

一类带有恐惧效应的模型正解的存在性和唯一性^①

阳忠亮, 郭改慧, 刘晓慧

陕西科技大学 文理学院, 西安 710021

摘要: 研究了一类带有 Beddington-DeAngelis 反应项和恐惧效应的捕食-食饵模型的平衡态问题, 利用拓扑度理论, 通过计算锥映射不动点指标, 得到了正解的存在性, 利用特征值的变分原理给出了正解存在的唯一性条件.

关键词: Beddington-DeAngelis 反应项; 恐惧效应; 存在性; 唯一性

中图分类号: O175.25

文献标志码: A

文章编号: 1000-5471(2021)09-0010-09

Existence and Uniqueness of Positive Solutions for a Model with Fear Effect

YANG Zhongliang, GUO Gaihui, LIU Xiaohui

School of Arts and Sciences, Shaanxi University of Science & Technology, Xi'an 710021, China

Abstract: The steady-state of the predator-prey model with Beddington-DeAngelis functional response and the fear effect has been studied by means of fixed point index of compact maps in cones and the existence of positive solutions. Moreover, the uniqueness has been derived under some conditions by the variational characterization of the principal eigenvalue.

Key words: Beddington-DeAngelis functional response; fear effect; existence; uniqueness

生物学中, 捕食者通过直接捕食来影响食饵的数量, 一种新兴的观点是: 仅当捕食者出现在食饵面前时, 食饵就会因为对捕食者的恐惧, 改变自身的行为和生理特征, 这种恐惧(效应)对食饵种群数量的影响, 在一定程度上超过了直接捕食. 文献[1]通过实验发现: 仅仅是因为对捕食者的恐惧, 成年的北美歌雀产生后代的数量就减少了 40%. 2016 年, Wang 等人提出并分析了如下一个具有恐惧效应的捕食-食饵模型^[2]:

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} = \frac{ru}{1+kv} - du - au^2 - \frac{puv}{1+qu} \\ \frac{dv}{dt} = \frac{cpuv}{1+qu} - mv \end{cases}$$

① 收稿日期: 2020-02-03

基金项目: 国家自然科学基金项目(61872227, 61672021).

作者简介: 阳忠亮, 硕士, 主要从事偏微分方程及其应用的研究.

通信作者: 郭改慧, 博士, 教授.

更多关于恐惧效应的文章可参考[3-10]. 考虑空间因素对物种的影响, 本文将主要研究下面的反应扩散系统:

$$\begin{cases} u_t - d_1 \Delta u = \left(\frac{r}{1+kv} - b - au - \frac{mv}{1+pu+qv} \right) u & x \in \Omega, t > 0 \\ v_t - d_2 \Delta v = \left(c - v + \frac{mdu}{1+pu+qv} \right) v & x \in \Omega, t > 0 \\ u = v = 0 & x \in \partial\Omega, t > 0 \\ u(x, 0) = u_0(x), v(x, 0) = v_0(x) & x \in \Omega \end{cases} \quad (1)$$

其中: Ω 是 $\mathbb{R}^n$ ($n \leq 3$) 内带有光滑边界 $\partial\Omega$ 的有界区域; u, v 分别代表食饵和捕食者的种群密度; 参数 r, k, a, b, d, m, p, q 都是正常数, r 表示食饵的出生率, b 表示食饵的死亡率, a 表示食饵由于种内竞争而产生的死亡率, 参数 m 表示食饵和捕食者的有效接触率, 参数 p 表示捕食者对食饵的饱和作用, 参数 q 表示捕食者内部的相互干扰或者食饵由于恐惧而产生的反捕食防御功能; c 表示捕食者的内禀增长率, 参数 c 可正可负, $c > 0$ 表示捕食者除了食饵之外在区域 Ω 内还有其他食物来源, $c < 0$ 表示模型中捕食者不存在从而无生物意义. 特别地, $\frac{1}{1+kv}$ 表示恐惧项, 即食饵对捕食者的恐惧效应, 值得注意的是, 当 $r < d$ 和 $t \rightarrow \infty$ 时, $v \rightarrow 0$, 也即不管恐惧效应和特定捕食机制产生怎样的影响, 随着时间的推移, 食饵和捕食者都将会灭绝, 模型无意义, 因此, 我们总假设 $r > d$, 即 $r - d > 0$. 不失一般性, 假设 $d_1 = d_2 = 1$, 本文主要考虑(1)的平衡态方程:

$$\begin{cases} -\Delta u = \left(\frac{r}{1+kv} - b - au - \frac{mv}{1+pu+qv} \right) u & x \in \Omega \\ -\Delta v = \left(c - v + \frac{mdu}{1+pu+qv} \right) v & x \in \Omega \\ u = v = 0 & x \in \partial\Omega \end{cases} \quad (2)$$

