dist}(u_1, 0)$，且 $B_r=\{u\in H_0^1(\Omega):\|u_1-u\|<r\}$ 时，有

$$I_{\beta}^{-}(u_1)=I(u_1)\leqslant\inf_{u\in\partial B_{2r}}I<0$$

若 $\inf\limits_{u\in\partial B_r}I=I(u_1)$，由引理6，$I$ 在边界上还有一个临界点. 因此，假设 $\inf\limits_{u\in\partial B_r}I>I(u_1)$.

由条件(f_3)，当 $t\to+\infty$ 时，有

$$I(t\varphi_1)=\frac{b}{4}\|\varphi_1\|^4t^4-\frac{\lambda_1}{4}|\varphi_1|_4^4t^4-\int_{\Omega}F(x, t\varphi_1)\mathrm{d}x=-\int_{\Omega}F(x, t\varphi_1)\mathrm{d}x\to-\infty$$

因此，存在 $t_0>0$，使得 $\|u_1-t_0\varphi_1\|>2r$ 且 $I(t_0\varphi_1)<I(u_1)$，即

$$\inf_{u\in\partial B_r}I>\max\{I(t_0\varphi_1), I(u_1)\}$$

由引理1和山路定理，泛函 I 有一个临界值

$$c=\inf_{\gamma\in\Gamma}\max_{t\in[0, 1]}I(\gamma(t))$$

这里

$$\Gamma=\{\gamma\in C([0, 1], H_0^1(\Omega)):\gamma(0)=t_0\varphi_1, \gamma(1)=u_1\}$$

现在，我们通过证明 $c<0$ 来证 I 另外一个非平凡临界点的存在性. 即证存在一个 $\gamma_0\in\Gamma$，使得 $\max\limits_{t\in[0, 1]}I(\gamma_0(t))<0$. 由方程(3)中 $\alpha=\beta$ 时的第二特征值 λ_2 的定义(见文献[2,13])：

$$\lambda_2=\inf_{\gamma\in\Gamma_0}\max_{t\in[0, 1]}\|\gamma(t)\|^4$$

这里

$$\Gamma_0=\{\gamma\in C([0, 1], S):\gamma(0)=\varphi_1, \gamma(1)=-\varphi_1\}$$
$$S=\{u\in H_0^1(\Omega):|u|_4^4=1\}$$

则存在 $d>\lambda_2$ 和 $\gamma\in\Gamma_0$，使得 $\max\limits_{t\in[0, 1]}\|\gamma(t)\|^4<d$. 再结合(11)式，有

$$I(s\gamma(t))\leqslant\frac{\mathrm{d}}{4}s^4-\frac{\lambda_1}{4}s^4+\frac{\lambda_1-\beta}{4}|\gamma(t)^-|_4^4s^4-\int_{\Omega}F(x, s\gamma(t))\mathrm{d}x\leqslant$$
$$\frac{\mathrm{d}-\lambda_1}{4}s^4+\frac{\lambda_1-\beta}{4}|\gamma(t)^-|_4^4s^4-C_0|\gamma(t)|_r^rs^r+C_4s^4$$

因此，对于充分小的 $s>0$，有

$$\max_{t\in[0, 1]}I(s\gamma(t))<0\tag{14}$$

现在固定 $s>0$ 满足(14)式和 $s<t_0$. 由条件(f_1)，对任意的 $\tau\in[s, t_0]$，有

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}I(\tau\varphi_1)=-\frac{1}{\tau}\left(\int_{\Omega}f(x, \tau\varphi_1)(\tau\varphi_1)\mathrm{d}x\right)<0$$

这表明对任意的 $\tau\in[s, t_0]$，有

$$I(\tau\varphi_1)\leqslant I(s\varphi_1)<0\tag{15}$$

定义 $\gamma_1\in\Gamma$ 如下：

$$\gamma_1(t)=\begin{cases}2s\varphi_1t+(1-2t)t_0\varphi_1 & 0\leqslant t\leqslant\frac{1}{2}\\ s\gamma(2t-1) & \frac{1}{2}\leqslant t\leqslant 1\end{cases}$$

由(14)式和(15)式，有

$$\gamma_1(0) = t_0\varphi_1 \qquad \gamma_1\left(\frac{1}{2}\right) = s\varphi_1 \qquad \gamma_1(1) = -s\varphi_1 \qquad \max_{t\in[0,1]} I(\gamma_1(t)) < 0 \tag{16}$$

