

一类具有 Hardy-Sobolev 临界指数的 Kirchhoff 方程的多解性^①

苑紫冰, 欧增奇

西南大学 数学与统计学院, 重庆 400715

摘要: 考虑一类 Kirchhoff 方程

$$\begin{cases} -\left(a+b\int_{\Omega}|\nabla u|^2 dx\right)\Delta u = \frac{u^3}{|x|} + \lambda u^q & x \in \Omega \\ u = 0 & x \in \partial\Omega \end{cases}$$

其中 $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ 是具有光滑边界的有界区域, 且 $0 \in \Omega$, $a, b, \lambda > 0$, $1 < q < 3$. 当 $b > \frac{1}{A_1^2}$ 时(其中 $A_1 > 0$ 是最佳 Hardy-Sobolev 常数), 应用山路定理得到了这类带有 Hardy-Sobolev 临界指数的 Kirchhoff 方程两个正解的存在性.

关键词: Kirchhoff 方程; Hardy-Sobolev 临界指数; 山路定理; 正解

中图分类号: O176.3

文献标志码: A

文章编号: 1000-5471(2021)08-0032-05

本文考虑如下一类具有 Hardy-Sobolev 项的 Kirchhoff 方程的多解性问题:

$$\begin{cases} -\left(a+b\int_{\Omega}|\nabla u|^2 dx\right)\Delta u = \frac{u^3}{|x|} + \lambda u^q & x \in \Omega \\ u = 0 & x \in \partial\Omega \end{cases} \quad (1)$$

这里的 $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ 是具有光滑边界的有界区域, $0 \in \Omega$, $a, b \geq 0$ 且 $a+b > 0$, $\lambda > 0$, $1 < q < 3$, 并且 4 是 Hardy-Sobolev 临界指数. 关于 Kirchhoff 方程解的存在性和多重性已有很多的结果^[1-8]. 特别地, 文献[1]考虑了方程(1)在 $0 < q < 1$, $a, b, \lambda > 0$ 时的情形. 当 $b < \frac{1}{A_1^2}$ 时, 通过变分法, 可以得到方程(1)有两个正解; 当 $b > \frac{1}{A_1^2}$ 时, 通过临界点定理, 可以得到方程(1)无穷多对不同的解. 当 $a = 1, b = 0$ 时, 方程(1)变成了具有 Hardy-Sobolev 项的半线性椭圆方程, 许多论文已经研究过这类方程^[2,9-11]. 文献[4]研究了下面的方程:

$$\begin{cases} -\Delta u = \frac{u^3}{|x|} + \lambda u^q & x \in \Omega \\ u = 0 & x \in \partial\Omega \end{cases} \quad (2)$$

① 收稿日期: 2020-11-30

基金项目: 国家自然科学基金项目(11801465, 11971393).

作者简介: 苑紫冰, 硕士研究生. 主要从事非线性泛函分析的研究.

通信作者: 欧增奇, 副教授.

其中 $0 < q < 1$, 通过变分法得到了方程(2)的两个正解. 根据上述文献的启发, 我们将考虑方程(1)解的多重性.

方程(1)的能量泛函 I 为

$$I(u) = \frac{a}{2} \|u\|^2 + \frac{b}{4} \|u\|^4 - \frac{1}{4} \int_{\Omega} \frac{|u|^4}{|x|} dx - \frac{\lambda}{q+1} \int_{\Omega} |u|^{q+1} dx \quad u \in H_0^1(\Omega)$$

这里的 $H_0^1(\Omega)$ 是 Sobolev 空间, 它的范数为 $\|u\| = \left(\int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}$. $L^p(\Omega) (1 \leq p < +\infty)$ 是 Lebesgue

空间, 它的范数为 $\|u\|_p = \left(\int_{\Omega} |u|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}$. 我们用 $H^{-1}(\Omega)$ 来表示 $H_0^1(\Omega)$ 的对偶空间, 用 S_q 表示 $H_0^1(\Omega)$

嵌入到 $L^q(\Omega) (1 < q < 2^*)$ 的最佳 Sobolev 常数. 对任意的 $u \in H_0^1(\Omega)$, 有

$$\|u\|_q \leq S_q \|u\| \quad (3)$$

u 是方程(1)的解当且仅当 u 是泛函 I 的临界点, 即对任意的 $v \in H_0^1(\Omega)$, 有

$$a \int_{\Omega} \nabla u \nabla v dx + b \|u\|^2 \int_{\Omega} \nabla u \nabla v dx = \int_{\Omega} \frac{|u|^3}{|x|} uv dx + \lambda \int_{\Omega} |u|^q uv dx$$

设 $A_s (0 \leq s < 2)$ 是最佳 Sobolev-Hardy 常数, 即

$$A_s = \inf_{u \in H_0^1(\Omega) \setminus \{0\}} \frac{\int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx}{\left(\int_{\Omega} \frac{|u|^{6-2s}}{|x|^s} dx \right)^{\frac{1}{3-s}}} \quad (4)$$

特别地, 当 $s = 0$ 时,

$$A_0 = \inf_{u \in H_0^1(\Omega) \setminus \{0\}} \frac{\int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx}{\left(\int_{\Omega} |u|^6 dx \right)^{\frac{1}{3}}}$$

是最佳 Sobolev 常数.

