DOI:10.13718/j.cnki.xsxb.2021.08.008

一类带有临界 Sobolev-Hardy 指数的 Kirchhoff 方程解的存在性与多重性[①]

王燕红， 蔡志鹏， 储昌木

贵州民族大学 数据科学与信息工程学院，贵阳 550025

摘要：利用变分原理和集中紧性原理研究一类带有临界 Sobolev-Hardy 指数的 Kirchhoff 方程. 首先，通过估计该方程所对应的泛函在原点附近的局部极小值，利用 Ekeland 变分原理获得该方程的第一个非平凡解. 随后，通过集中紧性原理证明该方程对应的泛函满足$(PS)_c$条件，利用山路引理获得该方程的第二个非平凡解. 此外，利用极大值原理证明方程的非平凡解是正解.

关 键 词：Kirchhoff 方程；Sobolev-Hardy 指数；集中紧性原理；正解

中图分类号：O176.3 **文献标志码**：A **文章编号**：1000-5471(2021)08-0041-06

考虑如下方程：

$$\begin{cases} -(a+\varepsilon\|u\|^2)\Delta u = \dfrac{|u|^{2^*(s)-1}}{|x|^s} + f_\lambda(x)|u|^{q-2}u & x \in \Omega\backslash\{0\} \\ u > 0 & x \in \Omega\backslash\{0\} \\ u = 0 & x \in \partial\Omega \end{cases} \tag{1}$$

其中$\Omega \subset \mathbb{R}^3$是光滑的有界区域，$a,\varepsilon,\lambda > 0$，$f_\lambda = \lambda f_+ + f_- \in L^\infty(\Omega)$，$f_\pm = \pm\max\{\pm f, 0\} \not\equiv 0$，$1 < q < 2$，$0 \leqslant s < 1$，$2^*(s) = 2(3-s)$是临界 Sobolev-Hardy 指数，$\|u\|^2 = \left(\int_\Omega |\nabla u|^2 \mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}}$.

长期以来，学者们研究了如下 Kirchhoff 方程：

$$\begin{cases} -\left(a + b\int_\Omega |\nabla u|^2 \mathrm{d}x\right)\Delta u = \lambda f(x, u) & x \in \Omega \\ u = 0 & x \in \partial\Omega \end{cases} \tag{2}$$

其中Ω是$\mathbb{R}^N(N \geqslant 3)$上的有界光滑区域，$a,b,\lambda > 0$. 这类方程解的存在性与多重性一直受到很多学者的关注[1-8]. 特别地，文献[9]研究了如下一类带变系数项的超线性 Kirchhoff 方程：

$$\begin{cases} -\left(a + \varepsilon m\left(\int_\Omega |\nabla u|^2 \mathrm{d}x\right)\right)\Delta u = f(u) & x \in \Omega \\ u = 0 & x \in \partial\Omega \end{cases} \tag{3}$$

其中Ω是$\mathbb{R}^N(N \geqslant 3)$上的有界光滑区域，$a$是常数，$m, f$：$\mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}_+$是连续函数. 当$\varepsilon$充分小时，通过变分法和迭代法，文献[9]得到了方程(3)至少有一个正解. 对于$m = 1$，文献[10]考虑了临界项和凹凸非线性项问题，通过变分法和集中紧性原理得到了方程(3)至少有两个正解.

① 收稿日期：2020-10-14
基金项目：国家自然科学基金项目(11661021，11861021).
作者简介：王燕红，讲师，硕士，主要从事非线性分析的研究.
通信作者：储昌木，教授.

据我们所知，涉及临界 Sobolev-Hardy 指数的情形没有结果，为此我们研究该情形，并给出相关结果：

定理 1 设 $a>0$，$0\leqslant s<1$，$1<q<2$，$f_\lambda\in L^\infty(\Omega)$，则当 $\varepsilon>0$ 充分小时，存在 $\lambda_*>0$ 使得对 $\forall\lambda\in(0,\lambda_*)$，方程(1) 至少存在两个正解.