设 $\lambda_1(q, \Omega)$ 为有界区域 Ω 上算子 $(-\Delta + qI)$ 在 Dirichlet 边界下的主特征值, 且 $\lambda_1(0, \Omega) = \lambda_1$. 易知, 当 $c > \lambda_1$ 时, 方程(2) 存在半平凡解, 记为 $(0, \theta_c)$, θ_c 是下面特征值方程的唯一正解:

$$\begin{cases} -\Delta v = (c - v)v & x \in \Omega \\ v = 0 & x \in \partial\Omega \end{cases}$$

当 $r - b > \lambda_1$ 时, 方程(2) 存在半平凡解, 记为 $(\theta, 0)$, $\theta := a^{-1}\theta_{r-b}$ 是下面特征值方程的唯一正解:

$$\begin{cases} -\Delta u = (r - b - au)u & x \in \Omega \\ u = 0 & x \in \partial\Omega \end{cases}$$

1 正平衡解的存在性

首先利用椭圆型方程的极大值原理和比较原理得到方程(2) 非负解的一个先验估计.

定理 1^[11] 假设 (u, v) 是方程(2) 的一个非负解, 则 (u, v) 满足

$$(i) \quad 0 < u < \theta < \frac{r-b}{a}.$$

$$(ii) \quad 0 < v < v_0 := c + \frac{md(r-b)}{a+p(r-b)}. \text{ 如果 } c > \lambda_1, \text{ 则 } v > \theta_c.$$

在利用不动点指标理论之前, 引入以下记号.

设 E 是 Banach 空间, $W \subset E$ 是一个闭凸子集. 如果 $\forall \alpha \geq 0$ 均有 $\alpha W \subset W$, 那么称 W 为楔, 并且如果 $W \cap \{-W\} = \{0\}$, 那么称楔 W 为锥. 对于任意的点 $y \in W$, 定义楔 $W_y = \{x \in E: \text{存在 } \gamma > 0 \text{ 使得 } y + \gamma x \in E\}$ 和 $S_y = \{x \in \overline{W}_y: -x \in \overline{W}_y\}$. 设 $F: W \rightarrow W$ 是一个紧线性算子, 且有一个不动点 y , F 关于点

y 的 Fréchet 导数为 L . 设 $L: \overline{W}_y \longrightarrow \overline{W}_y$ 是紧线性算子, 称 L 具有 α 性质, 如果存在 $t \in (0, 1)$, $w \in \overline{W}_y \setminus S_y$, 使得 $w - tTw \in S_y$.

引理 1^[12] 设 $q(x) \in C(\overline{\Omega})$, M 是正常数, 使得 $-q(x) + M > 0$ 在 $\overline{\Omega}$ 上成立, 则下面的结论成立:

- 1) $\lambda_1(q(x)) < 0 \Rightarrow r[(-\Delta + M)^{-1}(-q(x) + M)] > 1$.
- 2) $\lambda_1(q(x)) > 0 \Rightarrow r[(-\Delta + M)^{-1}(-q(x) + M)] < 1$.
- 3) $\lambda_1(q(x)) = 0 \Rightarrow r[(-\Delta + M)^{-1}(-q(x) + M)] = 1$.

引理 2^[12] 如果 $I - L$ 在 $\overline{W}_y$ 上可逆, 那么

- 1) 若 L 有 α 性质, 则 $\text{index}_W(F, y) = 0$.
- 2) 若 L 没有 α 性质, 则 $\text{index}_W(F, y) = (-1)^\sigma$, 其中 σ 是 L 所有大于 1 的特征值的代数重数之和.

利用拓扑度理论得到共存解的存在性, 首先引入以下记号:

- ① $X := C_0(\overline{\Omega}) \oplus C_0(\overline{\Omega})$;
- ② $W := P_1 \oplus P_2$, 这里 $P_i = \{\varphi \in C_0(\overline{\Omega}) : \varphi(x) \geq 0, x \in \overline{\Omega}\}$;
- ③ $D := \left\{ (u, v) \in X : u \leq \frac{r-b}{a}, v \leq v_0 := c + \frac{md(r-b)}{a+pu+qv} \right\}$;
- ④ $D' := (\text{int}D) \cap W$.