因为 u_1 是 I_β^- 唯一的全局极小值点，且 I_β^- 满足(PS)条件，由第二形变引理，存在 $\eta \in C([0,1]\times H_0^1(\Omega), H_0^1(\Omega))$，使得对任意的 $0\leqslant t\leqslant 1$，有

$$\eta(0, -s\varphi_1) = -s\varphi_1 \qquad \eta(1, -s\varphi_1) = u_1 \qquad I_\beta^-(\eta(t, -s\varphi_1)) \leqslant I_\beta^-(-s\varphi_1)$$

因此，对任意的 $t\in[0,1]$，有

$$I(\xi(t)) = I_\beta^-(\xi(t)) \leqslant I_\beta^-(\eta(t, -s\varphi_1)) \leqslant I_\beta^-(-s\varphi_1) = I(-s\varphi_1) \tag{17}$$

这里 $\xi(t) = (\eta(t, -s\varphi_1))^-$ 是一条从 $-s\varphi_1$ 到 u_1 的连续路径．定义

$$\gamma_0(t) = \begin{cases} \gamma_1(2t) & 0\leqslant t\leqslant \dfrac{1}{2} \\ \xi(2t-1) & \dfrac{1}{2}\leqslant t\leqslant 1 \end{cases}$$

由(16)式和(17)式，有 $\gamma_0(t)\in\Gamma$ 且 $\max\limits_{t\in[0,1]} I(\gamma_0(t)) < 0$，这表明 $c<0$．故问题(1)至少有两个非平凡解．

为了证明定理 2，我们现在回忆一下文献[11]中的一些结论．对任意的 $s\geqslant 0$，定义

$$J_s(u) = \|u\|^4 - s|u^+|_4^4 \qquad c(s) = \inf_{\gamma\in\Sigma}\max_{t\in[0,1]} J_s(\gamma(t))$$

这里 $\Sigma = \{\gamma\in C([0,1], S)：\gamma(0) = \varphi_1, \gamma(1) = -\varphi_1\}$．文献[11]已经证明了 $c(s)>\lambda_1$．同样地，对任意 $s\geqslant 0$，定义

$$\tilde{J}_s(u) = \|u\|^4 - s|u^-|_4^4 \qquad \tilde{c}(s) = \inf_{\gamma\in\Sigma}\max_{t\in[0,1]} \tilde{J}_s(\gamma(t))$$

且文献[11]证明了对任意的 $s\geqslant 0$ 有 $\tilde{c}(s)>\lambda_1$．

引理 5　若 f 满足条件(f_1),(f_3)．则对任意的 $\alpha\geqslant\lambda_1$，存在 $t_1>0$，使得 $\inf\limits_{u\in E_\alpha} I > \max\{I(t_1\varphi_1), I(-t_1\varphi_1)\}$，这里 $E_\alpha = \{u\in H_0^1(\Omega)：\|u\|^4 - \alpha|u^+|_4^4 \geqslant c(\alpha)|u|_4^4\}$．

证　首先证明 $\inf\limits_{u\in E_\alpha} I > -\infty$．因为 $c(\alpha)>\lambda_1$，则存在 $\varepsilon>0$，使得 $c(\alpha)-\lambda_1>\varepsilon$．由(2)式和(7)式，对任意的 $u\in H_0^1(\Omega)$，存在 $C_5>0$ 使得

$$\int_\Omega F(x,u)\mathrm{d}x \leqslant \frac{\varepsilon}{4}|u|_4^4 + C_5\|u\|$$

因此，对任意的 $u\in E_\alpha$，有

$$I(u) \geqslant \frac{c(\alpha)}{4}|u|_4^4 - \frac{\lambda_1}{4}|u^-|_4^4 - \frac{\varepsilon}{4}|u|_4^4 - C_5\|u\| \geqslant \frac{1}{4}(c(\alpha)-\lambda_1-\varepsilon)|u|_4^4 - C_5\|u\|$$

这表明 $\inf\limits_{u\in E_\alpha} I > -\infty$．接着，证明 $\lim\limits_{|t|\to\infty} I(t\varphi_1) = -\infty$．由条件$(f_3)$，当 $t\to+\infty$ 时，有

$$I(t\varphi_1) \leqslant \frac{1}{4\lambda_1}(\lambda_1-\alpha)\|\varphi_1\|^4 t^4 - \int_\Omega F(x, t\varphi_1)\mathrm{d}x \to -\infty$$

$$I(-t\varphi_1) = \int_\Omega F(x, -t\varphi_1)\mathrm{d}x \to -\infty$$

因此，存在 $t_1>0$ 使得 $\inf\limits_{u\in E_\alpha} I > \max\{I(t_1\varphi_1), I(-t_1\varphi_1)\}$．

对任意的 $\alpha\geqslant\lambda_1$，定义集合

$$\Gamma_\alpha = \{\gamma\in C([0,1], H_0^1(\Omega))：\gamma(0) = t_1\varphi_1, \gamma(1) = -t_1\varphi_1\}$$

