第 46 卷　第 9 期　　西南师范大学学报(自然科学版)　　2021 年 9 月
Vol. 46　No. 9　Journal of Southwest China Normal University (Natural Science Edition)　Sep.　2021

DOI:10.13718/j.cnki.xsxb.2021.09.001

几种拉回吸引子的存在性与唯一性及其在 p-Laplacian 格点系统中的应用[①]

李　琳[1]，　杨　袁[2]，　舒　级[3]

1. 川北幼儿师范高等专科学校 初等教育系，四川 广元 628017；
2. 四川旅游学院 数学基础部，成都 610100；
3. 四川师范大学 数学科学学院 & 可视化计算与虚拟现实四川省重点实验室，成都 610068

摘要：推广了拉回吸引子的定义，提出了半一致紧的 $\mathscr{D}$-拉回吸引子与半一致吸引的 $\mathscr{D}$-拉回吸引子的概念且建立相应的抽象结果. 这两个理论结果被应用于定义在无界整数集上的非自治 p-Laplacian 格点系统. 证明了该系统在能量空间 ℓ^2 中分别具有一个唯一的半一致紧的 $\mathscr{D}$-拉回吸引子与一个唯一的半一致吸引的 $\mathscr{D}$-拉回吸引子. 此外，还研究了这些吸引子之间的结构与关系.

关　键　词：p-Laplacian 格点系统；非自治动力系统；半一致紧的 $\mathscr{D}$-拉回吸引子；半一致吸引的 $\mathscr{D}$-拉回吸引子

中图分类号：O211.4　　**文献标志码**：A　　**文章编号**：1000-5471(2021)09-0001-09

Existence and Uniqueness of Several Types of Pullback Attractors and Applications to Non-Autonomous p-Laplacian Lattice Systems

LI Lin[1]，　YANG Yuan[2]，　SHU Ji[3]

1. Department of Primary Education, North Sichuan Preschool Educators College, Guangyuan Sichuan 628017, China;
2. Department of Mathematical Foundations, Sichuan Tourism University, Chengdu 610100, China;
3. School of Mathematical Science and V.C. and V.R. Key Lab, Sichuan Normal University, Chengdu 610068, China

Abstract: In this paper, the definition of pullback attractors has been generalized, the concepts of semi-uniformly compact $\mathscr{D}$-pullback attractors and semi-uniformly attracting $\mathscr{D}$-pullback attractors been introduced, and corresponding abstract results been established. The two abstract results have been applied to a non-autonomous p-Laplacian lattice system defined on the integer set. It shows that the system has a unique semi-uniformly compact $\mathscr{D}$-pullback attractor and a unique semi-uniformly attracting $\mathscr{D}$-pullback attractor in the energy space l^2. In addition, the relationship and structure of those attractors have also been investigated. The main difficulties is to overcome the non-compactness of embeddings in infinite lattice systems and

---

① 收稿日期：2020-08-13
基金项目：四川省教育厅自然科学一般项目(17ZB0182)；国家自然科学基金项目(11871138)；四川旅游学院科研创新团队项目(20SCTUTY01).
作者简介：李　琳，讲师，主要从事微分方程与数学建模的研究.
通信作者：杨　袁，讲师.

the nonlinearity of the discrete p-Laplace operator for $p>2$.

Key words: p-Laplace lattice systems; non-autonomous dynamic systems; semi-uniformly compact $\mathscr{D}$-pullback attractors; semi-uniformly attracting $\mathscr{D}$-pullback attractors

动力系统是微分方程与泛函分析等多个数学分支的融合. 吸引子可看作状态空间中具有吸引性和不变性的紧集，它很好地描述了动力系统的解的长时间渐近行为. 目前，国内外越来越多的学者从事吸引子这一领域的研究，关于这方面的研究可参考文献[1-4]. 目前，自治动力系统的整体吸引子已被广泛研究，然而关于非自治动力系统的拉回吸引子的研究已逐步受到国内外广大学者的关注[5-11].

由文献[6]可知非自治动力系统的拉回吸引子 $\mathscr{A}=\{\mathscr{A}(\tau)\}_{\tau\in\mathbb{R}}$ 是一族具有紧性、拉回吸引性、不变性和最小性的集合，且该文献研究了 $\bigcup_{s\leqslant\tau}\mathscr{A}(s)$ 在状态空间中的有界性. 最近，文献[8]研究了 $\bigcup_{s\leqslant\tau}\mathscr{A}(s)$ 在状态空间中的紧性并建立了相关理论结果. 由该文献可知，若非自治动力系统在状态空间中有一个单调递增的拉回吸收集且是半一致拉回渐近紧的，则该非自治过程在状态空间中具有一个半一致紧的拉回吸引子.

然而，该理论结果只对于确定性的吸引域成立，且该文献并没有研究拉回吸引子的半一致吸引性. 目前，对于变化吸引域情形的拉回吸引子的半一致吸引性的研究还是公开的. 本文的首要目的是研究变化吸引域情形下的非自治动力系统的 $\mathscr{D}$-拉回吸引子的半一致吸引性与半一致紧性，这里 $\mathscr{D}$ 是一个变化的吸引域. 我们首先介绍半一致紧的 $\mathscr{D}$-拉回吸引子与半一致吸引的 $\mathscr{D}$-拉回吸引子的定义. 此外，还证明，若非自治动力系统有一个半一致吸收的拉回 $\mathscr{D}$-吸收集，则它具有一个唯一的半一致紧的 $\mathscr{D}$-拉回吸引子 $\mathscr{A}=\{\mathscr{A}(\tau)\}_{\tau\in\mathbb{R}}$ 与一个唯一的半一致吸引的 $\mathscr{D}$-拉回吸引子 $U=\{U(\tau)\}_{\tau\in\mathbb{R}}$，且它们满足包含关系 $\mathscr{A}\subseteq U$，见定理1.

本文的第二个目的是把该理论结果应用到定义在无界整数集上的非自治 p-Laplacian 格点系统：

$$\begin{aligned}&\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}u_i(t)+\lambda u_i(t)+(|u_i(t)-u_{i-1}(t)|^{p-2}(u_i(t)-u_{i-1}(t))-\\&|u_{i+1}(t)-u_i(t)|^{p-2}(u_{i+1}(t)-u_i(t)))+F_i(u_i(t))=g_i(t),\ t>\tau,\ \tau\in\mathbb{R},\ i\in\mathbb{Z}\end{aligned}\tag{1}$$

且带有初始条件：

$$u_i(\tau)=u_{0,i},\ \tau\in\mathbb{R},\ i\in\mathbb{Z}\tag{2}$$

其中 $\lambda>0$ 且 $p\geqslant 2$. 格点动力系统是偏微分方程的空间离散化. 近些年来，关于格点动力系统及其相关动力学的研究在物理学、化学、生物学、力学、金融学等相关学科领域大量涌现[12].