对于任意 $t \in [0, 1]$, 定义一个正紧算子 $F_t: D' \longrightarrow W$, 则

$$F_t(u, v) = (M - \Delta)^{-1} \begin{bmatrix} tu \left(\frac{r}{1+kv} - b - au - \frac{mv}{1+pu+qv} \right) + Mu \\ tv \left(c - v + \frac{mdu}{1+pu+qv} \right) + Mv \end{bmatrix}$$

其中 M 充分大使得 $M = \max\{r-b, v_0\}$. 利用标准椭圆型方程理论, 可知 F_t 是一个完全连续算子. 设 $t = 1$ 时, $F = F_1$, 因此, (u, v) 是方程(2)的正解当且仅当 F 在 D' 内有一个不动点. 设 F 关于 (u, v) 的 Fréchet 导数为 $F'(u, v)$, 则

$$F'(u, v) = (M - \Delta)^{-1} \begin{bmatrix} \frac{r}{1+kv} - b - 2au - \frac{mv(1+qv)}{(1+pu+qv)^2} + M & \frac{-rku}{(1+kv)^2} - \frac{mu(1+pu)}{(1+pu+qv)^2} \\ \frac{mdv(1+qv)}{(1+pu+qv)^2} & c - 2v + \frac{mdu(1+pu)}{(1+pu+qv)^2} + M \end{bmatrix}$$

引理 3 $\text{index}_W(F, D') = 1$.

证 利用 Leray-Schauder 度的同伦不变性, 得到

$$\text{index}_W(F, D') = \deg_W(I - F, D', 0) = \deg_W(I - F_t, D', 0)$$

当 $t \in [0, 1]$ 足够小时, 得到

$$\deg_W(I - F_t, D', 0) = \text{index}_W(F_t, 0)$$

设

$$L_0 = F'(0, 0) = (M - \Delta)^{-1} \begin{bmatrix} M & 0 \\ 0 & M \end{bmatrix}$$

利用引理 1, 得到 $r(L_0) < 1$, $I - L_0$ 在 $W_{(0,0)}$ 上是可逆的, L_0 在 $W_{(0,0)}$ 上没有 α 性质, 利用引理 2, 得到 $\text{index}_W(F, D') = 1$. 证毕.

引理 4 若 $r-b > \lambda_1$ 或 $c > \lambda_1$, 则 $\text{index}_W(F, (0, 0)) = 0$.

证 易知 $F(0, 0) = (0, 0)$, 并且

$$F'(0, 0) = (M - \Delta)^{-1} \begin{bmatrix} r-b+M & 0 \\ 0 & c+M \end{bmatrix}$$

假设存在 $(\xi, \eta) \in \overline{W}_{(0,0)}$ 使得 $F'(0,0)(\xi, \eta) = (\xi, \eta)$, 等价于 (ξ, η) 满足

$$\begin{cases} -\Delta\xi = (r-b)\xi & x \in \Omega \\ -\Delta\eta = c\eta & x \in \Omega \\ \xi = \eta = 0 & x \in \partial\Omega \end{cases}$$

如果 $\xi > 0$, 那么 $r-b = \lambda_1$, 这与 $r-b > \lambda_1$ 矛盾, 所以 $\xi \equiv 0$. 类似地, 若 $\eta > 0$, $c = \lambda_1$, 这与 $c > \lambda_1$ 矛盾, 所以 $\eta \equiv 0$. 因此, $I - L_0$ 在 $\overline{W}_{(0,0)}$ 是可逆的.

设 $T_{r-b} = (M - \Delta)^{-1}(r + b + M)$. 因为 $r-b > \lambda_1$, 所以 $r_0 := r(T_{r-b}) > 1$, 且主特征函数 $\xi_{r-b} > 0$, $\xi_{r-b} \in P_1 \setminus \{0\}$.

设 $t_0 = 1/r_0 \in [0, 1]$, 则 $(\xi_{r-b}, 0) \in S(0, 0) = (0, 0)$, 即 $F'(0, 0)$ 具有 α 性质, 因此 $\text{index}_W(F, (0, 0)) = 0$. 证毕.

引理 5 假设 $r-b > \lambda_1$,

(i) 若 $c > \lambda_1 \left(-\frac{md\theta}{1+p\theta} \right)$, 则 $\text{index}_W(F, (\theta, 0)) = 0$.

(ii) 若 $c < \lambda_1 \left(-\frac{md\theta}{1+p\theta} \right)$, 则 $\text{index}_W(F, (\theta, 0)) = 1$.

证 (i) 假设存在 $(\xi, \eta) \in \overline{W}_{(\theta,0)}$ 使得 $F'(\theta, 0)(\xi, \eta) = (\xi, \eta)$, 等价于 (ξ, η) 满足

$$\begin{cases} -\Delta\xi = (r-b-2a\theta)\xi - \left(rk\theta + \frac{m\theta}{1+p\theta} \right) \eta & x \in \Omega \\ -\Delta\eta = \left(c + \frac{md\theta}{1+p\theta} \right) \eta & x \in \Omega \\ \xi = \eta = 0 & x \in \partial\Omega \end{cases} \quad (3)$$

若 $\eta \neq 0$, 注意到 $\eta \in P_2$, $c = \lambda_1 \left(-\frac{md\theta}{1+p\theta} \right)$, 这与假设条件矛盾, 所以 $\eta \equiv 0$. 此时(3)式的第一个方程可以简化为 $-\Delta\xi = (r-b-2a\theta)\xi$, 因为特征值 $\lambda_1(2a\theta + b - r) > \lambda_1(a\theta + b - r) = 0$, 所以 $\xi \equiv 0$. 因此 $(\xi, \eta) \equiv (0, 0)$ 和 $I - F'(\theta, 0)$ 在 $\overline{W}_{(\theta,0)}$ 是可逆的.

