第 46 卷 第 8 期　　西南师范大学学报(自然科学版)　　2021 年 8 月
Vol. 46　No. 8　Journal of Southwest China Normal University (Natural Science Edition)　Aug.　2021

DOI:10.13718/j.cnki.xsxb.2021.08.009

提升空间中的链传递性和强链回归点集的研究①

冀占江[1,2,3]，　时　伟[4]

1. 梧州学院 大数据与软件工程学院，广西 梧州 543002；
2. 梧州学院 广西高校图像处理与智能信息系统重点实验室，广西 梧州 543002；
3. 梧州学院 广西高校行业软件技术重点实验室，广西 梧州 543002；
4. 梧州职业学院 党委办公室，广西 梧州 543002

摘要：研究了局部等距条件下提升空间中链传递的动力学特征和强链回归点集的拓扑结构．利用局部等下提升映射的性质，得到链传递和强链回归点集的一些新结论：若映射 $\overline{f}$ 是映射 f 局部等距下的提升映射，则 $\overline{f}$ 是链传递当且仅当 f 是链传递；若映射 $\overline{f}$ 是映射 f 局部等距下的提升映射，则 $\pi(SCR(\overline{f}))\subset SCR(f)$．这些结论推广和改进了早期文献中关于链传递和强链回归点集的相关结果．

关　键　词：提升空间；等距映射；链传递；强链回归点集

中图分类号：O189.11　　**文献标志码**：A　　**文章编号**：1000－5471(2021)08－0047－04

链传递是动力系统中的重要性质，在动力系统的研究中起着重要的作用，其核心是拓扑空间上自映射迭代产生的序列轨道的渐进性质和拓扑结构．一个系统是链传递，就意味着空间中任意两个点总能找到一条有限的伪轨将其连接起来．有关链传递的研究成果见文献[1－8]．文献[1]证明了：若映射 f 具有 $\underline{d}$ -跟踪性，则 f 是链传递的．文献[2]指出：具有跟踪性的链传递系统一定是等度连续或者敏感的．文献[3]证明了：若映射 f 是满射，且 f 具有 $\underline{0}$ -平均跟踪性，则 f 是链传递的．文献[4]证明了：非自治动力系统中拓扑传递性蕴含链传递性．另外，不动点[9-10]和强链回归点[11-13]是拓扑动力系统研究的重点，文献[11]证明了：强链回归点集对连续映射不变．文献[12]证明了：强链回归点集对同胚映射强不变．文献[13]证明了：连续映射 g 的强链回归点集是连续映射 f 的强链回归点集在拓扑共轭映射 h 下的象；连续映射 f^n 的强链回归点集是连续映射 f 的强链回归点集的子集．

众所周知，提升系统是研究 n 维环面等特殊流形上动力系统的一个重要工具，一个系统与它的提升系统的动力学性质是否一致成为研究的重点，有关研究成果见文献[14-16]．考虑到提升空间、链传递性和强链回归点都是目前动力系统研究的热点，本文选择在提升空间中研究链传递性和强链回归点集的动力学性质，通过证明得到：$\overline{f}$ 是链传递的当且仅当 f 是链传递的；$\pi(SCR(\overline{f}))\subset SCR(f)$．这些结论丰富了提升空间中链传递性和强链回归点集的相关理论．

定义 1　设 X,Y 是拓扑空间，若 $f: X\longrightarrow Y$ 是一一映射，且 f 和 f^{-1} 都是连续的，则称 f 是同胚映射．

定义 2[17]　设 (X, d_1) 和 (Y, d_2) 是度量空间，$f: X\longrightarrow Y$ 是一一映射，若对任意的 $x, y\in X$，有 $d_2(f(x), f(y))=d_1(x, y)$，则称 f 是等距映射．

定义 3[17]　设 $(\overline{X}, \overline{d})$ 和 (X, d) 是度量空间，$\pi: \overline{X}\longrightarrow X$ 是连续满射，若对任意的 $x\in X$，存在 x 的

