第 46 卷　第 8 期　　西南师范大学学报(自然科学版)　　2021 年 8 月
Vol. 46　No. 8　　Journal of Southwest China Normal University (Natural Science Edition)　　Aug.　2021

DOI:10.13718/j.cnki.xsxb.2021.08.007

一类 Schrödinger 方程解的 $L^{\infty}(\mathbb{R}^N)$ 估计[①]

潘慧兰，　王嘉慧，　李哲怡，　徐　鑫

重庆邮电大学 理学院，重庆 400065

摘要：在全空间 $\mathbb{R}^N(N\geqslant 1)$ 中考虑一类 Schrödinger 方程解的性质. 在该类 Schrödinger 方程中，若非线性项满足在无穷远处次临界且在原点处超线性的条件，则可利用迭代法得到该方程的解都属于 $L^{\infty}(\mathbb{R}^N)$ 空间.

关　键　词：Schrödinger 方程；超线性；次临界

中图分类号：O176.3　　**文献标志码**：A　　**文章编号**：1000－5471(2021)08－0037－04

量子力学是研究微观粒子的运动规律的物理学分支学科，它是研究原子、分子、凝聚态物质，以及原子核和基本粒子的结构、性质的基础理论，它与相对论一起构成了现代物理学的理论基础. 量子力学不仅是近代物理学的基础理论之一，而且在化学等有关学科和许多近代技术中也得到了广泛的应用. 在量子力学中，一个物理体系的状态由状态函数表示，而状态函数满足 Schrödinger 波动方程，于是经典物理量的量子化问题就归结为 Schrödinger 波动方程的求解问题[1].

近几十年来，许多物理和数学学者掀起了对如下一类具有物理意义的 Schrödinger 波动方程的研究热潮：

$$i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t}=-\hbar^2\Delta\psi+W(x)\psi-f(x,\psi)\qquad x\in\mathbb{R}^N \tag{1}$$

其中 $\hbar>0$ 是普朗克常数，W 是实值外部位势，$f\in C(\mathbb{R}^N\times\mathbb{R},\mathbb{R})$ 是非线性项且 $N\geqslant 1$. 我们注意到，驻波 $\psi=u\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}$ 是方程(1)的解当且仅当 u 满足如下 Schrödinger 方程：

$$\begin{cases}-\hbar^2\Delta u+V(x)u=f(x,u)\\ u\in H^1(\mathbb{R}^N)\end{cases} \tag{2}$$

其中 $V=W-\omega$，非线性项 $f(x,\psi)=f(x,u)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}$. 方程(2)的解的存在性在数学上也引起了广泛关注，尤其是利用变分方法考虑位势函数 V 和非线性项 f 在不同条件下其解的存在性[2-10]. 文献[3]得到了基态解存在性的同时，证明了基态解是径向的且指数衰减. 文献[4-5]分别在有界区域和无界区域上证明了解是属于 $L^{\infty}(\mathbb{R}^N)$ 的，$N\geqslant 3$. 文献[7-9]还考虑了解的集中行为. 近几年，不光解的存在性得到了极大关注，解的性质也引起了学者们巨大的研究兴趣. 文献[11]在强制位势的条件下，利用变分方法、Nehari-流形和各种分析技巧，对耦合参数的范围进行了讨论，得到了一类耦合非线性 Schrödinger-KdV 方程非平凡基态解的存在性结果. 文献[12]应用山路定理和一些引理，证明了一类带有凹凸非线性项的 Kirchhoff 方程多个解的存在性. 文献[13]研究了一类带有分数拉普拉斯算子的抛物方程，在任意初始能量的条件下，证明了解在有限时刻爆破，且得到了爆破时间的上界估计.

本文的主要目的就是研究解的性质，即：若方程有解，则其解是否都属于 $L^{\infty}(\mathbb{R}^N)$，$N\geqslant 1$? 我们的主

---

① 收稿日期：2020－08－05

基金项目：重庆市教委项目(KJQN20180636)；重庆邮电大学博士科研启动项目(A2017-124)；重庆邮电大学大学生科研训练计划项目(A2018-37).

作者简介：潘慧兰，博士，讲师. 主要从事非线性泛函分析的研究.

要结论对这一问题给出了答案.