通过引理 1 和 $c > \lambda_1 \left(-\frac{md\theta}{1+p\theta} \right)$, 得到

$$r_1 := \left[(M - \Delta)^{-1} \left(c + \frac{md\theta}{1+p\theta} \right) \right] > 1$$

利用 Krein-Rutman 理论知存在 $\psi > 0$, $\psi \in P_2 \setminus \{0\}$ 使得

$$(M - \Delta)^{-1} \left(c + \frac{md\theta}{1+p\theta} + M \right) \psi = r_1 \psi$$

设 $t_1 = \frac{1}{r_1} \in [0, 1]$, 则 $(0, \psi) \in \overline{W}_{(\theta,0)} \setminus S_{(\theta,0)}$ 和 $(I - t_1 F'(\theta, 0))(0, \psi) \in S_{(\theta,0)}$, 即 $F'(\theta, 0)$ 有 α 性质, 因此 $\text{index}_W(F, (\theta, 0)) = 0$.

(ii) 与(i)类似, 很容易证明当 $c < \lambda_1 \left(-\frac{md\theta}{1+p\theta} \right)$ 时 $F'(\theta, 0)$ 没有特征值超 1, 所以 $\sigma = 0$, 其中 σ 是 $F'(\theta, 0)$ 所有实特征值的代数重数之和, 因此引理得证. 证毕.

引理 6 假设 $c > \lambda_1$,

(i) 若 $\lambda_1 \left(b - \frac{r}{1+k\theta_c} + \frac{m\theta_c}{1+q\theta_c} \right) < 0$, 则 $\text{index}_W(F, (0, \theta_c)) = 0$.

(ii) 若 $\lambda_1 \left(b - \frac{r}{1+k\theta_c} + \frac{m\theta_c}{1+q\theta_c} \right) > 0$, 则 $\text{index}_W(F, (0, \theta_c)) = 1$.

证 (i) 当 $(u, v) = (0, \theta_c)$ 时, 通过简单的计算得到

$$\mathbf{F}'(0, \theta_c) = (M - \Delta)^{-1} \begin{bmatrix} \frac{r}{1+k\theta_c} - b - \frac{m\theta_c}{1+q\theta_c} + M & 0 \\ \frac{md\theta_c}{1+q\theta_c} & c - 2\theta_c + M \end{bmatrix}$$

首先证明 $\mathbf{I} - \mathbf{F}'(0, \theta_c)$ 在 $\overline{W}_{(0, \theta_c)}$ 是可逆的.

假设存在 $(\xi, \eta) \in \overline{W}_{(0, \theta_c)}$ 使得 $\mathbf{F}'(0, \theta_c)(\xi, \eta) = (\xi, \eta)$, 等价于 (ξ, η) 满足

$$\begin{cases} -\Delta\xi = \left(\frac{r}{1+k\theta_c} - b - \frac{m\theta_c}{1+q\theta_c}\right)\xi & x \in \Omega \\ -\Delta\eta = \frac{md\theta_c}{1+q\theta_c}\xi + (c - 2\theta_c)\eta & x \in \Omega \\ \xi = \eta = 0 & x \in \partial\Omega \end{cases}$$

如果 $\xi \neq 0$, 那么 $b = \lambda_1 \left(\frac{r}{1+k\theta_c} - \frac{m\theta_c}{1+q\theta_c}\right)$, 这与假设条件矛盾, 所以 $\xi \equiv 0$. 类似地, 若 $\eta \neq 0$, 则 0 是下面特征值问题的一个特征值

$$-\Delta\eta + (2\theta_c - c)\eta = \lambda_1\eta, \quad x \in \Omega, \quad \eta|_{\partial\Omega} = 0$$

这与 $\lambda_1(2\theta_c - c) > \lambda_1(\theta_c - c) = 0$ 矛盾, 所以 $(\xi, \eta) \equiv (0, 0)$.

其次证明 $\mathbf{F}'(0, \theta_c)$ 有 α 性质.