1 第一个正解的存在性

记 $|u|_p=\left(\int_\Omega|u|^p\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}}$ 和 $|u|_\infty=\sup\limits_{x\in\Omega}\{u\}$. B_r 和 ∂B_r 分别是以 0 为圆心，以 r 为半径的闭球和球面. $u_n^\pm(x)=\max\{\pm u_n,0\}$. $C_1,C_2,C_3,\cdots$ 是正常数.

$$S=\inf_{u\in H_0^1(\Omega)\setminus\{0\}}\frac{\int_\Omega|\nabla u|^2\mathrm{d}x}{\left(\int_\Omega\frac{|u(x)|^{2^*(s)}}{|x|^s}\mathrm{d}x\right)^{\frac{2}{2^*(s)}}}\tag{4}$$

是 Sobolev 最佳嵌入常数. 如果对 $\forall\varphi\in H_0^1(\Omega)$，

$$(a+\varepsilon\|u\|^2)\int_\Omega(\nabla u,\nabla\varphi)\mathrm{d}x-\int_\Omega\frac{(u^+)^{2^*(s)-1}}{|x|^s}\varphi\mathrm{d}x-\int_\Omega f_\lambda(x)(u^+)^{q-2}u\varphi\mathrm{d}x=0\tag{5}$$

则称 u 是方程(1) 的解. 众所周知，方程(1) 对应的能量泛函为

$$I_\lambda(u)=\frac{a}{2}\|u\|^2+\frac{\varepsilon}{4}\|u\|^4-\frac{1}{2^*(s)}\int_\Omega\frac{(u^+)^{2^*(s)}}{|x|^s}\mathrm{d}x-\frac{1}{q}\int_\Omega f_\lambda(x)(u^+)^q\mathrm{d}x$$

其临界点是方程(1) 的解.

引理 1 若定理 1 的条件成立，则存在常数 $R,\rho,\Lambda_0>0$，使得对 $\forall\lambda\in(0,\Lambda_0)$，$\inf\limits_{u\in \overline{B_R}}I_\lambda(u)<0$，$I_\lambda(u)|_{u\in\partial B_R}>\rho$.

证 由 Sobolev 嵌入定理知，存在 $C>0$，使得$\int_\Omega u^q\mathrm{d}x\leqslant C\int_\Omega|\nabla u|^2\mathrm{d}x(1\leqslant q\leqslant 6)$.

$$\begin{aligned}I_\lambda(u)=&\frac{a}{2}\|u\|^2+\frac{\varepsilon}{4}\|u\|^4-\frac{1}{2^*(s)}\int_\Omega\frac{(u^+)^{2^*(s)}}{|x|^s}\mathrm{d}x-\frac{1}{q}\int_\Omega f_\lambda(x)(u^+)^q\mathrm{d}x\geqslant\\&\|u\|^q\left(\frac{a}{2}\|u\|^{2-q}-\frac{1}{2^*(s)}S^{-\frac{2^*(s)}{2}}\|u\|^{2^*(s)-q}-\frac{\lambda C}{q}|f_+|_\infty\right)\end{aligned}$$

令 $g(t)=\frac{a}{2}t^{2-q}-\frac{1}{2^*(s)}S^{-\frac{2^*(s)}{2}}t^{2^*(s)-q}$，则存在正常数 R，使得 $g(R)=\max\limits_{t>0}g(t)>0$，记 $\Lambda_0=\frac{qg(R)}{2C|f_+|_\infty}$，对 $\forall\lambda\in(0,\Lambda_0)$，存在常数 $\rho>0$，有 $I_\lambda(u)|_{u\in\partial B_R}>\rho$.

根据文献[11] 中引理 3.1，存在 $\varphi_0\in C_0^\infty(\Omega)$，使得$\int_\Omega f_\lambda(x)(\varphi_0^+)^q\mathrm{d}x>0$. 由 $1<q<2$ 知，当 t 充分小时，$I_\lambda(t\varphi_0)<0$. 因此，$d=\inf\limits_{u\in B_R}I_\lambda(u)<0$.

定理 2 若定理 1 的条件成立，则 $\forall\lambda\in(0,\Lambda_0)$，方程(1) 存在正解 u_1，满足 $I(u_1)<0$.

证 由引理 1 知，对任意的 $\lambda\in(0,\Lambda_0)$，$d=\inf\limits_{u\in B_R}I_\lambda(u)<0<\inf\limits_{\|u\|=R}I_\lambda(u)$. 由于 B_R 是闭凸集，在 B_R 上运用 Ekeland 变分原理，获得 I_λ 的一个局部极小解 u_1. 对 $\forall\psi\in H_0^1(\Omega)$，让 $t>0$ 足够小，使得 $u_0\pm t\psi\in B_R$，有$\lim\limits_{t\to 0}\frac{I_\lambda(u_1\pm t\psi)-I_\lambda(u_1)}{t}\geqslant 0$. 故

$$(a+\varepsilon\|u_1\|^2)\int_\Omega(\nabla u_1,\nabla\psi)\mathrm{d}x-\int_\Omega\frac{(u_1^+)^{2^*(s)-1}\psi}{|x|^s}\mathrm{d}x-\int_\Omega f_\lambda(x)(u_1^+)^{q-1}\psi\mathrm{d}x=0\tag{6}$$