则有如下结论：

引理 6　假如 f 满足条件(f_1)，$\alpha\geqslant\lambda_1$，则对任意的 $\gamma\in\Gamma_\alpha$，有 $\gamma([0,1])\cap E_\alpha\neq\varnothing$．

证　令 $\gamma\in\Gamma_\alpha$．如果 $0\in\gamma([0,1])$，则 $\gamma([0,1])\cap E_\alpha = \{0\}\neq\varnothing$ 成立．现在，假设 $0\notin\gamma([0,1])$．对任意的 $0\neq u\in H_0^1(\Omega)$，定义 $\pi(u) = \dfrac{u}{|u|_4}$，则 $\pi\circ\gamma$ 是连续的．由 $\pi(u)$ 的定义，有

$$\pi(\gamma(0)) = \varphi_1 \qquad \pi(\gamma(1)) = -\varphi_1$$

即 $\pi \circ \gamma \in \Sigma$. 由 $c(\alpha)$ 的定义，存在 $t^* \in [0,1]$，使得 $J_\alpha(\pi \circ \gamma(t^*)) \geqslant c(\alpha)$. 因为 $|\pi(\gamma(t^*))|_4^4 = 1$，所以对任意的 $\tau \geqslant 0$，有

$$\|\tau\pi(\gamma(t^*))\|^4 - \alpha|(\tau\pi(\gamma(t^*)))^+|_4^4 \geqslant c(\alpha)|\tau\pi(\gamma(t^*))|^4$$

即对任意的 $\tau \geqslant 0$，有 $\tau\pi(\gamma(t^*)) \in E_\alpha$. 特别地，$\gamma(t^*) = |\gamma(t^*)|_4 \pi(\gamma(t^*)) \in E_\alpha$，因此

$$\gamma([0,1]) \cap E_\alpha = \{\gamma(t^*)\} \neq \varnothing$$

定理 2 的证明　由引理 5 和引理 6，I 的极小极大值为

$$c_1 = \inf_{\gamma \in \Gamma_\alpha} \max_{t \in [0,1]} I(\gamma(t)) \geqslant \inf_{u \in E_\alpha} I > \max\{I(t_1\varphi_1), I(-t_1\varphi_1)\}$$

即 I 的山路值. 因为泛函 I 满足(Ce)条件，所以 c_1 是 I 的临界值. 现在，通过证明 $c_1 < 0$ 去证明 I 非平凡临界点的存在性. 即证：存在 $\gamma_2 \in \Gamma_\alpha$，使得 $\max\limits_{t \in [0,1]} I(\gamma_2(t)) < 0$. 现在固定 $d > 0$ 且满足 $d > c(0)$，则存在 $\gamma \in \Sigma$，使得 $\max\limits_{t \in [0,1]} \|\gamma(t)\|^4 < d$. 由(12)式，得

$$I(s\gamma(t)) \leqslant \frac{d}{4}s^4 - \frac{1}{4}\min\{\alpha,\beta\}|\gamma(t)|_4^4 s^4 - C_0|\gamma(t)|_r^r s^r + C_4 s^4$$

因此，由 $r \in (1,2)$，则对充分小的 $s > 0$，有

$$\max_{t \in [0,1]} I(s\gamma(t)) < 0 \tag{18}$$

现在固定 $s > 0$ 使得(18)式成立且 $s < t_1$. 由条件(f_1)，对任意的 $t \in [s, t_1]$，有

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} I(t\varphi_1) \leqslant -\frac{1}{t}\left(\int_\Omega f(x, t\varphi_1)(t\varphi_1)\mathrm{d}x\right) < 0$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} I(-t\varphi_1) = -\frac{1}{t}\left(\int_\Omega f(x, -t\varphi_1)(-t\varphi_1)\mathrm{d}x\right) < 0$$

这表明，对任意的 $t \in [s, t_1]$，有

$$\begin{gathered} I(t\varphi_1) \leqslant I(s\varphi_1) < 0 \\ I(-t\varphi_1) \leqslant I(-s\varphi_1) < 0 \end{gathered} \tag{19}$$

定义

$$\gamma_2(t) = \begin{cases} 3s\varphi_1 t + (1-3t)t_1\varphi_1 & 0 \leqslant t \leqslant \dfrac{1}{3} \\ s\gamma(3t-1) & \dfrac{1}{3} \leqslant t \leqslant \dfrac{2}{3} \\ 3(1-t)(-s\varphi_1) + (3t-2)(-t_1\varphi_1) & \dfrac{2}{3} \leqslant t \leqslant 1 \end{cases}$$

由(18)式和(19)式，有 $\gamma_2 \in \Gamma_\alpha$ 且 $\max\limits_{t \in [0,1]} I(\gamma_2(t)) < 0$，即 $c_1 < 0$.