考虑如下 Banach 空间：

$$\ell^p=\left\{u=(u_i)_{i\in\mathbb{Z}}:\ \sum_{i\in\mathbb{Z}}|u_i|^p<+\infty\right\}\qquad p\geqslant 1$$

且范数为 $\|u\|_p=\left(\sum_{i\in\mathbb{Z}}|u_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}$. 若 $p=2$，我们分别用 $\|\cdot\|$ 和 $(\cdot,\cdot)$ 去表示 ℓ^2 的范数与内积. 在本文中，我们假设 $F_i\in C^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$ 是一类局部 Lipschitz 连续(对 $i\in\mathbb{Z}$ 是一致的)的非线性函数且满足 $F_i(s)s\geqslant s^p$，$\forall i\in\mathbb{Z}$，$s\in\mathbb{R}$. 对于时间依赖的外力源 $g=\{g_i\}_{i\in\mathbb{Z}}\in L^2_{loc}(\mathbb{R},\ell^2)$，我们给出两种不同的假设：对于 $\tau\in\mathbb{R}$，

$$\sup_{s\geqslant\tau}\int_{-\infty}^{s}\mathrm{e}^{\frac{\lambda}{2}(r-s)}\|g(r)\|^2\mathrm{d}r<\infty,\ \lim_{n\to\infty}\sup_{s\geqslant\tau}\int_{-\infty}^{s}\mathrm{e}^{\lambda(r-s)}\sum_{|i|\geqslant n}|g_i(r)|^2\mathrm{d}r=0\tag{3}$$

$$\sup_{s\leqslant\tau}\int_{-\infty}^{s}\mathrm{e}^{\frac{\lambda}{2}(r-s)}\|g(r)\|^2\mathrm{d}r<\infty,\ \lim_{n\to\infty}\sup_{s\leqslant\tau}\int_{-\infty}^{s}\mathrm{e}^{\lambda(r-s)}\sum_{|i|\geqslant n}|g_i(r)|^2\mathrm{d}r=0\tag{4}$$

若 $p=2$，则 p-Laplacian 格点系统(1)退化为标准的反应扩散格点系统. 目前，关于反应扩散格点系统的渐近行为已被研究[3-4,7,13]. 本文主要研究 $p\geqslant 2$ 的情形. 具体地，将在假设条件(3)，(4)下证明系统(1)具有唯一的半一致紧的 $\mathscr{D}$-拉回吸引子与唯一的半一致吸引的 $\mathscr{D}$-拉回吸引子. 而实现这一目标的关键点是如何建立系统的解在 ℓ^2 中的半一致 $\mathscr{D}$-拉回渐近紧性. 需要克服以下三个难点：

1) 由于整数集 $\mathbb{Z}$ 是无界的，因此 Sobolev 嵌入不是紧的.

2) 由于很难半一致地控制系统(1)的解在时间无穷远处的极限行为，因此不太容易获得解的半一致估计.

3）由于离散的 p-Laplace 算子在 $p \neq 2$ 时是非线性的，因此后向一致尾部估计会比 $p = 2$ 时困难得多.

为了克服以上困难，首先证明系统(1) 在能量空间 ℓ^2 上具有一个半一致吸收的 $\mathscr{D}$ 拉回吸收集，然后采用文献[13] 中的一致尾部估计的方法来建立该系统的解的后向一致渐近紧性. 此外，本文将多次用到下面的两个不等式：对于任意的 $p \geqslant 2$ 和 $a, b \in \mathbb{R}$，存在两个只依赖于 p 的正常数 γ_1 和 γ_2 使得

$$(|a|^{p-2}a - |b|^{p-2}b)(a-b) \geqslant \gamma_1 |a-b|^p \tag{5}$$

$$||a|^{p-2}a - |b|^{p-2}b| \leqslant \gamma_2(|a| + |b|)^{p-2} |a-b| \tag{6}$$

1　半一致紧的拉回吸引子与半一致吸引的拉回吸引子的概念

本节简单介绍一些关于非自治动力系统的基本概念和一些新的定义. 关于非自治动力系统的详细介绍可参考文献[6]. 设 $(X, \|\cdot\|_X)$ 是一个 Banach 空间，且 X 上两个集合 A 与 B 的 Hausdorff 半距离为：$\mathrm{dist}_X(A, B) = \sup_{a\in A}\inf_{b\in B}\|a-b\|_X$.

定义 1　设定义在 X 上的一族映射 $\Phi = \{\Phi(t, \tau): t \in \mathbb{R}^+, \tau \in \mathbb{R}\}$ 满足：对于所有的 $t, s \in \mathbb{R}^+$ 和 $\tau \in \mathbb{R}$，都有 $\Phi(0, \tau) = I$ 和 $\Phi(t+s, \tau) = \Phi(t, s+\tau) \circ \Phi(s, \tau)$ 成立，则称 $S(\cdot, \cdot)$ 是 X 上的一个非自治动力系统.

设 $D = \{D(\tau): \tau \in \mathbb{R}\}$ 是 X 中的某些非空有界集合所构成的集合族. 此外，记 $\mathscr{D}$ 是所有这种集合族构成的全体，且假设 $\mathscr{D}$ 是包含封闭的[14].

下面介绍通常的 $\mathscr{D}$-拉回吸引子和半一致紧的 $\mathscr{D}$-拉回吸引子的概念.

定义 2[14]　设 Φ 是定义在 X 上的一个非自治动力系统且 $\mathscr{A} = \{\mathscr{A}(\tau)\}_{\tau\in\mathbb{R}} \in \mathscr{D}$ 是 X 上的一个非自治集，若 $\mathscr{A}$ 满足如下条件：

1）对于任意的 $\tau \in \mathbb{R}$，$\mathscr{A}(\tau)$ 在 X 中是紧的；

2）$\mathscr{A}$ 是不变的：对于任意的 $t \in \mathbb{R}^+$ 和 $\tau \in \mathbb{R}$，都有 $\Phi(t, \tau)\mathscr{A}(\tau) = \mathscr{A}(t+\tau)$ 成立；

3）$\mathscr{A}$ 是 $\mathscr{D}$-拉回吸引的：即对于任意的 $\tau \in \mathbb{R}$ 和 $D \in \mathscr{D}$，都有

$$\lim_{t\to+\infty} \mathrm{dist}_X(\Phi(t, \tau-t)D(\tau-t), \mathscr{A}(\tau)) = 0 \tag{7}$$

则称 $\mathscr{A}$ 是 Φ 的一个 $\mathscr{D}$-拉回吸引子. 此外，在本文中，若 $\overline{\bigcup_{s\geqslant\tau}\mathscr{A}(s)}^X$ 在 X 中是紧的，则称 $\mathscr{A}$ 是 Φ 的一个前向一致紧的 $\mathscr{D}$-拉回吸引子. 若 $\overline{\bigcup_{s\leqslant\tau}\mathscr{A}(s)}^X$ 在 X 中是紧的，则称 $\mathscr{A}$ 是 Φ 的一个后向一致紧的 $\mathscr{D}$-拉回吸引子.

下面介绍半一致吸引的 $\mathscr{D}$-拉回吸引子的概念.

定义 3　设 Φ 是定义在 X 上的一个非自治动力系统且 $U = \{U(\tau)\}_{\tau\in\mathbb{R}} \in \mathscr{D}$ 是 X 上的一个非自治集. 若 U 满足如下条件：

(i) 对于任意的 $\tau \in \mathbb{R}$，$U(\tau)$ 在 X 中是紧的；

(ii) U 是前向一致 $\mathscr{D}$-拉回吸引的：即对每一个 $\tau \in \mathbb{R}$ 和 $D \in \mathscr{D}$，都有

$$\lim_{t\to+\infty} \sup_{s\geqslant\tau} \mathrm{dist}_X(\Phi(t, s-t)D(s-t), U(\tau)) = 0 \tag{8}$$

(iii) U 是所有满足条件(i) 和(ii) 的集合中最小的一个，

则称 U 是 Φ 的一个前向一致吸引的 $\mathscr{D}$-拉回吸引子. 此外，若 U 满足如下条件：

1）对于任意的 $\tau \in \mathbb{R}$，$U(\tau)$ 在 X 中是紧的；

2）U 是后向一致 $\mathscr{D}$-拉回吸引的：即对每一个 $\tau \in \mathbb{R}$ 和 $D \in \mathscr{D}$，都有

$$\lim_{t\to+\infty} \sup_{s\leqslant\tau} \mathrm{dist}_X(\Phi(t, s-t)D(s-t), U(\tau)) = 0 \tag{9}$$

3）U 是所有满足条件(1) 和(2) 的集合中最小的一个，

则称 U 是 Φ 的一个后向一致吸引的 $\mathscr{D}$-拉回吸引子.