在(6) 式中取测试函数 $\psi=-u_1^-$，通过计算得 $\|u_1^-\|=0$，这意味着 $u_1\geqslant 0$. 因此，u_1 是方程(1) 的非负非平凡解. 根据强极大值原理可得 $u_1>0$. 因此，u_1 是方程(1) 的正解且 $I_\lambda(u_1)=d<0$.

2 第二个正解的存在性

引理 2 若定理 1 的条件成立，则当 $\lambda\in(0,\Lambda_0)$ 时，对于给定的 $R_0>0$，存在 $v_0\in H_0^1(\Omega)$ 且

$\|v_0\| > R_0$，使得 $I_\lambda(v_0) < 0$.

证　对 $\forall t > 0$，

$$I_\lambda(tu) = \frac{at^2}{2}\|u\|^2 + \frac{\varepsilon t^4}{4}\|u\|^4 - \frac{t^{2^*(s)}}{2^*(s)}\int_\Omega \frac{(u^+)^{2^*(s)}}{|x|^s}\mathrm{d}x - \frac{t^q}{q}\int_\Omega f_\lambda(x)|u|^q\mathrm{d}x$$

由 $0 \leqslant s < 1$ 知，$2^*(s) > 4$. 因此，当 $t \to +\infty$ 时，$I_\lambda(tu) \to -\infty$. 故存在 $v_0 \in H_0^1(\Omega)$ 满足 $\|v_0\| > R_0$，使得 $I_\lambda(v_0) < 0$.

引理 3　若定理 1 的条件成立，则当 $c < c^* = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2^*(s)}\right)(aS)^{\frac{3-s}{2-s}} - D\lambda^{\frac{2}{2-q}}$ 时，I_λ 满足 $(\mathrm{PS})_c$ 条件，其中 $D = \left(\frac{4-q}{4q}|f_+|_\infty C\right)^{\frac{2}{2-q}}\left(\frac{2q}{a}\right)^{\frac{2}{2-q}}$，$C$ 为引理 1 中提到的常数.

证　令 $\{u_n\} \subset H_0^1(\Omega)$ 是 I_λ 的一个 $(\mathrm{PS})_c$ 序列，当 $n \to \infty$ 时，有

$$I_\lambda(u_n) \to c \qquad I_\lambda'(u_n) \to 0 \tag{7}$$

根据 Sobolev 嵌入定理和(7)式，有

$$1 + c + o(\|u_n\|) \geqslant I_\lambda(u_n) - \frac{1}{2^*(s)}\langle I_\lambda'(u_n), u_n\rangle \geqslant$$

$$a\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2^*(s)}\right)\|u_n\|^2 - \lambda\left(\frac{1}{q} - \frac{1}{2^*(s)}\right)C|f_+|_\infty\|u_n\|^q$$

由 $1 < q < 2 < 2^*(s)$ 知，$\{u_n\} \subset H_0^1(\Omega)$ 有界. 因此，存在其子列(仍记为 $\{u_n\}$)和 $u_0 \in H_0^1(\Omega)$，使得在 $H_0^1(\Omega)$ 上，有 $u_n \rightharpoonup u_0$；在 $L^{2^*(s)}(\Omega, |x|^{-s}\mathrm{d}x)$ 上，有 $u_n \rightharpoonup u_0$；在 $L^p(\Omega)(1 \leqslant p < 2^*(s))$ 上，有 $u_n \to u_0$；在 Ω 上几乎处处有 $u_n(x) \to u_0(x)$. 利用集中紧性引理和 Sobolev-Hardy 不等式，有

$$|\nabla u_n|^2 \rightharpoonup \mathrm{d}\mu \geqslant |\nabla u_0|^2 + \sum_{j\in J}\mu_j\delta_{x_j}$$

$$\frac{|u_n|^{2^*(s)}}{|x|^s} \rightharpoonup \mathrm{d}\nu = \frac{|u_0|^{2^*(s)}}{|x|^s} + \sum_{j\in J}\nu_j\delta_{x_j}$$

