第 46 卷 第 10 期 西南师范大学学报(自然科学版) 2021 年 10 月
Vol. 46 No. 10 Journal of Southwest China Normal University (Natural Science Edition) Oct. 2021

DOI:10.13718/j.cnki.xsxb.2021.10.001

# 具有两个特殊特征标维数的有限群①

陈小莉， 吕 恒

西南大学 数学与统计学院，重庆 400715

**摘要**：本文通过有限单群分类定理，首先证明了非交换单群 $S$ 至少存在 3 个维数不同的不可约特征标 $\chi$，使得 $\chi(1)^2 \nmid |S|$. 设 $G$ 为有限群，且只有两个不可约特征标 $\chi$ 满足 $\chi(1)^2 \nmid |G:\ker\chi|$，则 $G$ 非单，进一步证明了 $G$ 为可解群.

**关 键 词**：有限群；不可约特征标；维数；余维数

**中图分类号**：O152.1 **文献标志码**：A **文章编号**：1000-5471(2021)10-0001-04

# Finite Groups with Exactly Two Special Character Degrees

CHEN Xiaoli， LÜ Heng

*School of Mathematics and Statistics, Southwest University, Chongqing 400715, China*

**Abstract**: In this paper, by means of the classification theorem of finite simple groups, it is proved that there are at least three irreducible characters $\chi$ of nonabelian simple group $S$ with different dimension which satisfy that $\chi(1)^2 \nmid |S|$. Let $G$ be a finite group with two irreducible characters which satisfy that $\chi(1)^2 \nmid |G:\ker\chi|$, then $G$ is a non-simple group ,and it is further proved that $G$ is a solvable group.

**Key words**: finite group; irreducible character; degree; codegree

本文所涉及的群皆为有限群. 利用特征标的维数去研究群的性质和结构[1]是有限群研究的一个重要方向. 文献[2]证明了：群 $G$ 是幂零群当且仅当对 $G$ 的所有不可约特征标 $\chi$ 都有 $\chi(1)^2 \mid |G:\ker\chi|$. 文献[3]给出了余维数的定义，即 $G$ 的特征标 $\chi$，其余维数为 $\mathrm{cod}(\chi)=\dfrac{|G:\ker\chi|}{\chi(1)}$. 从而 $G$ 为幂零群当且仅当对 $G$ 的所有不可约特征标 $\chi$ 都有 $\chi(1) \mid \mathrm{cod}(\chi)$. 考虑其对偶情况，即所有非线性特征标 $\chi$ 满足 $\chi(1) \nmid \mathrm{cod}(\chi)$ 的群，群的结构相对复杂，满足该条件的有限单群[4]有 $A_5$, $A_6$，可解群有 $S_3$ 等. 文献[5]研究了比其对偶条件更弱的情形，即对所有不可约特征标 $\chi$ 满足 $(\chi(1), \mathrm{cod}(\chi))=1$ 的群 $G$，给出了群 $G$ 的性质及其结构刻画. 文献[6]进一步考虑了仅有 1 个不可约特征标 $\chi$ 满足 $\chi(1) \nmid \mathrm{cod}(\chi)$ 的群，证明了这类群可解并刻画出其结构. 本文将继续这一研究，考虑恰有两个不可约特征标 $\chi$ 满足 $\chi(1) \nmid \mathrm{cod}(\chi)$ 的群，我们得到这样的群也是可解的.

---

① 收稿日期：2020-11-30
基金项目：国家自然科学基金项目(11971391，12071376)；重庆市科学创新项目(CYB20087).
作者简介：陈小莉，硕士研究生，主要从事群论的研究.
通信作者：吕 恒，教授.

记 $\mathrm{Irr}(G)$ 为群 $G$ 的所有不可约特征标的集合. 设 $n$ 是一个正整数，$p$ 是一个素数，记 $\pi(n)$ 为不大于 $n$ 的素数的个数，$n_p$ 为 $n$ 的素数分解中 $p$ 的最大方幂，$v_p(n)$ 为 $n$ 的素数分解中 $p$ 的最大幂指数，$[x]$ 表示不超过 $x$ 的最大整数.

**引理 1**[7] 设 $S$ 为非交换单群，$p$ 为 $|S|$ 的素因子. 当 $S$ 为李型单群或 $p \geqslant 5$ 时，则存在 $\chi \in \mathrm{Irr}(S)$，使得 $p \nmid \dfrac{|S|}{\chi(1)}$.