① 收稿日期：2020－07－23

基金项目：广西自然科学基金面上项目(2020JJA110021)；广西自然科学基金项目(2018JJB170034)；梧州学院校级重点项目(2020B007)；梧州学院校级项目(2017B004)．

作者简介：冀占江，副教授，主要从事拓扑动力系统的研究．

通信作者：时　伟，副教授．

开邻域 $U(x)$,使得

$$\pi^{-1}(U(x)) = \bigcup_{\alpha} \overline{U}_{\alpha} \qquad \overline{U}_{\alpha} \cap \overline{U}_{\beta} = \varnothing \qquad \alpha \neq \beta$$

并且对所有的 α,$\pi|_{\overline{U}_{\alpha}}: \overline{U}_{\alpha} \longrightarrow U_x$ 是同胚映射,则称 π 是覆盖映射.

定义 4[17] 设$(\overline{X}, \overline{d})$ 和(X, d) 是度量空间,若 $\pi: \overline{X} \longrightarrow X$ 是覆盖映射,并且对所有的 α,$\pi|_{\overline{U}_{\alpha}}: \overline{U}_{\alpha} \longrightarrow U_x$ 是等距映射,则称 π 是局部等距覆盖映射.

定义 5[17] 设$(\overline{X}, \overline{d})$ 和(X, d) 是度量空间,$\pi: \overline{X} \longrightarrow X$ 是覆盖映射,$\overline{f}: \overline{X} \longrightarrow \overline{X}$ 连续,$f: X \longrightarrow X$ 连续,若 $\pi \circ \overline{f} = f \circ \pi$,则称 $\overline{f}$ 是 f 的提升映射,$(\overline{X}, \overline{f})$ 是(X, f) 的提升空间.

定义 6[17] 设$(\overline{X}, \overline{d})$ 和(X, d) 是度量空间,$\pi: \overline{X} \longrightarrow X$ 是局部等距覆盖映射,$\overline{f}: \overline{X} \longrightarrow \overline{X}$ 连续,$f: X \longrightarrow X$ 连续,若 $\pi \circ \overline{f} = f \circ \pi$,则称 $\overline{f}$ 是 f 局部等距下的提升映射,$(\overline{X}, \overline{f})$ 是(X, f) 局部等距下的提升空间.

定义 7 设(X, d) 是度量空间,$f: X \longrightarrow X$ 连续,$\delta > 0$,$\{x_i\}_{i=0}^{n}$ 是 X 中的有限序列,若 $\forall\, 0 \leqslant i < n$,有 $d(f(x_i), x_{i+1}) < \delta$,则称$\{x_i\}_{i=0}^{n}$ 是 f 的 δ-链.

定义 8 设(X, d) 是度量空间,$f: X \longrightarrow X$ 连续,若 $\forall\, x, y \in X$,$\forall\, \varepsilon > 0$,存在 f 作用下的 ε-链 $\{x_i\}_{i=0}^{n}(x_0 = x, x_n = y)$,则称 f 具有链传递性.

定义 9 设(X, d) 是度量空间,$f: X \longrightarrow X$ 连续,$\delta > 0$,$\{x_i\}_{i=0}^{n}$ 是 X 中的有限序列,若 $\sum_{i=0}^{n-1} d(f(x_i), x_{i+1}) < \delta$,则称$\{x_i\}_{i=0}^{n}$ 是 f 的强 δ-链.

定义 10 设(X, d) 是度量空间,$f: X \longrightarrow X$ 连续,$x \in X$,若 $\forall\, \varepsilon > 0$,存在 f 作用下的强 ε-链 $\{x_i\}_{i=0}^{n}(x_0 = x_n = x)$,则称 x 是 f 的强链回归点. f 的强链回归点集用 $SCR(f)$ 表示.

引理 1 设$(\overline{X}, \overline{d})$ 和(X, d) 是紧致度量空间,$\pi: \overline{X} \longrightarrow X$ 是局部等距覆盖映射,$\overline{f}: \overline{X} \longrightarrow \overline{X}$ 连续,$f: X \longrightarrow X$ 连续,若 $\overline{f}$ 是 f 局部等距下的提升映射,则存在 $\delta_0 > 0$,对任意的 $\overline{x} \in \overline{X}$,任意的 $0 < \delta \leqslant \delta_0$,$\pi|_{B(\overline{x}, \delta)}: B(\overline{x}, \delta) \longrightarrow B(\pi(\overline{x}), \delta)$ 是等距同胚映射.