参考文献：

[1] LIANG Z P, LI F Y, SHI J P. Positive Solutions of Kirchhoff-Type Non-Local Elliptic Equation: A Bifurcation Approach [J]. Proceedings of the Royal Society of Edinburgh (Section A Mathematics), 2017, 147(4): 875-894.

[2] LI F Y, RONG T, LIANG Z P. Fučik Spectrum for the Kirchhoff-Type Problem and Applications [J]. Nonlinear Anal, 2019, 182: 280-302.

[3] CUESTA M, DE FIGUEIREDO D, GOSSEZ J P. The Beginning of the Fučik Spectrum for the p-Laplacian [J]. Journal of Differential Equations, 1999, 159(1): 212-238.

[4] RYNNE B P. Landesman-Lazer Conditions for Resonant p-Laplacian Problems with Jumping Nonlinearities [J]. Journal of Differential Equations, 2016, 261(10): 5829-5843.

[5] TANAKA M. Existence of a Non-Trivial Solution for the p-Laplacian Equation with Fučik Type Resonance at Infinity [J]. Nonlinear Anal, 2009, 70(6): 2165-2175.

[6] 杜佳璐，吕　颖. 一类分数阶 Kirchhoff 方程的半经典解 [J]. 西南师范大学学报(自然科学版)，2021，46(2)：30-36.

[7] 邵正梅，欧增奇. 具有凹凸非线性项的 Kirchhoff 方程的多解性 [J]. 西南师范大学学报(自然科学版)，2020，45(4)：25-29.

[8] 余　芳，陈文晶. 带有临界指数增长的分数阶问题解的存在性 [J]. 西南大学学报(自然科学版)，2020，42(10)：116-123.

[9] 贺书文，商彦英. 一类带有周期位势的分数阶耦合系统的正基态解 [J]. 西南大学学报(自然科学版)，2019，41(2)：64-69.

[10] LIANG Z P，LI F Y，SHI J P. Positive Solutions to Kirchhoff Type Equations with Nonlinearity Having Prescribed Asymptotic Behavior [J]. Annales de l'Institut Henri Poincaré C. Analyse non linéaire，2014，31(1)：155-167.

[11] RONG T，LI F Y，LIANG Z P. Existence of Nontrivial Solutions for Kirchhoff-Type Problems with Jumping Nonlinearities [J]. Applied Mathematics Letters，2019，95：137-142.

[12] SUN J J，TANG C L. Resonance Problems for Kirchhoff Type Equations [J]. Discrete and Continuous Dynamical Systems，2013，33(5)：2139-2154.

[13] SONG S Z，CHEN S J，TANG C L. Existence of Solutions for Kirchhoff Type Problems with Resonance at Higher Eigenvalues [J]. Discrete and Continuous Dynamical Systems，2016，36(11)：6452-6473.

[14] FAN X L. A Brezis-Nirenberg Type Theorem on Local Minimizers for $p(x)$-Kirchhoff Dirichlet Problems and Applications [J]. Differential Equations and Application，2010，2(4)：537-551.

[15] GILBARG D，TRUDINGER N S. Elliptic Partial Differential Equations of Second Order [M]. Berlin：Springer Heidelberg，2001.

Existence of Non-Trivial Solutions for Kirchhoff-Type Equations with Fučik-Type Resonance at Infinity

CHEN Xing-ju，　OU Zeng-qi

School of Mathematics and Statistics，Southwest University，Chongqing 400715，China

Abstract：In this paper，we obtain the existence of non-trivial solutions for the Kirchhoff type equation with Fučik-type resonance at infinity by variational methods.

$$\begin{cases} -\left(\int_\Omega |\nabla u|^2 \mathrm{d}x\right)\Delta u = \alpha(u^+)^3 + \beta(u^-)^3 + f(x,u) & x \in \Omega \\ u = 0 & x \in \partial\Omega \end{cases}$$

where Ω is an open ball in $\mathbb{R}^N(N=1,2,3)$，$\alpha,\beta\in\mathbb{R}$，$u^+=\max\{u,0\}$，$u^-=\min\{u,0\}$，and $u=u^++u^-$. The nonlinear term $f\in C(\overline{\Omega}\times\mathbb{R},\mathbb{R})$ satisfies $f(x,0)=0$. By using Mountain Pass Theorem with (Ce) condition，we obtain the existence of nontrivial solutions for the equations on two trivial curves of Fučik spectrum.

Key words：the Kirchhoff type equation；Fučik-type resonance；Mountain Pass Theorem；(Ce) condition

责任编辑　廖　坤