定理 1 对于 $1 < q < 3, b > \frac{1}{A_1^2}$, 存在 $\lambda^* > 0$, 使得当 $\lambda > \lambda^*$ 时, 方程(1)至少有两个正解.

注 1 文献[1]考虑的是 $0 < q < 1$ 的情况, 而本文考虑的是 $1 < q < 3$ 的情况, 是对文献[1]的一个推广.

引理 1 设 $a, b > 0, 1 < q < 3, b > \frac{1}{A_1^2}$, 则 I 的有界(PS)序列都有一个强收敛子列.

证 设 $\{u_n\}$ 是 I 在 $H_0^1(\Omega)$ 中的有界(PS)序列, 即

$$I(u_n) \rightarrow c \quad I'(u_n) \rightarrow 0 \quad (5)$$

取一个子列, 仍记为 $\{u_n\}$, 则存在 $u \in H_0^1(\Omega)$, 使得

$$\begin{cases} u_n \rightharpoonup u & x \in H_0^1(\Omega) \\ u_n \rightarrow u & x \in L^p(\Omega), 1 \leq p < 6 \\ u_n(x) \rightarrow u(x) & \text{a. e. } x \in \Omega \end{cases} \quad (6)$$

设 $v_n = u_n - u$, 下面需要证明: 当 $n \rightarrow \infty$ 时, $\|v_n\| \rightarrow 0$. 定义 $\lim_{n \rightarrow \infty} \|v_n\| = l$. 由(6)式可以得到

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} |u_n|^{q+1} dx = \int_{\Omega} |u|^{q+1} dx \quad (7)$$

$$\|u_n\|^2 = \|v_n\|^2 + \|u\|^2 + o(1) \quad (8)$$

$$\|u_n\|^4 = \|v_n\|^4 + \|u\|^4 + 2\|v_n\|^2 \|u\|^2 + o(1) \quad (9)$$

由文献[12], 有

$$\int_{\Omega} \frac{|u_n|^4}{|x|} dx = \int_{\Omega} \frac{|v_n|^4}{|x|} dx + \int_{\Omega} \frac{|u|^4}{|x|} dx + o(1) \quad (10)$$

由(5)式和(7)式,可以得到

$$a \|u_n\|^2 + b \|u_n\|^4 - \int_{\Omega} \frac{|u_n|^4}{|x|} dx - \lambda \int_{\Omega} |u|^{q+1} dx = o(1)$$

因此,由(8)–(10)式可得

$$a \|u\|^2 + a \|v_n\|^2 + b \|u\|^4 + b \|v_n\|^4 + 2b \|u\|^2 \|v_n\|^2 - \int_{\Omega} \frac{|v_n|^4}{|x|} dx - \int_{\Omega} \frac{|u|^4}{|x|} dx - \lambda \int_{\Omega} |u|^{q+1} dx = o(1) \quad (11)$$

再根据(5)式得

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \langle I'(u_n), u \rangle = a \|u\|^2 + b \|u\|^4 + bl^2 \|u\|^2 - \int_{\Omega} \frac{|u|^4}{|x|} dx - \lambda \int_{\Omega} |u|^{q+1} dx = o(1) \quad (12)$$

由(11)式和(12)式可得

$$a \|v_n\|^2 + b \|v_n\|^4 + b \|v_n\|^2 \|u\|^2 - \int_{\Omega} \frac{|v_n|^4}{|x|} dx = o(1) \quad (13)$$

再由(4)式,可以得到

$$\int_{\Omega} \frac{|v_n|^4}{|x|} dx \leq \frac{\|v_n\|^4}{A_1^2}$$

结合(13)式,当 $n \rightarrow \infty$ 时可得

$$al^2 + bl^4 + bl^2 \|u\|^2 \leq \frac{l^4}{A_1^2}$$

又因为 $b > \frac{1}{A_1^2}$, 从而 $l = 0$, 即当 $n \rightarrow \infty$ 时, 在 $H_0^1(\Omega)$ 上 $u_n \rightarrow u$.

引理 2^[13] 设在 $H_0^1(\Omega)$ 中, $I \in C^1(H_0^1(\Omega), \mathbb{R})$ 有下界且满足(PS)条件, 则 I 能达到全局极小值, 即存在 $u_* \in H_0^1(\Omega)$, 使得 $I(u_*) = \inf_{u \in H_0^1(\Omega)} I(u)$.