定义 4　设 Φ 是一个定义在 X 上的一个非自治动力系统且 $\mathscr{K} = \{\mathscr{K}(\tau)\}_{\tau\in\mathbb{R}}$ 是 X 中的一个非自治集.

(i) 若对每一个 $\tau \in \mathbb{R}$ 和 $D \in \mathscr{D}$，都存在一个时间 $T =: T(\tau, D) > 0$ 使得

$$\bigcup_{\tau\geqslant T} \Phi(t, \tau-t)D(\tau-t) \subset \mathscr{K}(\tau)$$

则称 $\mathscr{K}$ 是关于 Φ 的一个 $\mathscr{D}$-拉回吸收集.

(ii) 若对每一个 $\tau \in \mathbb{R}$ 和 $D \in \mathscr{D}$，都存在一个时间 $T =: T(\tau, D) > 0$ 使得

$$\bigcup_{\tau \geqslant T}\bigcup_{s \geqslant \tau} \Phi(t, s-t)D(s-t) \subset \mathcal{K}(\tau)$$

则称 $\mathcal{K}$ 是一个关于 Φ 的一个前向一致吸收 $\mathcal{D}$-拉回吸收集.

(iii) 若对每一个 $\tau \in \mathbb{R}$ 和 $D \in \mathcal{D}$，都存在一个时间 $T =: T(\tau, D) > 0$ 使得

$$\bigcup_{\tau \geqslant T}\bigcup_{s \leqslant \tau} \Phi(t, s-t)D(s-t) \subset \mathcal{K}(\tau)$$

则称 $\mathcal{K}$ 是关于 Φ 的一个后向一致吸收 $\mathcal{D}$-拉回吸收集.

定义 5 设 Φ 是一个定义在 X 上的非自治动力系统.

(i) 若 $\tau \in \mathbb{R}$ 和 $D \in \mathcal{D}$，当 $t_n \to +\infty$ 和 $x_n \in D(\tau - t_n)$ 时，序列 $\{\Phi(t_n, \tau - t_n)x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 在 X 中是预紧的，则称 Φ 在 X 中是 $\mathcal{D}$-拉回渐近紧的.

(ii) 若 $\tau \in \mathbb{R}$ 和 $D \in \mathcal{D}$，当 $s_n \geqslant \tau$，$t_n \to +\infty$ 和 $x_n \in D(s_n - t_n)$ 时，序列 $\{\Phi(t_n, s_n - t_n)x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 在 X 中是预紧的，则称 Φ 在 X 中是前向一致 $\mathcal{D}$-拉回渐近紧的.

(iii) 若 $\tau \in \mathbb{R}$ 和 $D \in \mathcal{D}$，当 $s_n \leqslant \tau$，$t_n \to +\infty$ 和 $x_n \in D(s_n - t_n)$ 时，序列 $\{\Phi(t_n, s_n - t_n)x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 在 X 中是预紧的，则称 Φ 在 X 中是后向一致 $\mathcal{D}$-拉回渐近紧的.

2 半一致紧的拉回吸引子与半一致吸引的拉回吸引子的存在性定理

本节研究半一致紧的 $\mathcal{D}$-拉回吸引子与半一致吸引的 $\mathcal{D}$-拉回吸引子的存在性与唯一性. 此外，我们还研究了他们的结构和关系.

定理 1 设 Φ 是 X 中的一个非自治动力系统，我们有如下两个结论：

(i) 若 Φ 在 X 中有一个闭的前向一致吸收的 $\mathcal{D}$-拉回吸收集 $\mathcal{K} = \{\mathcal{K}(\tau)\}_{\tau \in \mathbb{R}} \in \mathcal{D}$，且 Φ 在 X 中是前向一致 $\mathcal{D}$-拉回渐近紧的，则 Φ 在 X 中有一个唯一的前向一致紧 $\mathcal{D}$-拉回吸引子 $\mathcal{A} = \{\mathcal{A}(\tau)\}_{\tau \in \mathbb{R}} \in \mathcal{D}$ 和一个唯一的前向一致吸引的 $\mathcal{D}$-拉回吸引子 $U = \{U(\tau)\}_{\tau \in \mathbb{R}} \in \mathcal{D}$. 此外，我们还有 $\bigcup\limits_{s \geqslant \tau} \mathcal{A}(s)^X \subseteq U(\tau)$，且 $\mathcal{A}$ 与 U 有如下结构：

$$\mathcal{A}(\tau) = \bigcap_{r \geqslant 0}\bigcup_{t \geqslant r} \Phi(t, \tau - t)\mathcal{K}(\tau - t)^X,\ U(\tau) = \bigcap_{r \geqslant 0}\bigcup_{t \geqslant r}\bigcup_{s \geqslant \tau} \Phi(t, \tau - t)\mathcal{K}(\tau - t)^X,\ \tau \in \mathbb{R} \tag{10}$$

(ii) 若 Φ 在 X 中有一个闭的后向一致吸收的 $\mathcal{D}$-拉回吸收集 $\mathcal{K} = \{\mathcal{K}(\tau)\}_{\tau \in \mathbb{R}} \in \mathcal{D}$，且 Φ 在 X 中是后向一致 $\mathcal{D}$-拉回渐近紧的，则 Φ 在 X 中有一个唯一的后向一致紧 $\mathcal{D}$-拉回吸引子 $\mathcal{A} = \{\mathcal{A}(\tau)\}_{\tau \in \mathbb{R}} \in \mathcal{D}$ 和一个唯一的后向一致吸引的 $\mathcal{D}$-拉回吸引子 $U = \{U(\tau)\}_{\tau \in \mathbb{R}} \in \mathcal{D}$. 此外，我们还有 $\bigcup_{s \leqslant \tau} \mathcal{A}(s)^X \subseteq U(\tau)$，且 $\mathcal{A}(\tau)$ 与 $U(\tau)$ 有如下结构：

$$\mathcal{A}(\tau) = \bigcap_{r \geqslant 0}\bigcup_{t \geqslant r} \Phi(t, \tau - t)\mathcal{K}(\tau - t)^X,\ U(\tau) = \bigcap_{r \geqslant 0}\bigcup_{t \geqslant r}\bigcup_{s \leqslant \tau} \Phi(t, \tau - t)\mathcal{K}(\tau - t)^X,\ \tau \in \mathbb{R} \tag{11}$$

证 由于(ii)的证明与(i)的类似，故只需证明(i)即可. 首先分三步证明(10)式中的 $U \in \mathcal{D}$ 且 U 是非自治动力系统 Φ 在 X 中的唯一的前向一致吸引的 $\mathcal{D}$-拉回吸引子.

第一步：$U \in \mathcal{D}$. 由于 $\mathcal{K} \in \mathcal{D}$ 且 $\mathcal{K}$ 是 Φ 在 X 中的一个前向一致吸收的 $\mathcal{D}$-拉回吸收集，于是对于每一个 $\tau \in \mathbb{R}$，存在 $T_1 = T_1(\tau, \mathcal{K}) > 0$ 使得 $\bigcup\limits_{t \geqslant T_1}\bigcup\limits_{s \geqslant \tau} \Phi(t, s-t)\mathcal{K}(s-t) \subseteq \mathcal{K}(\tau)$. 由于 $\mathcal{K}$ 是闭的，因此对于所有的 $r \geqslant T_1$，

$$\bigcup_{t \geqslant r}\bigcup_{s \geqslant \tau} \Phi(t, s-t)\mathcal{K}(s-t)^X \subseteq \bigcup_{t \geqslant T_1}\bigcup_{s \geqslant \tau} \Phi(t, s-t)\mathcal{K}(s-t)^X \subseteq \mathcal{K}(\tau)^X = \mathcal{K}(\tau)$$

再由 $U(\tau)$ 的定义可知

$$U(\tau) \subseteq \bigcap_{r \geqslant T_1}\bigcup_{t \geqslant r}\bigcup_{s \geqslant \tau} \Phi(t, s-t)\mathcal{K}(s-t)^X \subseteq \mathcal{K}(\tau)$$

由于 $\mathcal{D}$ 是包含闭的且 $\mathcal{K} \in \mathcal{D}$，因此 $U \in \mathcal{D}$.