其中 J 是一个至多可数的指标集，δ_{x_j} 是在 x_j 上的 Dirac 测度. 我们可以找到序列 $\{x_j\} \subset \Omega$，μ_j, ν_j，使得

$$\mu_j, \nu_j \geqslant 0 \qquad \mu_j \geqslant S\nu_j^{\frac{2}{2^*(s)}} \tag{8}$$

接下来，证明 $J = \varnothing$. 假设 $J \neq \varnothing$，对 $\varepsilon > 0$，设 $\psi_{\varepsilon,j}(x) \in C_0^\infty$ 满足条件 $0 \leqslant \psi_{\varepsilon,j} \leqslant 1$，$|\nabla\psi_{\varepsilon,j}(x)| \leqslant \frac{4}{\varepsilon}$，当 $x \in B\left(x_j, \frac{\varepsilon}{2}\right)$ 时，$\psi_{\varepsilon,j} = 1$，当 $x \in B(x_j, \varepsilon)$ 时，$\psi_{\varepsilon,j} = 0$. 根据(4)式，可知

$$\left|\int_\Omega f_\lambda(u_n^+)^{q-1}\psi_{\varepsilon,j}(x)u_n\mathrm{d}x\right| \leqslant \lambda|f_+|_\infty\left|\int_\Omega(u_n^+)^q\psi_{\varepsilon,j}\mathrm{d}x\right| \leqslant C_1\int_{B(x_j,\varepsilon)}|u_n|^q\mathrm{d}x \leqslant$$

$$C_1\left(\int_{B(x_j,\varepsilon)}|u_n|^{q\cdot\frac{2^*(s)}{q}}\mathrm{d}x\right)^{\frac{q}{2^*(s)}}\left(\int_{B(x_j,\varepsilon)}\mathrm{d}x\right)^{\frac{2^*(s)-q}{2^*(s)}} \leqslant C_2\|u_n\|^q\varepsilon^{\frac{2^*(s)-q}{2^*(s)}}$$

由 $\{u_n\}$ 有界知，$\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\lim\limits_{n\to\infty}\int_\Omega f_\lambda(u_n^+)^{q-1}\psi_{\varepsilon,j}(x)u_n\mathrm{d}x = 0$. 由于 $\{\psi_{\varepsilon,j}u_n\}$ 在 $H_0^1(\Omega)$ 上有界，则 $(I_\lambda'(u_n), \psi_{\varepsilon,j}u_n) \to 0$. 因此

$$0 = \lim_{\varepsilon\to 0}\lim_{n\to\infty}\langle I_\lambda'(u_n), \psi_{\varepsilon,j}u_n\rangle \geqslant$$

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\lim_{n\to\infty}\Big((a + \varepsilon\|u_n\|^2)\int_\Omega(|\nabla u_n|^2\psi_{\varepsilon,j} + u_n\nabla u_n\nabla\psi_{\varepsilon,j})\mathrm{d}x -$$

$$\int_\Omega \frac{u_n^{+2^*(s)-1}}{|x|^s}\psi_{\varepsilon,j}\mathrm{d}x - \int_\Omega f_\lambda(x)(u_n^+)^{q-1}\psi_{\varepsilon,j}u_n\mathrm{d}x\Big) \geqslant$$

$$a\mu_j - \nu_j$$

结合(8)式，可推得：(i) $\mu_j \geqslant (aS^{\frac{2^*(s)}{2}})^{\frac{2}{2^*(s)-2}} = a^{\frac{3}{2-s}}S^{\frac{3-s}{2-s}}$，或者(ii) $\mu_j = \nu_j = 0$. 下面证明(i)不成立. 由(7)式和 Young 不等式，可推出