定理 1 的证明 首先对方程(1)的第一个解进行证明. 对任意 $u \in H_0^1(\Omega)$, 由 Hölder 不等式和(4)式可以得到

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} |u|^{q+1} dx &\leq \|u\|_{\frac{q+1}{q}}^{q+1} \|\Omega\|^{\frac{5-q}{6}} \leq \|\Omega\|^{\frac{5-q}{6}} A_0^{-\frac{1+q}{2}} \|u\|^{1+q} \\ \int_{\Omega} \frac{|u|^4}{|x|} dx &\leq A_1^{-2} \|u\|^4 \end{aligned}$$

于是

$$\begin{aligned} I(u) &= \frac{a}{2} \|u\|^2 + \frac{b}{4} \|u\|^4 - \frac{1}{4} \int_{\Omega} \frac{|u|^4}{|x|} dx - \frac{\lambda}{q+1} \int_{\Omega} |u|^{q+1} dx \geq \\ &\frac{a}{2} \|u\|^2 + \frac{bA_1^2 - 1}{4A_1^2} \|u\|^4 - \frac{\lambda \|u\|^{1+q}}{(1+q)A_0^{\frac{1+q}{2}}} \end{aligned} \quad (14)$$

因为 $b > \frac{1}{A_1^2}$, $1 < q < 3$, 所以 I 在 $H_0^1(\Omega)$ 中强制且有下界. 在 $H_0^1(\Omega)$ 中取一点 $u_0 \neq 0$, 使得存在

$$\lambda^* = \frac{(q+1)(2a \|u_0\|^2 + b \|u_0\|^4)}{4 \int_{\Omega} |u_0|^{q+1} dx}$$

当 $\lambda > \lambda^*$ 时, 有

$$\begin{aligned} I(u_0) &= \frac{a}{2} \|u_0\|^2 + \frac{b}{4} \|u_0\|^4 - \frac{1}{4} \int_{\Omega} \frac{|u_0|^4}{|x|} dx - \frac{\lambda}{q+1} \int_{\Omega} |u_0|^{q+1} dx \leq \\ &\frac{a}{2} \|u_0\|^2 + \frac{b}{4} \|u_0\|^4 - \frac{\lambda}{q+1} \int_{\Omega} |u_0|^{q+1} dx < \end{aligned}$$

$$\frac{a}{2} \|u_0\|^2 + \frac{b}{4} \|u_0\|^4 - \frac{\lambda^*}{q+1} \int_{\Omega} |u_0|^{q+1} dx < 0$$

由引理 1、引理 2, 以及 I 在 $H_0^1(\Omega)$ 中是有下界的, 则 I 存在一个临界点 $u_1 \in H_0^1(\Omega)$, 使得

$$I(u_1) = \inf_{u \in H_0^1(\Omega)} I(u) \leq I(u_0) < 0$$

从而 u_1 是方程(1) 的一个非平凡解. 又因为 $I(|u_1|) = I(u_1)$, 不失一般性, 我们可以假设 $u_1 \geq 0$. 由强极大值原理^[14], 可以得到在 Ω 上 $u_1 > 0$. 因此, u_1 是方程(1) 的一个正解, 并且 $I(u_1) < 0$.

下面对第二个正解进行证明. 由(14) 式, 可得存在 $\rho, \delta > 0$ 且 $\rho < \|u_1\|$, 使得对任意的 $u \in H_0^1(\Omega)$, 当 $\|u\| = \rho$ 时, $I(u) \geq \delta > 0$. 由山路定理可知, 存在 $\{u_n\} \subset H_0^1(\Omega)$, 使得

$$I(u_n) \rightarrow c \quad I'(u_n) \rightarrow 0$$

其中

$$c = \inf_{\gamma \in \Gamma} \max_{t \in [0, 1]} I(\gamma(t)) \geq \max\{I(0), I(u_1)\}$$

$$\Gamma = \{\gamma \in C([0, 1], H_0^1(\Omega)) : \gamma(0) = 0, \gamma(1) = u_1\}$$