第二步：U 在 X 中的紧性. 任取 $\{y_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq U(\tau)$，由 $U(\tau)$ 的定义可知存在 $s_n \geqslant \tau$，$t_n \uparrow +\infty$ 和 $x_n \in \mathcal{K}(s_n - t_n)$ 使得

$$\| \Phi(t_n, s_n - t_n)x_n - y_n \| \leqslant \frac{1}{n} \tag{12}$$

由于 Φ 在 X 中是前向一致 $\mathcal{D}$ 拉回渐近紧的，可知存在 $y_0 \in X$ 和一个收敛子列使得

$$\lim_{k \to \infty} \| \Phi(t_{n_k}, s_{n_k} - t_{n_k})x_{n_k} - y_0 \|_X = 0 \tag{13}$$

对于 $r>0$，由(13)式可知存在一个 $K\in\mathbb{N}$，使得当 $k\geqslant K$ 时，$t_{n_k}\geqslant r$ 且

$$y_0\in\bigcup_{k\geqslant K}\{\Phi(t_{n_k},s_{n_k}-t_{n_k})x_{n_k}\}^X\subseteq\bigcup_{t\geqslant r}\bigcup_{s\geqslant\tau}\Phi(t,\tau-t)\mathcal{K}(\tau-t)^X$$

由此可知 $y_0\in U(\tau)$．另一方面，由(12)－(13)式可知，在 X 中，当 $k\to\infty$ 时，$y_{n_k}\to y_0$．故 $U(\tau)$ 在 X 中是紧的．

第三步：U 的前向一致吸引性．用反证法证明，对于每一个 $\tau\in\mathbb{R}$ 和 $D\in\mathcal{D}$，U 满足(8)式．若不成立，则存在 $\eta>0$，$\tau_0\in\mathbb{R}$，$s_n\geqslant\tau_0$，$t_n\to+\infty$ 和 $x_n\in D(s_n-t_n)$ 使得

$$\mathrm{dist}_X(\Phi(t_n,s_n-t_n)D(s_n-t_n),U(\tau_0))\geqslant\eta \tag{14}$$

由第二步的证明过程可知，存在 $y_0\in X$ 和一个收敛子列使得在 X 中当 $k\to\infty$ 时，$\Phi(t_{n_k},s_{n_k}-t_{n_k})x_{n_k}\to y_0$ 且 $y_0\in U(\tau_0)$．这与(14)式矛盾．故 U 具有前向一致 $\mathcal{D}$-拉回吸引性．

第四步：U 的最小性．设 $B\in\mathcal{D}$ 在 X 中是紧的且是 Φ 的一个前向一致吸引的 $\mathcal{D}$-拉回吸引集．我们将证明 $U\subseteq B$．对于每一个 $\tau\in\mathbb{R}$，设 $x\in U(\tau)$．由 $U(\tau)$ 的定义可知，存在 $s_n\geqslant\tau$，$t_n\to+\infty$，$x_n\in\mathcal{K}(s_n-t_n)$ 使得当 $n\to\infty$ 时，$\Phi(t_n,s_n-t_n)x_n\to x$．另一方面，由 B，$\mathcal{K}\in\mathcal{D}$ 和 B 的前向一致 $\mathcal{D}$-拉回吸引性可知，当 $n\to\infty$ 时，

$$\mathrm{dist}_X(\Phi(t_n,s_n-t_n)x_n,B(\tau))\leqslant\sup_{s\geqslant t}\mathrm{dist}_X(\Phi(t,s-t_n)\mathcal{K}(s-t_n),B(\tau))\to 0$$

再由 $B(\tau)$ 的紧性可知 $x\in B(\tau)$，故 $U(\tau)\subseteq B(\tau)$，从而证明了 U 的最小性和唯一性．

由以上 4 个步骤可知 $U\in\mathcal{D}$ 是 Φ 的唯一的前向一致吸引的 $\mathcal{D}$-拉回吸引子．此外，由本定理的条件和文献[14]的定理 2.23 可知，非自治动力系统 Φ 在 X 中有一个唯一的 $\mathcal{D}$-拉回吸引子 $\mathcal{A}\in\mathcal{D}$，且 $\mathcal{A}$ 由(10)式给出．由 $\mathcal{A}$ 与 U 的结构可知，对于任意的 $\tau\in\mathbb{R}$，有 $\bigcup_{s\geqslant\tau}\mathcal{A}(s)^X\subseteq U(\tau)$．这与 $U(\tau)$ 在 X 中的紧性可推得 $\bigcup_{s\geqslant\tau}\mathcal{A}(s)^X$ 在 X 中的紧性．于是 $\mathcal{A}\in\mathcal{D}$ 是 Φ 的唯一的前向一致紧的 $\mathcal{D}$-拉回吸引子．证毕．

3　非自治 p-Laplacian 格点系统

为了把系统(1)－(2)转化为一个定义在 ℓ^2 上的抽象系统，定义两个由 ℓ^2 到 ℓ^2 的有界线性算子 B 和 B^*：$(Bu)_i=u_{i+1}-u_i$ 和 $(B^*u)_i=u_{i-1}-u_i$，$\forall u=(u_i)_{i\in\mathbb{Z}}\in\ell^2$．容易证明，对于任意的 $u,v\in\ell^2$，都有 $\|Bu\|\leqslant 2\|u\|$，$BB^*=B^*B$ 和 $(B^*u,v)=(u,Bv)$．对于 $p\geqslant 2$，定义离散的 p-Laplace 算子 A_p：$\ell^2\longrightarrow\ell^2$

$$\begin{aligned}(A_pu)_i&=(B^*((|(Bu)_i|^{p-2}(Bu)_i)_{i\in\mathbb{Z}}))_i=\\&|u_i-u_{i-1}|^{p-2}(u_i-u_{i-1})-|u_{i+1}-u_i|^{p-2}(u_{i+1}-u_i),\ \forall u=(u_i)_{i\in\mathbb{Z}}\in\ell^2\end{aligned} \tag{15}$$

由(6)式和(15)式可知，对于任意的 $u,v\in\ell^2$，

$$\begin{aligned}&\sum_{i\in\mathbb{Z}}|(A_pu)_i-(A_pv)_i|^2=\\&\sum_{i\in\mathbb{Z}}|(B^*((|(Bu)_i|^{p-2}(Bu)_i)_{i\in\mathbb{Z}}))_i-(B^*((|(Bv)_i|^{p-2}(Bv)_i)_{i\in\mathbb{Z}}))_i|^2\leqslant\\&2\sum_{i\in\mathbb{Z}}\Big||u_i-u_{i-1}|^{p-2}(u_i-u_{i-1})-|v_i-v_{i-1}|^{p-2}(v_i-v_{i-1})\Big|^2+\\&2\sum_{i\in\mathbb{Z}}\Big||u_{i+1}-u_i|^{p-2}(u_{i+1}-u_i)-|v_{i+1}-v_i|^{p-2}(v_{i+1}-v_i)\Big|^2=\\&4\sum_{i\in\mathbb{Z}}\Big||u_i-u_{i-1}|^{p-2}(u_i-u_{i-1})-|v_i-v_{i-1}|^{p-2}(v_i-v_{i-1})\Big|^2\leqslant\\&4\gamma_2^2\sum_{i\in\mathbb{Z}}(|u_i-u_{i-1}|+|v_i-v_{i-1}|)^{2p-4}|u_i-u_{i-1}-v_i+v_{i-1}|^2=\\&4\gamma_2^2\sum_{i\in\mathbb{Z}}(|(B^*u)_i|+|(B^*v)_i|)^{2p-4}|(B^*(u-v))_i|^2\leqslant\\&2^p\gamma_2^2(\|B^*u\|^2+\|B^*v\|^2)^{p-2}\|B^*(u-v)\|^2\leqslant 2^{3p-2}\gamma_2^2(\|u\|+\|v\|)^{2p-4}\|u-v\|^2\end{aligned}$$