证 由 $\pi: \overline{X} \longrightarrow X$ 是局部等距覆盖映射知,对任意的 $x \in X$,存在 x 的开邻域 $U(x)$,使得

$$\pi^{-1}(U(x)) = \bigcup_{\alpha} \overline{U}_{\alpha} \qquad \overline{U}_{\alpha} \cap \overline{U}_{\beta} = \varnothing \qquad \alpha \neq \beta$$

并且对所有的 α,$\pi|_{\overline{U}_{\alpha}}: \overline{U}_{\alpha} \longrightarrow U_x$ 是等距同胚的. 取

$$\Gamma = \{\overline{U}_{\alpha}: \overline{U}_{\alpha} \in \pi^{-1}(U(y)), y \in X\}$$

则 Γ 是 $\overline{X}$ 的开覆盖. 由 $\overline{X}$ 的紧致性知,开覆盖 Γ 存在勒贝格数 δ'. 取 $\delta_0 = \dfrac{\delta'}{2}$. 由勒贝格数引理知,对任意的 $\overline{x} \in \overline{X}$,任意的 $0 < \delta \leqslant \delta_0$,存在 $\overline{U}_r \in \Gamma$ 使得 $B(\overline{x}, \delta) \subset \overline{U}_{\gamma}$,故 $\pi|_{B(\overline{x}, \delta)}: B(\overline{x}, \delta) \longrightarrow B(\pi(\overline{x}), \delta)$ 是等距同胚映射.

定理 1 设$(\overline{X}, \overline{d})$ 和(X, d) 是度量空间,$\pi: \overline{X} \longrightarrow X$ 局部等距覆盖映射,$\overline{f}: \overline{X} \longrightarrow \overline{X}$ 连续,$f: X \longrightarrow X$ 连续,若 $\overline{f}$ 是 f 局部等距下的提升映射,则 $\overline{f}$ 是链传递的当且仅当 f 是链传递的.

证 设 $\overline{f}$ 是链传递的,$\forall\, x, y \in X$,$\forall\, 0 < \varepsilon < \delta_0$,其中 δ_0 是引理 1 中的常数,由 $\pi: \overline{X} \longrightarrow X$ 是满射知,可取 $\overline{x} \in \overline{X}$,$\overline{y} \in \overline{X}$ 满足 $\pi(\overline{x}) = x$ 和 $\pi(\overline{y}) = y$. 由 $\overline{f}$ 是链传递的知,存在 $\overline{f}$ 作用下的 ε-链 $\{\overline{x}_i\}_{i=0}^{n}$,其中 $\overline{x}_0 = \overline{x}$,$\overline{x}_n = \overline{y}$. 故当 $0 \leqslant i < n$ 时,有

$$\overline{d}(\overline{f}(\overline{x}_i), \overline{x}_{i+1}) < \varepsilon \tag{1}$$

取 $x_i = \pi(\overline{x}_i)$,$0 \leqslant i \leqslant n$,则 $x_0 = x$,$x_n = y$. 由 $\overline{f}$ 是 f 的提升映射知 $\pi \circ \overline{f} = f \circ \pi$,故

$$\pi\overline{f}(\overline{x}_i) = f(x_i)$$

再由引理 1 知,$\pi|_{B(\overline{f}(\overline{x}_i), \varepsilon)}: B(\overline{f}(\overline{x}_i), \varepsilon) \longrightarrow B(f(x_i), \varepsilon)$ 是等距同胚映射,故

$$d(f(x_i), x_{i+1}) = d(\pi\overline{f}(\overline{x}_i), \pi(\overline{x}_{i+1})) = \overline{d}(\overline{f}(\overline{x}_i), \overline{x}_{i+1})$$

由(1) 式知

$$d(f(x_i), x_{i+1}) < \varepsilon$$

故 f 是链传递的.