利用 $\lambda_1 \left(b - \frac{r}{1+k\theta_c} + \frac{m\theta_c}{1+q\theta_c}\right) < 0$ 和引理 1, 得到

$$r_2 := r \left[(M - \Delta)^{-1} \left(\frac{r}{1+k\theta_c} - b - \frac{m\theta_c}{1+q\theta_c} + M \right) \right] > 1$$

利用 Krein-Rutman 理论, 则存在 $\varphi > 0$, $\varphi \in P_2 \setminus \{0\}$ 使得

$$(M - \Delta)^{-1} \left(\frac{r}{1+k\theta_c} - b - \frac{m\theta_c}{1+q\theta_c} + M \right) \varphi = r_2 \varphi$$

设 $t_2 = \frac{1}{r_2} \in [0, 1]$, 则 $(\varphi, 0) \in \overline{W}_{(0, \theta_c)} \setminus S_{(0, \theta_c)}$ 和 $(\mathbf{I} - t_2 \mathbf{F}(0, \theta_c))(\varphi, 0) \in S_{(0, \theta_c)}$. 因此 $\mathbf{F}'(0, \theta_c)$ 具有 α 性质, 由引理 2 可得 $\text{index}_W(\mathbf{F}, (0, \theta_c)) = 0$.

(ii) 与(i)类似, 很容易得到当 $\lambda_1 \left(b - \frac{r}{1+k\theta_c} + \frac{m\theta_c}{1+q\theta_c}\right) > 0$ 时, $\mathbf{F}'(0, \theta_c)$ 没有特征值超过 1, 所以 $\sigma = 0$,

其中 σ 是 $\mathbf{F}'(0, \theta_c)$ 所有实特征值的代数重数之和. 因此 $\text{index}_W(\mathbf{F}, (0, \theta_c)) = 1$. 证毕.

定理 2 设 $r - b > \lambda_1$, 对于任意的 $x \in \Omega$, 有

(i) 如果 $\lambda_1 \left(-\frac{md\theta}{1+p\theta}\right) < c < \lambda_1$, 那么方程(2)除了 $(0, 0)$, $(\theta, 0)$ 外, 至少还有一个正解.

(ii) 如果 $c > \lambda_1$ 和 $\lambda_1 \left(b - \frac{r}{1+k\theta_c} + \frac{m\theta_c}{1+q\theta_c}\right) < 0$, 那么方程(2)除了 $(0, 0)$, $(\theta, 0)$, $(0, \theta_c)$ 外, 至少还有一个正解.

证 利用拓扑度理论, 得到

$$\text{index}_W(\mathbf{F}', D) = \sum \text{index}_W(\mathbf{F}, (u_i, v_i))$$

其中 (u_i, v_i) 是 $\mathbf{F}$ 在 D' 内的所有不动点. 如果条件(i)成立, 利用引理 3-6, 那么

$$1 = \text{index}_W(\mathbf{F}, D') \neq \text{index}_W(\mathbf{F}, (0, 0)) + \text{index}_W(\mathbf{F}, (\theta, 0)) = 0$$

因此, 方程(2)在 D' 至少有一个正解.

如果条件(ii)成立, 则利用引理 3-6, 那么

$$1 = \text{index}_W(\mathbf{F}, D') \neq \text{index}_W(\mathbf{F}, (0, 0)) + \text{index}_W(\mathbf{F}, (\theta, 0)) + \text{index}_W(\mathbf{F}, (0, \theta_c)) = 0 + 0 + 0 = 0$$

因此,方程(2)在 D' 至少有一个正解. 证毕.

为了研究定理2的意义,在 bc -平面内定义:

$$S_1 = \left\{ (b, c) \in \mathbb{R}^2 : \lambda_1 \left(b + \frac{m\theta_c}{1+q\theta_c} - \frac{r}{1+k\theta_c} \right) = 0, c \geq \lambda_1 \right\}$$

$$S_2 = \left\{ (b, c) \in \mathbb{R}^2 : \lambda_1 \left(-c - \frac{md\theta}{1+p\theta} \right) = 0, r-b \geq \lambda_1 \right\}$$

利用文献[13]中的方法,我们可以得到下面的引理:

引理7 集合 S_1 形成一条有界的曲线

$$S_1 = \left\{ (b, c) \in \mathbb{R}^2 : c = c_*(b), -\lambda_1 - \frac{m}{q} < b < r - \lambda_1 \right\}$$

其中 $c = c_*(b)$ 是关于 $b \in \left(-\lambda_1 - \frac{m}{q}, r - \lambda_1 \right)$ 的正连续函数且满足下面的性质:

(i) $c = c_*(b)$ 关于 $b \in \left(-\lambda_1 - \frac{m}{q}, r - \lambda_1 \right)$ 是严格单调递减,

(ii) $c_*(r - \lambda_1) = \lambda_1$, $c_*\left(-\lambda_1 - \frac{m}{q}\right) = \infty$.