于是 A_p：$\ell^2\longrightarrow\ell^2$ 是局部 Lipschitz 连续的，也即是，对于每一个 ℓ^2 上的有界集 E，存在一个常数 $c_1=c_1(E)>0$ 使得

$$\|(A_pu)-(A_pv)\|\leqslant c_1\|u-v\|,\ \forall u,v\in E \tag{16}$$

此外，由(5)式和(15)式可知，对于任意的 $u,v\in\ell^2$，

$$\sum_{i\in\mathbb{Z}}((A_p u)_i-(A_p v)_i)(u_i-v_i)=$$
$$\sum_{i\in\mathbb{Z}}(|u_i-u_{i-1}|^{p-2}(u_i-u_{i-1})-|v_i-v_{i-1}|^{p-2}(v_i-v_{i-1}))(u_i-v_i)+$$
$$\sum_{i\in\mathbb{Z}}(|u_{i+1}-u_i|^{p-2}(u_{i+1}-u_i)-|v_{i+1}-v_i|^{p-2}(v_{i+1}-v_i))(v_i-u_i)=$$
$$\sum_{i\in\mathbb{Z}}(|u_i-u_{i-1}|^{p-2}(u_i-u_{i-1})-|v_i-v_{i-1}|^{p-2}(v_i-v_{i-1}))(u_i-v_i)+$$
$$\sum_{i\in\mathbb{Z}}(|u_i-u_{i-1}|^{p-2}(u_i-u_{i-1})-|v_i-v_{i-1}|^{p-2}(v_i-v_{i-1}))(v_{i-1}-u_{i-1})=$$
$$\sum_{i\in\mathbb{Z}}(|u_i-u_{i-1}|^{p-2}(u_i-u_{i-1})-|v_i-v_{i-1}|^{p-2}(v_i-v_{i-1}))(u_i-u_{i-1}-(v_i-v_{i-1}))\geqslant$$
$$\gamma_1\sum_{i\in\mathbb{Z}}|u_i-u_{i-1}-(v_i-v_{i-1})|^p\geqslant 0$$

于是 $A_p: \ell^2\longrightarrow\ell^2$ 是单调的，也即是

$$(A_p(u)-A_p(v),\ u-v)\geqslant 0,\ \forall\, u,v\in\ell^2 \tag{17}$$

为了处理方程中的非线性函数，定义算子 $F(u)=(F_i(u_i))_{i\in\mathbb{Z}}$，$\forall\, u=(u_i)_{i\in\mathbb{Z}}\in\ell^2$. 由于 $F_i\in C^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$ 是局部 Lipschitz 连续的，于是对于每一个 ℓ^2 上的有界集 E，存在一个常数 $c_2=c_2(E)>0$ 使得

$$\|F(u)-F(v)\|\leqslant c_2\|u-v\|,\ \forall\, u,v\in E \tag{18}$$

此外，还有 $(F(u),\ u)\geqslant\|u\|_p^p$，$\forall\, u\in\ell^2$. 最后，把系统(1)－(2) 重写 ℓ^2 上的抽象的系统：

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}u(t)+\lambda\, u(t)+A_p u(t)+F(u(t))=g(t),\ t>\tau,\ \tau\in\mathbb{R} \tag{19}$$

且具有初始条件：

$$u(\tau)=u_0\in\ell^2 \tag{20}$$

由(16)－(18) 式可知，对于每一个 $g\in L^2_{loc}(\mathbb{R},\ \ell^2)$ 和 $(\tau,\ u_0)\in\mathbb{R}\times\ell^2$，系统(19)－(20) 有一个唯一的解 $u(\cdot,\ \tau,\ u_0)\in C([\tau,\ +\infty),\ \ell^2)$. 基于此，对于 $t\in\mathbb{R}^+$ 和 $\tau\in\mathbb{R}$，我们定义一个非自治动力系统 $\Phi(t,\ \tau): \ell^2\longrightarrow\ell^2$，$\Phi(t,\ \tau)u_0=u(t+\tau,\ \tau,\ u_0)$，$\forall\, u_0\in\ell^2$. 为了获得解的一致估计，我们介绍 3 个吸引域：$\mathscr{D}$，$\mathscr{B}$ 和 $\mathscr{C}$，它们分别是满足如下条件的集合族 $D=\{D(\tau):\tau\in\mathbb{R}\}$，$B=\{B(\tau):\tau\in\mathbb{R}\}$ 和 $C=\{C(\tau):\tau\in\mathbb{R}\}$ 所构成的全体：

$$\lim_{t\to+\infty}\mathrm{e}^{-\lambda t}\|D(\tau-t)\|^2=0,\ \lim_{t\to+\infty}\mathrm{e}^{-\lambda t}\sup_{s\geqslant\tau}\|B(s-t)\|^2=0,\ \lim_{t\to+\infty}\mathrm{e}^{-\lambda t}\sup_{s\leqslant\tau}\|C(s-t)\|^2=0$$

4 解的一致估计与一致尾端估计

首先建立系统(19)－(20) 的解在 ℓ^2 上的一致估计.

引理 1 (i) 若(3) 式或(4) 式成立，则对于每个 $\tau\in\mathbb{R}$ 和 $D\in\mathscr{D}$，存在 $T:=T(\tau,\ D)>0$ 使得

$$\sup_{t\geqslant T}\sup_{u_0\in D(\tau-t)}\|u(\tau,\ \tau-t,\ u_0)\|^2\leqslant\frac{2}{\lambda}\int_{-\infty}^{\tau}\mathrm{e}^{\lambda(r-\tau)}\|g(r)\|^2\mathrm{d}r \tag{21}$$

(ii) 若(3) 式成立，则对于每个 $\tau\in\mathbb{R}$ 和 $B\in\mathscr{B}$，存在 $T:=T(\tau,\ \mathscr{B})>0$ 使得

$$\sup_{t\geqslant T}\sup_{s\geqslant t}\sup_{u_0\in B(s-t)}\|u(s,\ s-t,\ u_0)\|^2\leqslant\frac{2}{\lambda}\sup_{s\geqslant\tau}\int_{-\infty}^{s}\mathrm{e}^{\lambda(r-s)}\|g(r)\|^2\mathrm{d}r \tag{22}$$

(iii) 若(4) 式成立，则对于每个 $\tau\in\mathbb{R}$ 和 $C\in\mathscr{C}$，存在 $T:=T(\tau,\ C)>0$ 使得

$$\sup_{t\geqslant T}\sup_{s\leqslant t}\sup_{u_0\in C(s-t)}\|u(s,\ s-t,\ u_0)\|^2\leqslant\frac{2}{\lambda}\sup_{s\leqslant\tau}\int_{-\infty}^{s}\mathrm{e}^{\lambda(r-s)}\|g(r)\|^2\mathrm{d}r \tag{23}$$

证 由于(i) 与(iii) 的证明与(ii) 的证明是类似的，故只证明(ii). 由(19)－(20) 式可知

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|u(t)\|^2+2\lambda\|u(t)\|^2+2(A_p(u(t)),\ u(t))+2(F(u(t)),\ u(t))=2(g(t),\ u(t))$$

于是由(17) 式和 $(F(u),\ u)\geqslant\|u\|_p^p$ 可知

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|u(t)\|^2+\lambda\|u(t)\|^2+\|u\|_p^p\leqslant\frac{1}{\lambda}\|g(t)\|^2$$