设 f 是链传递的，$\forall \bar{s},\bar{t} \in \overline{X}$，$\forall\, 0 < \eta < \delta_0$，其中 δ_0 是引理 1 中的常数．由 f 是链传递的知，存在 f 作用下的 η-链 $\{z_i\}_{i=0}^{m}$，其中

$$z_0 = \pi(\bar{s}) \qquad z_m = \pi(\bar{t})$$

故当 $0 \leqslant i < m$ 时，有

$$d(f(z_i),\ z_{i+1}) < \eta \tag{2}$$

由 $\pi: \overline{X} \longrightarrow X$ 是满射知，可取 $\bar{z}_i \in \overline{X}$ 满足 $\pi(\bar{z}_i) = z_i$，其中

$$\bar{z}_0 = \bar{s} \qquad \bar{z}_m = \bar{t}$$

由引理 1 知，$\pi|_{B(\bar{f}(\bar{z}_i),\ \eta)}: B(\bar{f}(\bar{z}_i),\ \eta) \longrightarrow B(f(z_i),\ \eta)$ 是等距同胚映射，故

$$d(f(z_i),\ z_{i+1}) = d(\pi\bar{f}(\bar{z}_i),\ \pi(\bar{z}_{i+1})) = \bar{d}(\bar{f}(\bar{z}_i),\ \bar{z}_{i+1})$$

由(2) 式知

$$\bar{d}(\bar{f}(\bar{z}_i),\ \bar{z}_{i+1}) < \eta$$

故 $\bar{f}$ 是链传递的．

定理 2　设$(\overline{X},\bar{d})$ 和(X,d) 是度量空间，$\pi: \overline{X} \longrightarrow X$ 是局部等距覆盖映射，$\bar{f}: \overline{X} \longrightarrow \overline{X}$ 连续，$f: X \longrightarrow X$ 连续，若 $\bar{f}$ 是 f 局部等距下的提升映射，则 $\pi(SCR(\bar{f})) \subset SCR(f)$．

证　设 $\bar{x} \in SCR(\bar{f})$．$\forall\, 0 < \varepsilon < \delta_0$，其中 δ_0 是引理 1 中的常数，则存在 $\bar{f}$ 作用下的强 ε-链 $\{\bar{x}_i\}_{i=0}^{n}$，其中

$$\bar{x}_0 = \bar{x}_n = \bar{x}$$

故

$$\sum_{i=0}^{n-1} \bar{d}(\bar{f}(\bar{x}_i),\ \bar{x}_{i+1}) < \varepsilon \tag{3}$$

取 $x_i = \pi(\bar{x}_i)$，由 $\bar{f}$ 是 f 的提升映射知 $\pi \circ \bar{f} = f \circ \pi$，故

$$\pi\bar{f}(\bar{x}_i) = f(x_i)$$

再由引理 1 知，$\pi|_{B(\bar{f}(\bar{x}_i),\ \varepsilon)}: B(\bar{f}(\bar{x}_i),\ \varepsilon) \longrightarrow B(f(x_i),\ \varepsilon)$ 是等距同胚映射，故

$$d(f(x_i),\ x_{i+1}) = d(\pi\bar{f}(\bar{x}_i),\ \pi(\bar{x}_{i+1})) = \bar{d}(\bar{f}(\bar{x}_i),\ \bar{x}_{i+1})$$

由(3) 式知

$$\sum_{i=0}^{n-1} d(f(x_i),\ x_{i+1}) < \varepsilon$$

故 $\pi(\bar{x}) \in SCR(f)$，则

$$\pi(SCR(\bar{f})) \subset SCR(f)$$

本文研究了原空间与它的提升空间在链传递性和强链回归点集方面的动力学性质，得到：$\bar{f}$ 是链传递的当且仅当 f 是链传递的；$\pi(SCR(\bar{f})) \subset SCR(f)$．丰富了提升空间中链传递性和强链回归点集的结论，为链传递性和强链回归点在实际中的应用提供了理论依据．

参考文献：

[1] DASTJERDI D A，HOSSEINI M. Sub-Shadowings [J]. Nonlinear Analysis，2010，72(9)：3759-3766.