证 设 $S_1(b, c) = \lambda_1 \left(b + \frac{m\theta_c}{1+q\theta_c} - \frac{r}{1+k\theta_c} \right)$, 由 $\theta_{\lambda_1} = 0$ 和 $c > \lambda_1$ 可得

$$\lim_{c \rightarrow \lambda_1} S_1(b, c) = S_1(b, \lambda_1) = \lambda_1(b - r) = \lambda_1 + b - r$$

$$\lim_{c \rightarrow \infty} S_1(b, c) = S_1(b, \infty) = \lambda_1 \left(b + \frac{m}{q} \right) = \lambda_1 + b + \frac{m}{q} > 0$$

$$\frac{\partial}{\partial b} \left(b + \frac{m\theta_c}{1+q\theta_c} - \frac{r}{1+k\theta_c} \right) = 1 > 0$$

$$\frac{\partial}{\partial c} \left(b + \frac{m\theta_c}{1+q\theta_c} - \frac{r}{1+k\theta_c} \right) = \left[\frac{m}{(1+q\theta_c)^2} + \frac{k}{(1+k\theta_c)^2} \right] \frac{\partial \theta_c}{\partial c} > 0$$

因此 $S_1(b, c)$ 是关于 b 和 c 单调递增的. 设 b_0 是任意固定的实数, 若 $\lambda_1 + b_0 - r < 0$, 即 $b_0 < r - \lambda_1$, 若

$$\lambda_1 + b_0 + \frac{m}{q} > 0$$

即

$$b_0 > -\lambda_1 - \frac{m}{q}$$

则利用零点存在定理可得, 存在 $c_0 \in (\lambda_1, \infty)$ 使得 $S_1(b_0, c_0) = 0$ 和 $S_1(b_0, c) \geq 0$, 因此, 由隐函数定理可知, 方程 $S_1(b, c) = 0$ 确定了一个光滑函数 $c = c_*(b)$ 使得下面结论成立:

$$\begin{cases} c_*(b_0) = c_0 \\ S_1(b, c_*(b)) = 0, b \in [b_0 - \delta, b_0 + \delta] \end{cases}$$

其中 $\delta > 0$. 因为 $b_0 \in \left(-\lambda_1 - \frac{m}{q}, r - \lambda_1 \right)$ 的任意性, 则当 $b \in \left(-\lambda_1 - \frac{m}{q}, r - \lambda_1 \right)$ 时, 存在唯一一个光滑函数 $c = c_*(b)$ 使得 $S_1(b, c_*(b)) = 0$, 对 $S_1(b, c_*(b)) = 0$ 关于 b 微分(或利用隐函数可微性定理)得

$$S_{1c}(b, c_*(b))c'_*(b) + S_{1b}(b, c_*(b)) = 0$$

即

$$c'_*(b) = -\frac{S_{1b}(b, c_*(b))}{S_{1c}(b, c_*(b))}$$

又因为 $S_{1b}(b, c_*(b)) > 0$ 和 $S_{1c}(b, c_*(b)) > 0$, 因此 $c'_*(b) < 0$, 即 $c = c_*(b)$ 关于 $b \in \left(-\lambda_1 - \frac{m}{q}, r - \lambda_1 \right)$ 是严格单调递减. 很容易得证 $c_*(r - \lambda_1) = \lambda_1$ 和 $c_*\left(-\lambda_1 - \frac{m}{q}\right) = \infty$ 成立. 证毕.

引理 8 集合 S_2 形成一条有界的曲线

$$S_2 = \left\{ (b, c) \in \mathbb{R}^2 : b = b^*(c), \lambda_1 - \frac{md}{p} < c < \lambda_1 \right\}$$

其中 $b = b^*(c)$ 是关于 $c \in \left(\lambda_1 - \frac{md}{p}, \lambda_1 \right)$ 的正连续函数, 且满足下面的性质:

(i) $b^*(c)$ 关于 $c \in \left(\lambda_1 - \frac{md}{p}, \lambda_1 \right)$ 是严格单调

递增,

(ii) $b^*(\lambda_1) = r - \lambda_1, b^*\left(\lambda_1 - \frac{md}{p}\right) = -\infty$.

推论 1 设 $r - b > \lambda_1$, (b, c) 位于图 1 坐标系内的阴影区域, 则原方程(2) 至少存在一个共存解.