定理 1 若$\inf V(x)=V_0>0$且非线性项$f\in C(\mathbb{R}^N\times\mathbb{R},\mathbb{R})$满足条件($F_1$):

(F_1) 对x一致有$\lim\limits_{t\to 0}\left|\dfrac{f(x,t)}{t}\right|=\lim\limits_{t\to\infty}\left|\dfrac{f(x,t)}{t^{p-1}}\right|=0$, $p\in(2,2^*)$, 其中2^*是 Sobolev 空间$H^1(\mathbb{R}^N)$嵌入到空间$L^p(\mathbb{R}^N)$的临界指数, 当$N=1,2$时, $2^*=+\infty$, 当$N\geqslant 3$时, $2^*=\dfrac{2N}{N-2}$.

如果u是方程(2)的解, 则$u\in L^\infty(\mathbb{R}^N)$, $N\geqslant 1$.

注 1 定理 1 在全空间$\mathbb{R}^N(N\geqslant 1)$上研究了$u\in L^\infty(\mathbb{R}^N)$, 所以它在某种程度上推广了文献[4-5]的结果. 此外, 定理 1 可以看作方程(2)存在性结果的补充, 进而对方程(2)后续的研究有一定的借鉴意义.

本文使用如下记号:

$H^1(\mathbb{R}^N)$是 Sobolev 空间, 具有范数$\|u\|_H^2=\int_{\mathbb{R}^N}(|\nabla u|^2+u^2)\mathrm{d}x$.

$L^p(\mathbb{R}^N)$是 Lebesgue 空间, 具有范数$|u|_p^p=\int_{\mathbb{R}^N}|u|^p\mathrm{d}x$, $p\in[1,+\infty)$, $|u|_\infty=\operatorname{ess}\sup\limits_{x\in\mathbb{R}^N}|u(x)|$.

$C,C_i(i=1,2,\cdots)$表示正常数, 且在不同的地方有可能是不同的.

不失一般性, 我们设$\hbar=1$, $V_0=1$. 注意到, 由条件(F_1)易得, 存在$C>0$使得对x一致有

$$f(x,t)t\leqslant\frac{1}{4}t^2+C|t|^p\qquad t\in\mathbb{R}\tag{3}$$

定理 1 的证明 设u是方程(2)的解. 如果$u=0$, 显然$u\in L^\infty(\mathbb{R}^N)$, $N\geqslant 1$. 下证$u\neq 0$时的情况, 我们将证明分成两种情形, 即$N\geqslant 3$和$N=1,2$的情形.

情形 1 $N=1,2$. 类似文献[4-5]的方法, 对于任意$k>0$, 定义

$$u_k(x)=\begin{cases}u(x) & |u(x)|\leqslant k\\ \pm k & \pm u(x)>k\end{cases}$$

对任意$\beta>1$, 我们直接计算可得

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^N}|\nabla(|u_k|^{\beta-1})u|^2\mathrm{d}x\leqslant&\int_{\mathbb{R}^N}|u_k|^{2(\beta-1)}|\nabla u|^2\mathrm{d}x+(\beta-1)^2\int_{\mathbb{R}^N}|u_k|^{2(\beta-1)}u^2|\nabla u_k|^2\mathrm{d}x+\\&2(\beta-1)\int_{\mathbb{R}^N}|u_k|^{2(\beta-2)}uu_k\nabla u\nabla u_k\mathrm{d}x\leqslant\\&\int_{\mathbb{R}^N}|u_k|^{2(\beta-1)}|\nabla u|^2\mathrm{d}x+(\beta^2-1)\int_{\mathbb{R}^N}|u_k|^{2(\beta-1)}u^2|\nabla u_k|^2\mathrm{d}x\end{aligned}\tag{4}$$

结合(3)式, 我们有

$$\int_{\mathbb{R}^N}f(x,u)|u_k|^{2(\beta-1)}u\mathrm{d}x\leqslant\frac{1}{4}\int_{\mathbb{R}^N}|u_k|^{2(\beta-1)}u^2\mathrm{d}x+C\int_{\mathbb{R}^N}|u|^{2(\beta-1)}u^2|u|^{p-2}\mathrm{d}x\tag{5}$$

将检验函数$\varphi_k=|u_k|^{2(\beta-1)}u$代入方程(2)得到

$$\int_{\mathbb{R}^N}(\nabla u\cdot\nabla\varphi_k+V(x)u\varphi_k)\mathrm{d}x=\int_{\mathbb{R}^N}f(x,u)\varphi_k\mathrm{d}x\tag{6}$$