[2] DASTJERDI D A，HOSSEINI M. Shadowing with Chain Transitivity [J]. Topology and its Applications，2009，156(13)：2193-2195.

[3] 汪火云，曾　鹏. 平均伪轨的部分跟踪 [J]. 中国科学：数学，2016，46(6)：781-792.

[4] 易　鹏. 非自治动力系统中的链传递与次跟踪 [D]. 广州：广州大学，2018.

[5] LI R S. A Note on Shadowing with Chain Transitivity [J]. Commun Nonlinear Sci Numer Simulat，2012，17(7)：2815-2823.

[6] RICHESON D，WISEMAN J. Chain Recurrence Rates and Topological Entropy [J]. Topology and its Applications，2008，156(2)：251-261.

[7] 汪火云，吴红英，刘兴臻. 树映射的拓扑可迁性 [J]. 广州大学学报(自然科学版)，2008，7(4)：12-14.

[8] 刘　青，易　鹏. 非自治离散动力系统中的链传递和链混合 [J]. 广州大学学报(自然科学版)，2018，17(6)：16-20.

[9] 张　瑜，薛西锋. 锥 b-度量空间中广义 c_1-距离下扩张映射的新不动点定理 [J]. 西南大学学报(自然科学版)，2020，

42(6): 54-59.
[10] 韩 艳, 张建元, 代婷婷. 锥度量空间中 c-距离下非连续映射的新不动点定理[J]. 西南大学学报(自然科学版), 2018, 40(8): 114-121.
[11] 赵俊玲. 强链回归集与强跟踪性[J]. 数学研究, 2004, 37(3): 286-291.
[12] 冀占江. 度量空间中强链回归点集的研究[J]. 西南师范大学学报(自然科学版), 2019, 44(2): 29-35.
[13] 冀占江, 张更容, 涂井先. 强跟踪性和强链回归点集的研究[J]. 河南大学学报(自然科学版), 2019, 49(6): 739-744.
[14] 孟 鑫. 一类具有逐点 Lipschitz 跟踪性的动力系统[J]. 山西大学学报(自然科学版), 2010, 33(4): 504-507.
[15] GU R B, SUN T X, XIA Z J. Asymptotic Pseudo-Orbit Tracing Property for Lift Systems[J]. 广西大学学报(自然科学版), 2003, 28(3): 214-217.
[16] 赵俊玲. 弱跟踪性的一些性质[J]. 广西师范大学学报(自然科学版), 2004, 22(3): 40-44.
[17] 邢春娜. 动力系统中的强跟踪性和强反跟踪性[D]. 大连: 辽宁师范大学, 2007.

On Chain Transitive and Strong Chain Recurrent Point in the Lift Space

JI Zhan-jiang[1,2,3], SHI Wei[4]

1. School of Data Science and Software Engineering, Wuzhou University, Wuzhou Guangxi 543002, China;
2. Guangxi Colleges and Universities Key Laboratory of Image Processing and Intelligent Information System, Wuzhou University, Wuzhou Guangxi 543002, China;
3. Guangxi Colleges and Universities Key Laboratory of Professional Software Technology, Wuzhou University, Wuzhou Guangxi 543002, China;
4. General Committee Office, Wuzhou Vocational College, Wuzhou Guangxi 543002, China

Abstract: The dynamical characteristics of chain transitive and the topological structure of strong chain recurrent point set are studied in the local equidistant lift space. With the property of the locally equidistant lift map, some new results of chain transitive and strong chain recurrent point set are obtained: If the map $\overline{f}$ is the lift map of the map f under locally equidistant, then the map $\overline{f}$ is chain transitive if and only if the map f is chain transitive; If the map $\overline{f}$ is the lift map of the map f under locally equidistant, then we have $\pi(SCR(\overline{f}))\subset SCR(f)$. These conclusions generalize and improve the results of chain transitive and strong chain recurrent point set in the existing literature.

Key words: lift space; equidistant map; chain transitive; strong chain recurrent point

责任编辑 廖 坤