对于 $\tau \in \mathbb{R}$ 和 $B \in \mathscr{B}$，由 Gronwall 不等式可知，对于任意的 $s \geqslant \tau$ 和 $t \geqslant 0$，

$$\| u(s, s-t, u_0) \|^2 + \int_{s-t}^{s} \mathrm{e}^{\lambda(r-s)} \| u(r, s-t, u_0) \|_p^p \mathrm{d}r \leqslant$$

$$\mathrm{e}^{-\lambda t} \| u_0 \|^2 + \frac{1}{\lambda} \int_{s-t}^{s} \mathrm{e}^{\lambda(r-s)} \| g(r) \|^2 \mathrm{d}r \leqslant$$

$$\mathrm{e}^{-\lambda t} \sup_{s \geqslant \tau} \| B(s-t) \|^2 + \frac{1}{\lambda} \sup_{s \geqslant \tau} \int_{-\infty}^{s} \mathrm{e}^{\lambda(r-s)} \| g(r) \|^2 \mathrm{d}r$$

于是由 $\lim\limits_{t \to +\infty} \mathrm{e}^{-\lambda t} \sup\limits_{s \geqslant \tau} \| B(s-t) \|^2 = 0$ 可知，存在 $T := T(\tau, B) > 0$ 使得当 $t \geqslant T$ 时，

$$\| u(s, s-t, u_0) \|^2 + \int_{s-t}^{s} \mathrm{e}^{\lambda(r-s)} \| u(r, s-t, u_0) \|_p^p \mathrm{d}r \leqslant \frac{2}{\lambda} \sup_{s \geqslant \tau} \int_{-\infty}^{s} \mathrm{e}^{\lambda(r-s)} \| g(r) \|^2 \mathrm{d}r \tag{24}$$

证毕.

接下来运用文献[13]中的截断方法获取解的后向一致尾部估计. 定义一个光滑函数 $\xi: \mathbb{R} \longrightarrow [0, 1]$ 使得当 $|s| \leqslant 1$ 时 $\xi(s) = 0$，且当 $|s| \geqslant 2$ 时 $\xi(s) = 1$.

引理 2　(i) 若(3)式或(4)式成立，则对于每个 $\tau \in \mathbb{R}$ 和 $D \in \mathscr{D}$，有

$$\lim_{t \to +\infty} \lim_{n \to \infty} \sup_{u_0 \in D(\tau-t)} \sum_{|i| \geqslant n} | u_i(\tau, \tau-t, u_0) |^2 = 0$$

(ii) 若(3)式成立，则对于每个 $\tau \in \mathbb{R}$ 和 $B \in \mathscr{B}$，有

$$\lim_{t \to +\infty} \lim_{n \to \infty} \sup_{s \geqslant \tau} \sup_{u_0 \in B(s-t)} \sum_{|i| \geqslant n} | u_i(s, s-t, u_0) |^2 = 0$$

(iii) 若(4)式成立，则对于每个 $\tau \in \mathbb{R}$ 和 $C \in \mathscr{C}$，有

$$\lim_{t \to +\infty} \lim_{n \to \infty} \sup_{s \leqslant \tau} \sup_{u_0 \in C(s-t)} \sum_{|i| \geqslant n} | u_i(s, s-t, u_0) |^2 = 0$$

证　由于(i)与(iii)的证明与(ii)的证明是类似的，故只证明(ii).

对于任意的 $n \in \mathbb{N}$，记 $\xi_n = \left(\xi\left(\frac{i}{n}\right)\right)_{i \in \mathbb{Z}}$ 和 $\xi_n u = \left(\xi\left(\frac{i}{n}\right) u_i\right)_{i \in \mathbb{Z}}$. 由(19)－(20)式可知

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \| \xi_n u(t) \|^2 + 2\lambda \| \xi_n u(t) \|^2 \mathrm{d}t + 2(A_p(u(t)), \xi_n^2 u(t)) \mathrm{d}t + 2(F(u(t)), \xi_n^2 u(t)) = 2(g, \xi_n^2 u(t)) \tag{25}$$

由光滑函数 ξ 的性质和 $l^2 \subseteq l^p$ 可知，(25)式左边的第三项满足

$$2(A_p(u(t)), \xi_n^2 u(t)) = 2 \sum_{i \in \mathbb{Z}} | (Bu(t))_i |^{p-2} (Bu(t))_i (B(\xi_n^2 u))_i =$$

$$2 \sum_{i \in \mathbb{Z}} | u_{i+1} - u_i |^{p-2} (u_{i+1} - u_i) \left(\xi^2\left(\frac{i+1}{n}\right) u_{i+1} - \xi^2\left(\frac{i}{n}\right) u_i \right) =$$

$$2 \sum_{i \in \mathbb{Z}} | u_{i+1} - u_i |^{p-2} (u_{i+1} - u_i) \left(\left(\xi^2\left(\frac{i+1}{n}\right) - \xi^2\left(\frac{i}{n}\right) \right) u_{i+1} + \xi^2\left(\frac{i}{n}\right)(u_{i+1} - u_i) \right) =$$

$$2 \sum_{i \in \mathbb{Z}} | u_{i+1} - u_i |^p \xi^2\left(\frac{i}{n}\right) + 2 \sum_{i \in \mathbb{Z}} | u_{i+1} - u_i |^{p-2} (u_{i+1} - u_i) u_{i+1} \left(\xi^2\left(\frac{i+1}{n}\right) - \xi^2\left(\frac{i}{n}\right) \right) \geqslant$$

$$2 \sum_{i \in \mathbb{Z}} | u_{i+1} - u_i |^{p-2} (u_{i+1} - u_i) u_{i+1} \left(\xi^2\left(\frac{i+1}{n}\right) - \xi^2\left(\frac{i}{n}\right) \right) \geqslant$$

$$-4 \sum_{i \in \mathbb{Z}} | u_{i+1} - u_i |^{p-1} | u_{i+1} | \left| \xi\left(\frac{i+1}{n}\right) - \xi\left(\frac{i}{n}\right) \right| \geqslant$$

$$-\frac{c_3}{n} \sum_{i \in \mathbb{Z}} | u_{i+1} - u_i |^{p-1} | u_{i+1} | \geqslant -\frac{c_4}{n} \sum_{i \in \mathbb{Z}} (| u_{i+1} |^p + | u_i |^p) \geqslant -\frac{c_5}{n} \| u \|_p^p \tag{26}$$

其中 c_3，c_4 和 c_5 都是不依赖于 n 的正常数. 最后由(25)－(26)式和 $(F(u), u) \geqslant 0$ 可知

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \| \xi_n u(t) \|^2 + \lambda \| \xi_n u(t) \|^2 \leqslant \frac{c_5}{n} \mathbb{E}(\| u \|_p^p) + \frac{1}{\lambda} \sum_{|i| \geqslant n} | g_i(t) |^2 \tag{27}$$

对于 $\tau \in \mathbb{R}$ 和 $B \in \mathscr{B}$，我们由 Gronwall 不等式和(24)式可知，存在 $T := T(\tau, B) > 0$ 使得当 $t \geqslant T$ 时，对于任意的 $s \geqslant \tau$ 都有

$$\| \xi_n u(s, s-t, u_0) \|^2 \leqslant$$

$$
\mathrm{e}^{-\lambda t}\|\xi_n u_0\|^2+\frac{1}{\lambda}\sup_{s\geqslant t}\int_{s-\tau}^{s}\mathrm{e}^{\lambda(r-s)}\sum_{|i|\geqslant n}|g_i(r)|^2\mathrm{d}r+\frac{c_5}{n}\sup_{s\geqslant t}\int_{s-\tau}^{s}\mathrm{e}^{\kappa(r-s)}\|u(r,s-t,u_0)\|_p^p\mathrm{d}r\leqslant
$$

$$
\mathrm{e}^{-\lambda t}\sup_{s\geqslant\tau}\|B(s-t)\|^2+\frac{1}{\lambda}\sup_{s\geqslant t}\int_{-\infty}^{s}\mathrm{e}^{\lambda(r-s)}\sum_{|i|\geqslant n}|g_i(r)|^2\mathrm{d}r+\frac{2c_5}{\lambda n}\sup_{s\geqslant\tau}\int_{-\infty}^{s}\mathrm{e}^{\lambda(r-s)}\|g(r)\|^2\mathrm{d}r \tag{28}
$$