$$
\begin{aligned}
c=&\lim_{n\to\infty} I_\lambda(u_n)\geqslant\\
&\lim_{n\to\infty}\Big[\frac{a}{2}\|u_n\|^2+\frac{\varepsilon}{4}\|u_n\|^4-\frac{1}{2^*(s)}\int_\Omega\frac{|u_n|^{2^*(s)}}{|x|^s}\mathrm{d}x-\frac{1}{q}\int_\Omega f_\lambda(x)|u_n|^q\mathrm{d}x-\\
&\frac{1}{4}\Big(a\|u_n\|^2+\varepsilon\|u_n\|^4-\int_\Omega\frac{|u_n|^{2^*(s)}}{|x|^s}\mathrm{d}x-\int_\Omega f_\lambda(x)|u_n|^q\mathrm{d}x\Big)\Big]\geqslant\\
&\Big(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\Big)a\big(\|u_0\|^2+\sum_{j\in J}\mu_j\big)+\Big(\frac{1}{4}-\frac{1}{2^*(s)}\Big)\Big(\int_\Omega\frac{|u_0|^{2^*(s)}}{|x|^s}\mathrm{d}x+\sum_{j\in J}\nu_j\Big)-\\
&\Big(\frac{1}{q}-\frac{1}{4}\Big)\int_\Omega f_\lambda(x)|u_n|^q\mathrm{d}x\geqslant\\
&\Big(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\Big)a\mu_{j_0}+\frac{1}{4}a\|u\|^2+\Big(\frac{1}{4}-\frac{1}{2^*(s)}\Big)\nu_{j_0}-\lambda\Big(\frac{1}{q}-\frac{1}{4}\Big)|f_+|_\infty C\|u\|^q\geqslant\\
&\frac{1}{4}a\mu_{j_0}+\Big(\frac{1}{4}-\frac{1}{2^*(s)}\Big)a\mu_{j_0}-D\lambda^{\frac{2}{2-q}}\geqslant\\
&\Big(\frac{1}{2}-\frac{1}{2^*(s)}\Big)(aS)^{\frac{3-s}{2-s}}-D\lambda^{\frac{2}{2-q}}
\end{aligned}\tag{9}
$$

此与 $c<c^*$ 是矛盾的. 故 $\mu_j=\nu_j=0$，即 $J=\varnothing$，这意味着当 $n\to\infty$ 时，$\int_\Omega\frac{|u_n|^{2^*(s)}}{|x|^s}\mathrm{d}x\to\int_\Omega\frac{|u_0|^{2^*(s)}}{|x|^s}\mathrm{d}x$. 可推出 $\{u_n\}$ 在 $H_0^1(\Omega)$ 上强收敛于 u_0.

定义

$$
U_\varepsilon(x)=\frac{C_3(s)\varepsilon^{\frac{1}{2(2-s)}}}{(\varepsilon+|x|^{2-s})^{\frac{1}{2-s}}}\qquad x\in\mathbb{R}^3,\ \varepsilon>0\tag{10}
$$

其中 $C_3(s)$ 为与 s 有关的常数，$U_\varepsilon(x)$ 是方程 $-\Delta U_\varepsilon=U_\varepsilon^5(x\in\mathbb{R}^3)$ 的解，并且满足 $\int_{\mathbb{R}^3}|U_\varepsilon|^6\mathrm{d}x=\int_{\mathbb{R}^3}|\nabla U_\varepsilon|^2\mathrm{d}x=S^{\frac{3}{2}}$. 令 $\eta\in C_0^\infty(\Omega)$ 满足条件 $0\leqslant\eta\leqslant1$，$|\nabla\eta|\leqslant C$，且当 $|x|<R_0$ 时，$\eta(x)=1$；$|x|>2R_0$ 时，$\eta(x)=0$. 设 $u_\varepsilon(x)=\eta(x)U_\varepsilon(x)$，有

$$
|u_\varepsilon|_6^6=S^{\frac{3}{2}}+O(\varepsilon^3)\qquad \|u_\varepsilon\|^2=S^{\frac{3}{2}}+O(\varepsilon)\qquad \|u_\varepsilon\|^4\leqslant S^3+O(\varepsilon)\tag{11}
$$

引理4 若定理1的条件成立，则存在 $\lambda_1>0$，当 $\lambda\in(0,\lambda_1)$ 时，$\sup\limits_{t\geqslant0} I_\lambda(u_1+tu_\varepsilon)<c^*$.

证 对 $p,q>0$，有

$$
(p+q)^{2^*(s)}-p^{2^*(s)}-q^{2^*(s)}-2^*(s)p^{2^*(s)-1}q\geqslant C_4pq^{2^*(s)-1}\tag{12}
$$

从定理2的证明，不难看出 u_1 是有界的. 因此，存在 $M>0$，使得 $\|u_1\|<M$. 注意到 $I_\lambda(u_1)<0$，由(12)式、Hölder 不等式和 Young 不等式知