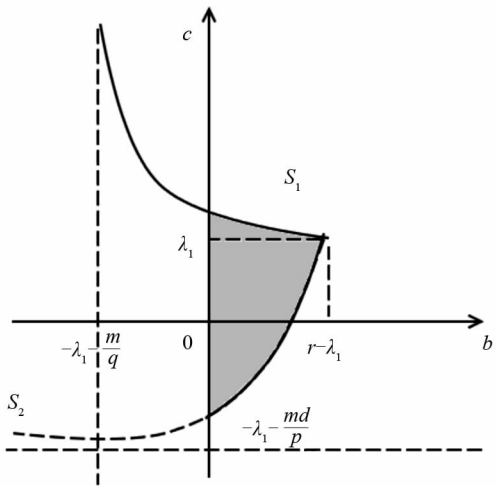


图 1 原方程(2) 共存解的存在区域

$\lambda_1 - \frac{md}{p}$ 的正负性影响的是曲线 S_2 的取值范

围, 若 $\lambda_1 - \frac{md}{p} > 0$, 则 $b^*(c) > 0$; 若 $\lambda_1 - \frac{md}{p} = 0$,

则 $b^*(c)$ 穿过原点; 若 $\lambda_1 - \frac{md}{p} < 0$, 则 $b^*(c)$ 图像

如图 1 所示.

2 正平衡解存在的唯一性

定理 3 设 $r - b > \lambda_1, r - b > \lambda_1 + \frac{mdv_0}{1 + qv_0}$.

令

$$\Lambda = \max \left\{ \sup_{\Omega} \frac{\theta}{\theta_c}, \sup_{\Omega} \frac{\theta_{v_0}}{\theta_{\frac{mv_0}{r-b-1+qv_0}}} \right\}$$

如果 $\frac{mpv_0}{1 + qv_0} < a$ 且 $m^2\Lambda(1 + d) + 2rkm\Lambda(1 + p) < 4a$, 那么方程(2) 存在唯一正解.

证 因为

$$r - b > \lambda_1$$

$$r - b > \lambda_1 + \frac{mdv_0}{1 + qv_0} > \lambda_1 \left(\frac{md\theta_c}{1 + q\theta_c} \right)$$

则由定理 1 可知, 正解的存在性显然.

设 (u_1, v_1) 和 (u_2, v_2) 是方程(2) 的正解. 由椭圆型方程的比较原理可得

$$\theta_{\left[\frac{mv_0}{r-b-1+qv_0} \right]} \leq u_i \leq \theta, \theta_c \leq v_i \leq \theta_{v_0} \quad i = 1, 2$$

令 $A = u_1 - u_2, B = v_1 - v_2$, 则 A, B 满足 $T_1A + T_3 = 0$ 和 $T_2B + T_4 = 0$, 其中

$$T_1 = -\Delta - \left(\frac{r}{1 + kv_1} - b - au_1 - \frac{mv_1}{1 + pu_1 + qv_1} \right)$$

$$T_2 = -\Delta - \left(c - v_1 + \frac{mdu_1}{1 + pu_1 + qv_1} \right)$$

$$T_3 = au_2A + \frac{rku_2B}{(1 + kv_1)(1 + kv_2)} + \frac{mu_2[(1 + pu_2)B - pv_2A]}{(1 + pu_1 + qv_1)(1 + pu_2 + qv_2)}$$

$$T_4 = v_2B - \frac{mdv_2[(1 + qv_2)A - qu_2B]}{(1 + pu_1 + qv_1)(1 + pu_2 + qv_2)}$$

因为 (u_1, v_1) 是方程(2) 的正解, 所以存在 (ξ, η) 满足

$$T_1 \xi = \mu \xi, T_2 \eta = \mu \eta, \xi|_{\partial\Omega} = \eta|_{\partial\Omega} = 0$$

利用特征值的变分原理可得:

$$\int_{\Omega} \left(|\nabla A|^2 - \left(\frac{r}{1+kv_1} - b - au_1 - \frac{mv_1}{pu_1+qv_1} \right) A^2 \right) dx \geq 0 \quad \forall \xi \in C_0^2(\bar{\Omega}) \quad (4)$$

和

$$\int_{\Omega} \left(|\nabla B|^2 - \left(c - v_1 + \frac{mdu_1}{1+pu_1+qv_1} \right) B^2 \right) dx \geq 0 \quad \forall \eta \in C_0^2(\bar{\Omega}) \quad (5)$$

在 $T_1 A + T_3 = 0$ 两边同乘 A , 并联立(4) 式可得:

$$\int_{\Omega} (W_1 u_2 A^2 + W_2 u_2 AB) dx \leq 0 \quad (6)$$

其中

$$W_1 = a - \frac{mpv_2}{(1+pu_1+qv_1)(1+pu_2+qv_2)}$$

$$W_2 = \frac{rk}{(1+kv_1)(1+kv_2)} + \frac{m(1+pu_2)}{(1+pu_1+qv_1)(1+pu_2+qv_2)}$$

令

$$\frac{mpv_2}{(1+pu_1+qv_1)(1+pu_2+qv_2)} \leq \frac{mpv_2}{1+qv_2} \leq \frac{mpv_0}{1+qv_0} < a$$