由(28)式和(3)式可知,当 $t\to+\infty$ 和 $n\to\infty$ 时,

$$
\sup_{s\geqslant\tau}\sup_{u_0\in B(s-t)}\sum_{|i|\geqslant 2n}|u_i(s,s-t,u_0)|^2\leqslant\sup_{s\geqslant\tau}\sup_{u_0\in B(s-t)}\|\xi_n u(s,s-t,u_0)\|^2\to 0
$$

由此可知(ii)得证. 证毕.

5 半一致紧的拉回吸引子与半一致吸引的拉回吸引子的存在性

本节证明非自治 p-Laplacian 格点系统(19)-(20)在能量空间 ℓ^2 上分别有一个唯一的半一致紧的拉回吸引子和一个唯一的半一致吸引的拉回吸引子. 首先证明非自治动力系统 Φ 具有一个半一致吸收的拉回吸收集.

引理 3 (i) 若(3)式或(4)式成立,则 Φ 具有一个 $\mathscr{D}$-拉回吸收集 $\mathscr{K}_{\mathscr{D}}=\{\mathscr{K}_{\mathscr{D}}(\tau):\tau\in\mathbb{R}\}\in\mathscr{D}$ 且 $\mathscr{K}_{\mathscr{D}}(\tau)=\left\{u\in\ell^2:\|u\|^2\leqslant\frac{2}{\lambda}\int_{-\infty}^{\tau}\mathrm{e}^{\lambda(r-\tau)}\|g(r)\|^2\mathrm{d}r\right\}$.

(ii) 若(3)式成立,则 Φ 具有一个前向一致吸收的 $\mathscr{B}$-拉回吸收集 $\mathscr{K}_{\mathscr{B}}=\{\mathscr{K}_{\mathscr{B}}(\tau):\tau\in\mathbb{R}\}\in\mathscr{B}$ 且 $\mathscr{K}_{\mathscr{B}}(\tau)=\left\{u\in\ell^2:\|u\|^2\leqslant\frac{2}{\lambda}\sup_{s\geqslant\tau}\int_{-\infty}^{s}\mathrm{e}^{\lambda(r-s)}\|g(r)\|^2\mathrm{d}r\right\}$.

(iii) 若(4)式成立,则 Φ 具有一个后向一致吸收的 $\mathscr{C}$-拉回吸收集 $\mathscr{K}_{\mathscr{C}}=\{\mathscr{K}_{\mathscr{C}}(\tau):\tau\in\mathbb{R}\}\in\mathscr{C}$ 且 $\mathscr{K}_{\mathscr{C}}(\tau)=\left\{u\in\ell^2:\|u\|^2\leqslant\frac{2}{\lambda}\sup_{s\leqslant\tau}\int_{-\infty}^{s}\mathrm{e}^{\lambda(r-s)}\|g(r)\|^2\mathrm{d}r\right\}$.

证 由于(i)与(iii)的证明与(ii)的证明是类似的,只证明(ii). 由引理 1 可知存在 $T:=T(\tau,B)>0$ 使得 $\bigcup_{t\geqslant T}\bigcup_{s\geqslant\tau}\Phi(t,s-t)B(s-t)\subseteq\mathscr{K}_{\mathscr{B}}(\tau)$. 另一方面,当 $t\to+\infty$ 时,

$$
\begin{aligned}
\mathrm{e}^{-\lambda t}\sup_{s\geqslant\tau}\|\mathscr{K}_{\mathscr{B}}(s-t)\|^2&=\frac{2}{\lambda}\mathrm{e}^{-\lambda t}\sup_{s\geqslant\tau}\int_{-\infty}^{-t}\mathrm{e}^{\lambda(r+t)}\|g(r+s)\|^2\mathrm{d}r\leqslant\\
&\frac{2}{\lambda}\mathrm{e}^{-\frac{\lambda}{2}t}\sup_{s\geqslant\tau}\int_{-\infty}^{-t}\mathrm{e}^{\frac{\lambda}{2}r}\|g(r+s)\|^2\mathrm{d}r\leqslant\\
&\frac{2}{\lambda}\mathrm{e}^{-\frac{\lambda}{2}t}\sup_{s\geqslant\tau}\int_{-\infty}^{s}\mathrm{e}^{\frac{\lambda}{2}(r-s)}\|g(r)\|^2\mathrm{d}r\to 0
\end{aligned}
$$

由此可知 $\mathscr{K}_{\mathscr{B}}\in\mathscr{B}$. 故 $\mathscr{K}_{\mathscr{B}}$ 是 Φ 的一个前向一致吸收的 $\mathscr{B}$-拉回吸收集. 证毕.

下面证明 Φ 在能量空间 ℓ^2 上分别有一个唯一的半一致紧的拉回吸引子和一个唯一的半一致吸引的拉回吸引子.

定理 2 (i) 若(3)式或(4)式成立,则 Φ 具有一个唯一的 $\mathscr{D}$-拉回吸引子 $\mathscr{A}_{\mathscr{D}}=\{\mathscr{A}_{\mathscr{D}}(\tau):\tau\in\mathbb{R}\}\in\mathscr{D}$,且

$$
\mathscr{A}_{\mathscr{D}}(\tau)=\bigcap_{r\geqslant 0}\overline{\bigcup_{t\geqslant r}\Phi(t,\tau-t)\mathscr{K}_{\mathscr{D}}(\tau-t)}^{\ell^2}
$$

(ii) 若(3)式成立则 Φ 具有一个唯一的前向一致紧的 $\mathscr{B}$-拉回吸引子 $\mathscr{A}_{\mathscr{B}}=\{\mathscr{A}_{\mathscr{B}}(\tau):\tau\in\mathbb{R}\}\in\mathscr{B}$ 和一个唯一的前向一致吸引的 $\mathscr{B}$-拉回吸引子 $U_{\mathscr{B}}=\{U_{\mathscr{B}}(\tau):\tau\in\mathbb{R}\}\in\mathscr{B}$,且

$$
\mathscr{A}_{\mathscr{B}}(\tau)=\bigcap_{r\geqslant 0}\overline{\bigcup_{t\geqslant r}\Phi(t,\tau-t)\mathscr{K}_{\mathscr{B}}(\tau-t)}^{\ell^2},\ U_{\mathscr{B}}(\tau)=\bigcap_{r\geqslant 0}\overline{\bigcup_{t\geqslant r}\bigcup_{s\geqslant\tau}\Phi(t,s-t)\mathscr{K}_{\mathscr{B}}(s-t)}^{\ell^2}
$$

(iii) 若(4)式成立,则 Φ 具有一个唯一的后向一致紧的 $\mathscr{C}$-拉回吸引子 $\mathscr{A}_{\mathscr{C}}=\{\mathscr{A}_{\mathscr{C}}(\tau):\tau\in\mathbb{R}\}\in\mathscr{C}$ 和一个唯一的前向一致吸引的 $\mathscr{C}$-拉回吸引子 $U_{\mathscr{C}}=\{U_{\mathscr{C}}(\tau):\tau\in\mathbb{R}\}\in\mathscr{C}$,且

$$
\mathscr{A}_{\mathscr{C}}(\tau)=\bigcap_{r\geqslant 0}\overline{\bigcup_{t\geqslant r}\Phi(t,\tau-t)\mathscr{K}_{\mathscr{C}}(\tau-t)}^{\ell^2},\ U_{\mathscr{C}}(\tau)=\bigcap_{r\geqslant 0}\overline{\bigcup_{t\geqslant r}\bigcup_{s\geqslant\tau}\Phi(t,s-t)\mathscr{K}_{\mathscr{C}}(s-t)}^{\ell^2}
$$

(iv) 若(3)式成立,则 $\mathscr{A}_{\mathscr{D}}=\mathscr{A}_{\mathscr{B}}\subseteq U_{\mathscr{B}}$. 若(4)式成立,则 $\mathscr{A}_{\mathscr{D}}=\mathscr{A}_{\mathscr{C}}\subseteq U_{\mathscr{C}}$.