$$
\begin{aligned}
&I_\lambda(u_1+tu_\varepsilon)\leqslant\\
&I_\lambda(u_1)+\frac{at^2}{2}\|u_\varepsilon\|^2+\frac{\varepsilon t^4}{4}\|u_\varepsilon\|^4+\frac{\varepsilon t^2}{2}\|u_1\|^2\|u_\varepsilon\|^2+\varepsilon t^2\Big(\int_\Omega(\nabla u_\lambda,\nabla u_\varepsilon)\mathrm{d}x\Big)^2+\\
&\varepsilon t^3\|u_\varepsilon\|^2\int_\Omega(\nabla u_\lambda,\nabla u_\varepsilon)\mathrm{d}x+\int_\Omega|f_-|\Big(\int_0^{tu_\varepsilon}[(u_1+\eta)^{q-1}-u_1^{q-1}]\mathrm{d}\eta\Big)\mathrm{d}x-\\
&\frac{1}{2^*(s)}\int_\Omega\Big(\frac{|u_1+tu_\varepsilon|^{2^*(s)}}{|x|^s}-\frac{|u_1|^{2^*(s)}}{|x|^s}-\frac{2^*(s)|u_1|^{2^*(s)-1}}{|x|^s}(tu_\varepsilon)\Big)\mathrm{d}x\leqslant\\
&\frac{at^2}{2}\|u_\varepsilon\|^2+\frac{\varepsilon t^4}{4}\|u_\varepsilon\|^4+\frac{\varepsilon t^2}{2}\|u_1\|^2\|u_\varepsilon\|^2+\varepsilon t^2\|u_1\|^2\|u_\varepsilon\|^2+\varepsilon t^3\|u_1\|\|u_\varepsilon\|^3-\\
&\frac{1}{2^*(s)}\int_\Omega(|tu_\varepsilon|^{2^*(s)}+C_5u_1|tu_\varepsilon|^{2^*(s)-1})\mathrm{d}x+\int_\Omega|f_-|\Big(\int_0^{tu_\varepsilon}\eta^{q-1}\mathrm{d}\eta\Big)\mathrm{d}x\leqslant\\
&\frac{at^2}{2}\|u_\varepsilon\|^2+\frac{\varepsilon t^4}{4}\|u_\varepsilon\|^4+\frac{3M^2\varepsilon}{2}t^2\|u_\varepsilon\|^2+M\varepsilon t^3\|u_\varepsilon\|^3+C_5\int_\Omega(tu_\varepsilon)^q\mathrm{d}x-\\
&\frac{t^{2^*(s)}}{2^*(s)}\int_\Omega|u_\varepsilon|^{2^*(s)}\mathrm{d}x-C_6t^{2^*(s)-1}\int_\Omega|u_\varepsilon|^{2^*(s)-1}\mathrm{d}x\leqslant
\end{aligned}
$$

$$\frac{at^2}{2}\|u_\varepsilon\|^2+\frac{5\varepsilon t^4}{4}\|u_\varepsilon\|^4+\frac{5}{2}M^4\varepsilon+C_5t^q\int_\Omega(u_\varepsilon)^q\mathrm{d}x-\frac{t^{2^*(s)}}{2^*(s)}\int_\Omega|u_\varepsilon|^{2^*(s)}\mathrm{d}x-$$
$$C_6t^{2^*(s)-1}\int_\Omega|u_\varepsilon|^{2^*(s)-1}\mathrm{d}x=J(tu_\varepsilon)$$

利用文献[10] 的方法知，存在 $t_\varepsilon>0$ 和与 ε,λ 无关的常数 t_1,t_2，满足 $0<t_1\leqslant t_\varepsilon\leqslant t_2<\infty$，使得 $\sup\limits_{t\geqslant 0}J(tu_\varepsilon)=J(t_\varepsilon u_\varepsilon)$．根据(10) 式，我们得到

$$\int_\Omega\frac{|u_\varepsilon(x)|^{2^*(s)-1}}{|x|^s}\mathrm{d}x=C_3\int_{B(0,R)}\frac{1}{|x|^s}\frac{\varepsilon^{\frac{5-2s}{2(2-s)}}}{(\varepsilon+|x|^{2-s})^{\frac{5-2s}{2-s}}}\mathrm{d}x+o(\varepsilon^{\frac{2^*(s)-1}{2}})=$$
$$C_3\varepsilon^{\frac{5-2s}{2(2-s)}}\int_0^R\frac{r^{2-s}\varepsilon^{\frac{5-2s}{2(2-s)}}}{(\varepsilon+r^{2-s})^{\frac{5-2s}{2-s}}}\mathrm{d}r+o(\varepsilon^{\frac{2^*(s)-1}{2}})=$$
$$C_3\varepsilon^{\frac{5-2s}{2(2-s)}}\int_0^{\frac{R}{\varepsilon}}\frac{t^{(2-s)}\varepsilon}{\varepsilon^{\frac{5-2s}{2-s}}(1+t^{2-s})^{\frac{5-2s}{2-s}}}\frac{1}{\varepsilon^{2-s}}\mathrm{d}t+o(\varepsilon^{\frac{2^*(s)-1}{2}})=$$
$$C_3\varepsilon^{\frac{1}{2(2-s)}}\int_0^1\frac{t^{(2-s)}}{(1+t^{2-s})^{\frac{5-2s}{2-s}}}\mathrm{d}t+o(\varepsilon^{\frac{2^*(s)-1}{2}})=$$
$$C_7\varepsilon^{\frac{1}{2(2-s)}}+o(\varepsilon^{\frac{2^*(s)-1}{2}})\tag{13}$$