故 $W_1 > 0$. 同理, 在 $T_2 B + T_4 = 0$ 两边同乘 B , 并联立(5) 式可得:

$$\int_{\Omega} (W_3 v_2 B^2 + W_4 v_2 AB) dx \leq 0 \quad (7)$$

其中

$$W_3 = 1 + \frac{mdqu_2}{(1+pu_1+qv_1)(1+pu_2+qv_2)}$$

$$W_4 = \frac{md(1+qv_2)}{(1+pu_1+qv_1)(1+pu_2+qv_2)}$$

设 $I = \int_{\Omega} [W_1 u_2 A^2 + (W_2 u_2 + W_4 v_2) AB + W_3 v_2 B^2] dx$, 由(6) 式和(7) 式知 $I \leq 0$, 则

$$\Delta = (W_2 u_2 + W_4 v_2)^2 - 4W_1 W_3 u_1 u_2 < u_1 u_2 (m^2 \Delta(1+d) + 2rk m \Delta(1+p) - 4a) \leq 0$$

因为 $\Delta \leq 0$, 所以 $I \equiv 0$, 因此 $A = B = 0$, 即 $(u_1, v_1) = (u_2, v_2)$. 证毕.

3 结 论

本文研究了 Dirichlet 边界条件下, 一类带有恐惧效应模型共存解的存在性和唯一性. 由定理 2 和推论 1 的研究结果可知: (i) 当反应扩散模型不受恐惧效应影响时, 即当 $k = 0$ 时, 食饵和捕食者满足一般种群数量的增长规律; (ii) 当食饵和捕食者的内禀增长率在一定范围内变化, 且恐惧效应对食饵的影响不大时, 食饵和捕食者在区域内可以共存; (iii) 当恐惧效应强度过高时, 捕食者和食饵的种群数量变化更加丰富, 需要更进一步的研究.

参考文献:

- [1] ZANETTE L Y, WHITEA F, ALLEN M C, et al. Perceived Predation Risk Reduces the Number of Offspring Songbirds Produce Per Year [J]. Science, 2011, 334(6061): 1398-1401.
- [2] WANG X, ZANETTE L, ZOU X. Modelling the Fear Effect in Predator-Prey Interactions [J]. Journal of Mathematical Biology, 2016, 73(5): 1179-1204.

- [3] 闫建博, 刘贤宁. 具有 Beddington-DeAngelis 功能反应及恐惧效应的捕食系统 [J]. 西南大学学报(自然科学版), 2018, 40(6): 109-114.
- [4] SAHEB P, SUBRATA M, SUTAPA M, et al. Role of Fear in a Predator-Prey Model with Beddington-DeAngelis Functional Response [J]. Zeitschrift Fur Naturforschung A, 2019, 74(7): 581-595.
- [5] ZHANG H S, CAI Y L, FU S M, et al. Impact of the Fear Effect in a Prey-Predator Model Incorporating a Prey Refuge [J]. Applied Mathematics and Computation, 2019, 356: 328-337.
- [6] WANG X Y, ZOU X F. Modeling the Fear Effect in Predator-Prey Interactions with Adaptive Avoidance of Predators [J]. Bulletin of Mathematical Biology, 2017, 79(6): 1325-1359.
- [7] WU S N, WANG J F, SHI J P. Dynamics and Pattern Formation of a Diffusive Predator-Prey Model with Predator-Taxis [J]. Mathematical Models and Methods in Applied Sciences, 2018, 28(11): 2275-2312.
- [8] SASMAL S K, TAKEUCHI Y. Dynamics of a Predator-Prey System with Fear and Group Defense [J]. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 2020, 481(1): 123471.
- [9] DUAN D F, NIU B, WEI J J. Hopf-Hopf Bifurcation and Chaotic Attractors in a Delayed Diffusive Predator-Prey Model with Fear Effect [J]. Chaos, Solitons & Fractals, 2019, 123: 206-216.
- [10] WANG X, ZOU X. Pattern Formation of a Predator-Prey Model with the Cost of Anti-Predator Behaviors [J]. Mathematical Biosciences and Engineering, 2018, 15(3): 775-805.
- [11] 阳忠亮, 郭改慧. 一类带有 B-D 功能反应的捕食-食饵模型的分支分析 [J]. 山东大学学报(理学版), 2020, 55(7): 9-15, 21.
- [12] GUO G H, WU J H. Multiplicity and Uniqueness of Positive Solutions for a Predator-Prey Model with B-D Functional Response [J]. Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications, 2010, 72(3-4): 1632-1646.
- [13] KUTO K. Stability of Steady-State Solutions to a Prey-Predator System with Cross-Diffusion [J]. Journal of Differential Equations, 2004, 197(2): 293-314.

责任编辑 张 杓