注意到

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^N}\nabla u\cdot\nabla\varphi_k\mathrm{d}x=&\int_{\mathbb{R}^N}|u_k|^{2(\beta-1)}|\nabla u|^2\mathrm{d}x+2(\beta-1)\int_{\mathbb{R}^N}|u_k|^{2(\beta-1)}u^2|\nabla u_k|^2\mathrm{d}x\geqslant\\&\frac{1}{\beta}\int_{\mathbb{R}^N}|\nabla(|u_k|^{\beta-1})u|^2\mathrm{d}x\end{aligned}\tag{7}$$

由(5)-(7)式得

$$\begin{aligned}\frac{1}{4\beta}\int_{\mathbb{R}^N}[|\nabla(|u_k|^{\beta-1})u|^2+(|u_k|^{\beta-1}u)^2]\mathrm{d}x\leqslant&C\int_{\mathbb{R}^N}|u|^{2(\beta-1)}u^2|u|^{p-2}\mathrm{d}x\leqslant\\&C\left[\int_{\mathbb{R}^N}|u|^{2p}\mathrm{d}x\right]^{\frac{p-2}{2p}}\left[\int_{\mathbb{R}^N}||u_k|^{2(\beta-1)}u^2|^{\frac{2p}{p+2}}\mathrm{d}x\right]^{\frac{p+2}{2p}}=\\&C\left[\int_{\mathbb{R}^N}||u_k|^{2(\beta-1)}u^2|^{\frac{2p}{p+2}}\mathrm{d}x\right]^{\frac{p+2}{2p}}\end{aligned}\tag{8}$$

结合 Sobolev 嵌入，由(8)式得

$$\left[\int_{\mathbb{R}^N}(|u_k|^{(\beta-1)}u)^{2p}\mathrm{d}x\right]^{\frac{1}{p}} \leqslant C\beta\left[\int_{\mathbb{R}^N}||u_k|^{2(\beta-1)}u^2|^{\frac{2p}{p+2}}\mathrm{d}x\right]^{\frac{p+2}{2p}} \tag{9}$$

令(9)式中 $k\to\infty$，我们有

$$|u|_{2\beta p} \leqslant (C\beta)^{\frac{1}{2\beta}}|u|_{\frac{4\beta p}{p+2}} \tag{10}$$

此时，令

$$\beta_n = \left(\frac{p+2}{2}\right)^n \qquad n=1,2,\cdots;\ 2\beta_n p = \frac{4\beta_{n+1}p}{p+2} \tag{11}$$

将(10)式不断地迭代，得到

$$|u|_{2\beta_n p} \leqslant C^{\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{2\beta_i}}\prod_{i=1}^{n}\beta_i^{\frac{1}{2\beta_i}}|u|_{2\beta_1 p} \tag{12}$$

因为 $\beta_1 = \dfrac{p+2}{2} > 1$ 且 $\beta_i = \beta_1^{\,i}(i\geqslant 1)$，我们可以得到

$$\begin{cases}\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{\beta_i} = \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{\beta_1^i} \to \frac{p+2}{p} < +\infty \\ \displaystyle\prod_{i=1}^{n}\beta_i^{\frac{1}{2\beta_i}} = \beta_1^{\sum_{i=1}^{n}\frac{i}{2\beta_1^i}} \to \beta^* < +\infty\end{cases} \tag{13}$$

在(10)式中令 $n\to\infty$，可得 $|u|_{\infty} \leqslant C$.

情形 2　$N\geqslant 3$. 我们的证明与情形 1 是类似的，只需要将(8)式修正成

$$\begin{aligned}\frac{1}{\beta}\int_{\mathbb{R}^N}|\nabla(|u_k|^{\beta-1})u|^2\mathrm{d}x \leqslant & C\int_{\mathbb{R}^N}|u|^{2(\beta-1)}u^2|u|^{p-2}\mathrm{d}x \leqslant \\ & C\left[\int_{\mathbb{R}^N}|u|^{2^*}\mathrm{d}x\right]^{\frac{p-2}{2^*}}\left[\int_{\mathbb{R}^N}||u_k|^{2(\beta-1)}u^2|^{\frac{2^*}{p+2}}\mathrm{d}x\right]^{\frac{p+2}{2^*}} = \\ & C\left[\int_{\mathbb{R}^N}||u_k|^{2(\beta-1)}u^2|^{\frac{2^*}{p+2}}\mathrm{d}x\right]^{\frac{p+2}{2^*}}\end{aligned} \tag{14}$$