注意到 $\int_\Omega u_\varepsilon^q\mathrm{d}x\leqslant C_8\varepsilon^{\frac{q}{2}}$，由(11) 和(13) 式知

$$J(t_\varepsilon u_\varepsilon)=\frac{at_\varepsilon^2}{2}\|u_\varepsilon\|^2+\frac{5\varepsilon t_\varepsilon^4}{4}\|u_\varepsilon\|^4+C_5t_\varepsilon^q\int_\Omega(u_\varepsilon)^q\mathrm{d}x-$$
$$\frac{t_\varepsilon^{2^*(s)}}{2^*(s)}\int_\Omega|u_\varepsilon|^{2^*(s)}\mathrm{d}x-C_6t_\varepsilon^{2^*(s)-1}\int_\Omega|u_\varepsilon|^{2^*(s)-1}\mathrm{d}x+\frac{5}{2}M^4\varepsilon\leqslant$$
$$\sup_{t\geqslant 0}\left\{\frac{at^2}{2}\|u_\varepsilon\|^2-\frac{t^{2^*(s)}}{2^*(s)}\int_\Omega|u_\varepsilon|^{2^*(s)}\mathrm{d}x\right\}+\frac{5\varepsilon t_2{}^4}{4}\|u_\varepsilon\|^4+C_5t_2^q\int_\Omega(u_\varepsilon)^q\mathrm{d}x-$$
$$C_6t_1^{2^*(s)-1}\int_\Omega|u_\varepsilon|^{2^*(s)-1}\mathrm{d}x+\frac{5}{2}M^4\varepsilon\leqslant$$
$$\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2^*(s)}\right)(aS)^{\frac{3-s}{2-s}}+C_8\varepsilon+C_9\varepsilon^{\frac{q}{2}}-C_{10}\varepsilon^{\frac{1}{2(2-s)}}\leqslant$$
$$\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2^*(s)}\right)(aS)^{\frac{3-s}{2-s}}+C_{11}\varepsilon^{\frac{q}{2}}-C_9\varepsilon^{\frac{1}{2(2-s)}}$$

记 $\varepsilon=\lambda^{\frac{4}{q(2-q)}}$，当 $0<\lambda<\lambda_1=\left(\dfrac{C_{12}}{C_9+D}\right)^{q(2-s)}$ 时，有

$$C_{11}\varepsilon^{\frac{q}{2}}-C_9\varepsilon^{\frac{1}{2(2-s)}}=C_{11}\lambda^{\frac{2}{2-q}}-C_{19}\lambda^{\frac{2}{q(2-q)(2-s)}}=\lambda^{\frac{2}{2-q}}(C_{11}-C_{19}\lambda^{\frac{1}{q(2-s)}})<-D\lambda^{\frac{2}{2-q}}$$

即

$$\sup_{t\geqslant 0}J(tu_\varepsilon)=J(t_\varepsilon u_\varepsilon)<\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2^*(s)}\right)(aS)^{\frac{3-s}{2-s}}-D\lambda^{\frac{2}{2-q}}=c^*$$

因此 $\sup\limits_{t\geqslant 0}I_\lambda(u_1+tu_\varepsilon)<c^*$．

定理 3　若定理 1 的条件成立，则存在 $\lambda_*>0$，使得 $\forall\lambda\in(0,\lambda_*)$，方程(1) 有一个正解 u_2，并且满足 $I_\lambda(u_2)>0$.