又因

$$c < \sup_{t \in [0, 1]} I(tu_1) = \sup_{t \in [0, 1]} \left\{ \frac{at^2}{2} \|u_1\|^2 + \frac{bt^4}{4} \|u_1\|^4 - \frac{t^4}{4} \int_{\Omega} \frac{|u_1|^4}{|x|} dx - \frac{\lambda t^{q+1}}{q+1} \int_{\Omega} |u_1|^{q+1} dx \right\} \leq$$

$$\sup_{t \in [0, 1]} \left\{ \frac{at^2}{2} \|u_1\|^2 + \frac{bt^4}{4} \|u_1\|^4 \right\} =$$

$$\frac{a}{2} \|u_1\|^2 + \frac{b}{4} \|u_1\|^4$$

由(14) 式可知 $\{u_n\}$ 在 $H_0^1(\Omega)$ 中有界, 再结合引理 1 可知, 存在一个收敛的子序列, 记为 $\{u'_n\}$, 和 $u_2 \in H_0^1(\Omega)$, 使得当 $n \rightarrow \infty$ 时, 在 $H_0^1(\Omega)$ 中 $u'_n \rightarrow u_2$. 因此 $\lim_{n \rightarrow \infty} I(u'_n) = I(u_2) = c > 0$ 且 $I'(u_2) = 0$. 因此, u_2 是方程(1) 的一个非零解, 与 u_1 是正解的证明方法相同, 可得 u_2 是方程(1) 的另一个正解.

参考文献:

- [1] LI H Y, PU Y, LIAO J F. Some Results for a Class of Kirchhoff Type Problem with Hardy-Sobolev Critical Exponent [J]. Mediterr J Math, 2019, 16(3): 1-16.
- [2] D'ANCONA P, SPAGNOLO S. Global Solvability for the Degenerate Kirchhoff Equation with Real Analytic Data [J]. Inventiones Mathematicae, 1992, 108(1): 247-262.
- [3] HUANG Y S, LIU Z, WU Y Z. On Kirchhoff Type Equations with Critical Sobolev Exponent [J]. J Math Anal Appl, 2018, 462(1): 483-503.
- [4] 刘选状, 吴行平, 唐春雷. 一类带有临界指数增长项的 Kirchhoff 型方程正的基态解的存在性 [J]. 西南大学学报(自然科学版), 2015, 37(6): 54-59.
- [5] 曾 兰, 唐春雷. 带有临界指数的 Kirchhoff 型方程正解的存在性 [J]. 西南师范大学学报(自然科学版), 2016, 41(4): 29-34.
- [6] 唐榆婷, 唐春雷. 一类带 Hardy-Sobolev 临界指数的 Kirchhoff 方程正解的存在性 [J]. 西南大学学报(自然科学版), 2017, 39(6): 81-86.
- [7] CAO D M, PENG S J. A Note on the Sign-Changing Solutions to Elliptic Problems with Critical Sobolev and Hardy Terms [J]. J Differential Equations, 2003, 193(2): 424-434.
- [8] TANG X H, CHENG B T. Ground State Sign-Changing Solutions for Kirchhoff Type Problems in Bounded Domains [J]. J Differential Equations, 2016, 216(4): 2384-2402.
- [9] BOUCHEKIF M, MATALLAH A. Multiple Positive Solutions for Elliptic Equations Involving a Concave Term and Critical Sobolev-Hardy Exponent [J]. Appl Math Lett, 2009, 22(2): 268-275.

- [10] CAO D M, HAN P G. Solutions for Semilinear Elliptic Equations with Critical Exponents and Hardy Potential [J]. J Differential Equations, 2004, 205(2): 521-537.
- [11] KANG D S, DENG Y B. Multiple Solutions for Inhomogeneous Elliptic Problems Involving Critical Sobolev-Hardy Exponents [J]. Nonlinear Anal, 2005, 60(4): 729-753.
- [12] GHOUSSOUB N, YUAN C. Multiple Solutions for Quasi-Linear PDEs Involving the Critical Sobolev and Hardy Exponents [J]. Trans Am Math Soc, 2000, 352(12): 5703-5743.
- [13] 钟承奎, 范先令, 陈文塬. 非线性泛函分析引论 [M]. 兰州: 兰州大学出版社, 1998.
- [14] BRÉZIS H, NIRENBERG L. H^1 Versus C^1 Local Minimizers [J]. Acad Sci Paris Sér I Math, 2009, 317: 465-472.

Multiple Solutions for a Class of Kirchhoff-Type Equations with Hardy-Sobolev Critical Exponent

YUAN Zi-bing, OU Zeng-qi

School of Mathematics and Statistics, Southwest University, Chongqing 400715, China

Abstract: Consider a class of Kirchhoff equations

$$\begin{cases} -\left(a + b \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx\right) \Delta u = \frac{u^3}{|x|} + \lambda u^q & x \in \Omega \\ u = 0 & x \in \partial\Omega \end{cases}$$

Where $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ is a bounded domain with smooth boundary and $0 \in \Omega$, $a, b, \lambda > 0$, $1 < q < 3$. When $b > \frac{1}{A_1^2}$ (where A_1 is the best Hardy-Sobolev constant), the existence of two positive solutions of the equation can be obtained by using the Mountain Pass Theorem and some lemmas.

Key words: Kirchhoff equation; Hardy-Sobolev critical exponent; Mountain Pass Theorem; positive solution

责任编辑 廖 坤