结合 Sobolev 嵌入，由(14)式得

$$\left[\int_{\mathbb{R}^N}||u_k|^{(\beta-1)}u|^{2^*}\mathrm{d}x\right]^{\frac{1}{p}} \leqslant C\beta\left[\int_{\mathbb{R}^N}||u_k|^{2(\beta-1)}u^2|^{\frac{2^*}{p+2}}\mathrm{d}x\right]^{\frac{p+2}{2^*}} \tag{15}$$

令(15)式中 $k\to\infty$，我们有

$$|u|_{2^*\beta} \leqslant (C\beta)^{\frac{1}{2\beta}}|u|_{\frac{2\cdot 2^*\beta}{p+2}} \tag{16}$$

令

$$\beta_n = \left(\frac{p+2}{2}\right)^n \qquad n=1,2,\cdots;\ 2^*\beta_n = \frac{2\cdot 2^*\beta_{n+1}}{p+2} \tag{17}$$

将(16)式不断地迭代，类似地得 $|u|_{\infty}\leqslant C$. 则方程(2)的解都属于 $L^{\infty}(\mathbb{R}^N)$ 空间.

参考文献：

[1] FEYNMAN R P, LEIGHTON R B, SANDS M, et al. The Feynman Lectures on Physics [M]. New-York: American Institute of Physics, 1966.

[2] AMBROSETTI A, RABINOWITZ P H. Dual Variational Methods in Critical Point Theory and Applications [J]. J Functional Analysis, 1973, 14(4): 349-381.

[3] BERESTYCKI H, LIONS P-L. Nonlinear Scalar Field Equations. I. Existence of a Ground State [J]. Arch Rational Mech Anal, 1983, 82(4): 313-345.

[4] COSTA D G, WANG Z-Q. Multiplicity Results for a Class of Superlinear Elliptic Problems [J]. Proc Amer Math Soc, 2005, 133(3): 787-794.

[5] LI G-D, LI Y-Y, TANG C-L. A Positive Solution of Asymptotically Periodic Schrödinger Equations with Local Superlinear Nonlinearities [J]. Electronic Journal of Qualitative Theory of Differential Equations, 2020(30): 1-15.

[6] LI Y Q, WANG Z-Q, ZENG J. Ground States of Nonlinear Schrödinger Equations with Potentials [J]. Ann Inst H Poincaré Anal Non Linéaire, 2006, 23(6): 829-837.
[7] WANG X F. On Concentration of Positive Bound States of Nonlinear Schrödinger Equations [J]. Comm Math Phys, 1993, 53(2): 229-244.
[8] PINO M, FELMER P L. Local Mountain Passes for Semilinear Elliptic Problems in Unbounded Domains [J]. Calc Var Partial Differential Equations, 1996, 4(2): 121-137.
[9] BYEON J, WANG Z Q. Standing Waves with a Critical Frequency for Nonlinear Schrödinger Equations [J]. Arch Ration Mech Anal, 2002, 65(4): 295-316.
[10] LIU J, LIAO J F, TANG C L. Ground State Solution for a Class of Schrödinger Equations Involving General Critical Growth Term [J]. Nonlinearity, 2017, 30(3): 899-911.
[11] 毕文静,唐春雷,丁 凌. 一类耦合非线性Schrödinger-KdV系统基态解的存在性 [J]. 西南师范大学学报(自然科学版), 2021, 46(2): 37-42.
[12] 邵正梅,欧增奇. 具有凹凸非线性项的Kirchhoff方程的多解性 [J]. 西南师范大学学报(自然科学版), 2020, 45(4): 25-29.
[13] 江蓉华,周 军. 一类带有分数拉普拉斯算子的抛物方程的解在任意初始能量下的爆破性 [J]. 西南大学学报(自然科学版), 2020, 42(5): 121-125.

On $L^{\infty}(\mathbb{R}^N)$ Estimations for Solutions of a Class of Schrödinger Equations

PAN Hui-lan, WANG Jia-hui, LI Zhe-yi, XU Xin
School of Science, Chongqing University of Posts and Telecommunications, Chongqing 400065, China

Abstract: In this paper, we consider the property of a class of Schrödinger equation on $\mathbb{R}^N (N \geqslant 1)$. When the superlinear and subcritical property is satisfied for the nonlinearity of the equation, in the interactive method, we prove that all the solutions contained in $L^{\infty}(\mathbb{R}^N)$.

Key words: Schrödinger equation; superlinear; subcritical

责任编辑 廖 坤