证　令 $\lambda_*=\min\{\Lambda_0,\lambda_1\}$，当 $0<\lambda<\lambda_*$ 时，由引理 1 和 2 知，$I_\lambda(u)$ 具有山路几何结构．令

$$\Gamma=\{\gamma\in C([0,1],H_0^1):\gamma(0)=u_1,\gamma(1)=u_1+t_0u_\varepsilon\}\qquad c=\inf_{\gamma\in\Gamma}\max_{t\in[0,1]}J_\lambda(\gamma(t))$$

由引理 3 和引理 4 知 $c<c^*$，且 $I_\lambda(u)$ 满足 $(PS)_c$ 条件．由山路引理[12-13] 获得方程(1) 的非平凡解 u_2 满足 $I_\lambda(u_2)>0$．类似定理 2 的论述，不难得到 u_2 是方程(1) 的一个正解.

定理 1 的证明　由定理 2 和定理 3 知，方程(1) 有两个正解 u_1 和 u_2，满足 $I_\lambda(u_1)<0<I_\lambda(u_2)$.

参考文献:

[1] ALVES C O, CORRÊA F J S A, MA T F. Positive Solutions for a Quasilinear Elliptic Equation of Kirchhoff Type [J]. Computers and Mathematics with Applications, 2005, 49(1): 85-93.

[2] LIU J, LIAO J F, TANG C L. Positive Solutions for Kirchhoff-Type Equations with Critical Exponent in $\mathbb{R}^N$ [J]. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 2015, 429(2): 1153-1172.

[3] 张 黔, 邓志颖. 含临界指数项和双重奇异项的Kirchhoff型椭圆边值方程的正解 [J]. 西南师范大学学报(自然科学版), 2020, 45(2): 11-19.

[4] 刘选状, 吴行平, 唐春雷. 一类带有临界指数增长项的Kirchhoff型方程正的基态解的存在性 [J]. 西南大学学报(自然科学版), 2015, 37(6): 54-59.

[5] LI Y H, LI F Y, SHI J P. Existence of Positive Solutions to Kirchhoff Type Problems with Zero Mass [J]. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 2014, 410(1): 361-374.

[6] 王继禹, 贾秀玲, 段 誉, 等. 一类具有临界增长项的Kirchhoff型方程正解的研究 [J]. 西南大学学报(自然科学版), 2016, 38(12): 61-66.

[7] SHUAI W. Sign-Changing Solutions for a Class of Kirchhoff-Type Problem in Bounded Domains [J]. Journal of Differential Equations, 2015, 259(4): 1256-1274.

[8] ZHANG Z T, PERERA K. Sign Changing Solutions of Kirchhoff Type Problems Via Invariant Sets of Descent Flow [J]. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 2006, 317(2): 456-463.

[9] ZHANG Q G, SUN H R, NIETO J J. Positive Solution for a Superlinear Kirchhoff Type Problem with a Parameter [J]. Nonlinear Analysis, 2014, 95: 333-338.

[10] LEI C Y, LIU G S, GUO L T. Multiple Positive Solutions for a Kirchhoff Type Problem with a Critical Nonlinearity [J]. Nonlinear Analysis Real World Applications, 2016, 31: 343-355.

[11] CHU C M, TANG C L. Multiple Results for Critical Quasilinear Elliptic Systems Involving Concave-Convex Nonlinearities and Sign-Changing Weight Functions [J]. Bulletin of the Malaysian Mathematical Sciences Society, 2013, 36(3): 789-805.

[12] BRÉZIS H, LIEB E. A Relation Between Pointwise Convergence of Functions and Convergence of Functionals [J]. Proceedings of the American Mathematical Society, 1983, 88(3): 486-490.

[13] AMBROSETTI A, RABINOWITZ P H. Dual Variational Methods in Critical Point Theory and Applications [J]. Journal of Functional Analysis, 1973, 14(4): 349-381.

Existence and Multiplicity of Solutions for a Kirchhoff Type Equation with a Critical Sobolev-Hardy Exponent

WANG Yan-hong, CAI Zhi-peng, CHU Chang-mu

College of Data Science and Information Engineering, Guizhou Minzu University, Guiyang 550025, China

Abstract: In this work, a class of Kirchhoff type equation with a critical Sobolev-Hardy exponent has been studied. Firstly, the local minimum of the corresponding functional near the origin of the equation is estimated and the first non-trivial solution of the equation is obtained by Ekeland's variational principle. Subsequently, it is proved that the corresponding functional satisfies the $(PS)_c$ condition by means of the lumped compactness principle. The second nontrivial solution of the equation is obtained by the mountain path lemma. Moreover, it is proved that two solutions of the equation are positive solutions by the maximum principle.

Key words: Kirchhoff type equation; Sobolev-Hardy exponents; concentration-compactness principle; positive solutions

责任编辑 廖 坤