证 对于 $\tau\in\mathbb{R}$ 和 $D\in\mathscr{D}$,设 $s_n\geqslant\tau$,$t_n\to+\infty$ 且 $x_n\in D(s_n-t_n)$. 我们将证明序列

$$
\{Z^n\}_{n=1}^{\infty}=:\{S(t_n,s_n-t_n)u_{0,n}\}_{n=1}^{\infty}=\{u(s_n,s_n-t_n,u_{0,n})\}_{n=1}^{\infty}
$$

在 ℓ^2 的拓扑下有一个收敛子列．对于任意的 $\varepsilon \in (0,1)$，由引理 2 可知，存在 $k_1, n_1 \in \mathbb{N}$ 使得

$$\sum_{|i| \geqslant k_1} |Z_i^n|^2 \leqslant \varepsilon^2,\ \forall n \geqslant n_1 \tag{29}$$

又由引理 1 可知序列 $\{Z^n\}_{n=1}^{\infty}$ 在 ℓ^2 中是有界的．于是序列 $\{(Z_i^n)_{|i|<k_1}\}_{n=1}^{\infty}$ 在 $\mathbb{R}^{2k_1-1}$ 中是有界的．于是 $\{(Z_i^n)_{|i|<k_1}\}_{n=1}^{\infty}$ 在 $\mathbb{R}^{2k_1-1}$ 中有收敛子列(记为它本身)．由此可知存在 $n_2 \geqslant n_1$ 使得

$$\sum_{|i|<k_1} |Z_i^n - Z_i^m|^2 \leqslant \varepsilon^2,\ \forall n, m \geqslant n_2 \tag{30}$$

由(29) 式和(30) 式可知，当 $n, m \geqslant n_2$ 时，

$$\|Z^n - Z^m\|^2 = \sum_{|i|<k_1} |Z_i^n - Z_i^m|^2 + \sum_{|i| \geqslant k_1} |Z_i^n - Z_i^m|^2 \leqslant 5\varepsilon^2$$

因此，$\{Z^n\}_{n=1}^{\infty}$ 是 ℓ^2 中的一个柯西列．又因为 ℓ^2 是一个希尔伯特空间，故它在 ℓ^2 中有一个收敛子列．于是 Φ 在 ℓ^2 中是前向一致 $\mathscr{D}$-拉回渐近紧的．基于此和引理 3，由定理 1 可知(ii) 成立．同理可证(i) 和(iii)．

下面证明(iv)．由 $\mathscr{K}_{\mathscr{D}}(\tau) \subseteq \mathscr{K}_{\mathscr{B}}(\tau)$ 可知 $\mathscr{A}_{\mathscr{D}}(\tau) \subseteq \mathscr{A}_{\mathscr{B}}(\tau)$．另一方面，由 $\mathscr{A}_{\mathscr{B}} \in \mathscr{B} \subseteq \mathscr{D}$，$\mathscr{A}_{\mathscr{B}}$ 的不变性和 $\mathscr{A}_{\mathscr{D}}$ 的 $\mathscr{D}$-拉回吸引性可知，当 $t \to +\infty$ 时，

$$\mathrm{dist}_{\ell^2}(\mathscr{A}_{\mathscr{B}}(\tau), \mathscr{A}_{\mathscr{D}}(\tau)) = \mathrm{dist}_{\ell^2}(\Phi(t, \tau - t)\mathscr{A}_{\mathscr{B}}(\tau - t), \mathscr{A}_{\mathscr{D}}(\tau)) \to 0$$

于是 $\mathscr{A}_{\mathscr{B}}(\tau) \subseteq \overline{\mathscr{A}_{\mathscr{D}}(\tau)}^{\ell^2} = \mathscr{A}_{\mathscr{D}}(\tau)$．因此 $\mathscr{A}_{\mathscr{D}} = \mathscr{A}_{\mathscr{B}} \subseteq U_{\mathscr{B}}$．同理可证 $\mathscr{A}_{\mathscr{D}} = \mathscr{A}_{\mathscr{C}} \subseteq U_{\mathscr{C}}$．证毕．

参考文献：

[1] 郭柏灵．无穷维动力系统(上下)[M]．北京：国防工业出版社，2000．

[2] GUOB L，LIY S．Attractor for Dissipative Klein-Gordon-Schrödinger Equations in $\mathbb{R}^3$[J]．Journal of Differential Equations，1997，136(2)：356-377．

[3] ZHOUS F．Attractors and Approximations for Lattice Dynamical Systems [J]．Journal of Differential Equations，2004，200(2)：342-368．

[4] BATESP W，LUK N，WANGB X．Attractors for Lattice Dynamical Systems [J]．International Journal of Bifurcation and Chaos，2001，11(1)：143-153．

[5] ZHAOW Q．Long-Time Random Dynamics of Stochastic Parabolic P-LaplacianEquations on $\mathbb{R}^N$[J]．Nonlinear Analysis：Theory，Methods & Applications，2017，152：196-219．

[6] CARVALHO A N，LANGA J A，ROBINSON J C．Attractors for Infinite-Dimensional Non-Autonomous Dynamical Systems [M]．New York：Springer New York，2013．

[7] BATESP W，LUK N，WANGB X．Attractors of Non-Autonomous Stochastic Lattice Systems in Weighted Spaces [J]．Physica D：Nonlinear Phenomena，2014，289：32-50．

[8] Li Yang-rong，Wang Ren-hai，Yin Jin-yan．Backward Compact Attractors for Non-Autonomous Benjamin-Bona-Mahony Equations on Unbounded Channels [J]．Discrete Continuous Dynamical Systems Series B，2017，22(5)：2569-2586．

[9] 彭冬冬，李扬荣．小噪音驱动的广义 Ginzburg-Landau 方程的随机吸引子的上半连续性 [J]．西南师范大学学报(自然科学版)，2015，40(4)：16-20．

[10] 王　蕊，李扬荣．带有可乘白噪音的广义 Ginzburg-Landau 方程的随机吸引子 [J]．西南大学学报(自然科学版)，2012，34(2)：92-95．

[11] 王仁海，余连兵，李扬荣．无界域上带加法噪音扰动的 Benjamin-Bona-Mahony 方程在高正则空间上的随机吸引子的上半连续性 [J]．西南师范大学学报(自然科学版)，2016，41(11)：15-19．

[12] ERNEUX T，NICOLIS G．Propagating Waves in Discrete Bistable Reaction-Diffusion Systems [J]．Physica D：Nonlinear Phenomena，1993，67(1-3)：237-244．

[13] WANGB X．Attractors for Reaction-Diffusion Equations in Unbounded Domains [J]．Physica D：Nonlinear Phenomena，1999，128(1)：41-52．

[14] WANG B X．Sufficient and Necessary Criteria for Existence of Pullback Attractors for Non-Compact Random Dynamical Systems [J]．Journal of Differential Equations，2012，253(5)：1544-1583．

责任编辑　张　枸