**引理 2**[8] 令 $I=\{1, 2, \cdots, n\}$，$m=\left[\dfrac{n}{2}\right]$. 对正整数 $k \leqslant m$，定义 $I_k$ 是包含所有 $I$ 的子集长度为 $k$ 的集合，$\pi_k$ 是作用在集合 $I_k$ 上的置换特征标. 则对称群 $S_n$ 有不同的不可约特征标

$$\chi^{(n)}=1_{S_n}, \chi^{(n-1, 1)}, \chi^{(n-2, 2)}, \cdots, \chi^{(n-m, m)}$$

对所有的正整数 $k \leqslant m$ 都满足

$$\pi_k=\chi^{(n)}+\chi^{(n-1, 1)}+\cdots+\chi^{(n-k, k)} \qquad \pi_k(1)=|I_k|=C_n^k$$

特别地，$\chi^{(n-k, k)}=\pi_k-\pi_{k-1}$.

**引理 3**[9] 设 $N \trianglelefteq G$ 且 $|G:N|=p$，$p$ 是一个素数. 若 $\chi \in \mathrm{Irr}(G)$，则 $\chi_N \in \mathrm{Irr}(N)$ 或 $\chi_N=\sum\limits_{i=1}^{p} \upsilon_i$，其中 $\upsilon_i \in \mathrm{Irr}(N)(i=1,2,\cdots,p)$ 共轭且互不相同.

**引理 4**[10] 设 $G$ 为有限群，$p$ 为一个素数，$N=W_1 \times \cdots \times W_s$ 为 $G$ 的正规子群，其中 $W_i(i=1,\cdots,s)$ 是非交换单群且 $p \,\Big|\, |W_i|$. 如果 $C_G(N)=1$，且存在 $\phi_i \in \mathrm{Irr}(W_i)$ 使得 $v_p \dfrac{|\mathrm{Aut}(W_i)|}{\phi_i(1)^2}<0$，其中 $i=1,\cdots,s$，则存在 $\phi \in \mathrm{Irr}(N)$ 使得 $v_p \dfrac{|G|}{\phi(1)^2}<0$.

**引理 5**[2] 若 $S$ 为李型单群，$p$ 是 $|S|$ 的任意素因子，则 $|S|_p>|\mathrm{Out}(S)|_p$.

**引理 6**[11] 当正整数 $n \geqslant 1$ 时，则有正常数 $\alpha$ 及 $\beta$，使得

$$\alpha \cdot \frac{n}{\ln n}<\pi(2n)-\pi(n)<\beta \cdot \frac{n}{\ln n}$$

特别地，有

$$\pi(2n)-\pi(n)>\frac{\ln 2}{30} \cdot \frac{n}{\ln 2n}$$

**引理 7** 当正整数 $n \geqslant 13$ 时，在区间$\left(\left[\dfrac{n}{2}\right]+2, n\right]$中至少存在两个不同的素数 $p$，且有 $p \geqslant 11$.

**证** 由引理 6，当 $n=2^{10}$ 时，

$$\pi(2n)-\pi(n)>\frac{\ln 2}{30} \cdot \frac{2^{10}}{\ln 2^{11}}=\frac{2^{10}}{330}>3.1$$

当 $x>\dfrac{\mathrm{e}}{2}$ 时，函数

$$f(x)=\frac{x}{\ln 2x}$$

是增函数，则当正整数 $n \geqslant 2^{10}$ 时，区间$(n, 2n]$中素数的个数不少于 4. 由$\left[\dfrac{n}{2}\right]+2 \leqslant \dfrac{n}{2}+2$，故当 $n \geqslant 2^{11}$ 时，在区间$\left(\left[\dfrac{n}{2}\right]+2, n\right]$中的素数个数不少于 2. 当 $13 \leqslant n<2^{11}$ 时，通过质数表易计算，在区间$\left(\left[\dfrac{n}{2}\right]+2, n\right]$中至少存在两个不同的素数 $p$，且有 $p \geqslant 11$. 于是，当 $n \geqslant 13$ 时，结论成立.

**定理 1** 设 $S$ 为非交换单群，则 $S$ 至少存在 3 个维数不同的不可约特征标 $\chi$，使得 $\chi(1)^2 \nmid |S|$.

**证** 由有限单群分类定理，则 $S$ 为 26 类散在单群、李型单群或 $n$ 次交错群$(n \geqslant 5)$之一.

(i) 若 $S$ 为散在单群，由 Atlas 表[12]，$S$ 至少存在 3 个维数不同的不可约特征标 $\chi$，使得 $\chi(1)^2 \nmid |S|$.

(ii) 若 $S$ 为李型单群，由引理 1，对 $S$ 的每个素因子 $p_i$，都存在 $\chi_i \in \mathrm{Irr}(S)$，使得 $p_i \nmid \dfrac{|S|}{\chi_i(1)}$，即

$$\chi_i(1)_{p_i} = |S|_{p_i} \tag{1}$$

注意到 $\chi_i(1)^2 \nmid |S|$. 假设 $S$ 只有两个维数不同的不可约特征标满足(1) 式，分别设为 $\chi_1, \chi_2$，则 $|S|_{p_i} = \chi_1(1)_{p_i}$ 或 $|S|_{p_i} = \chi_2(1)_{p_i}$. 不妨设 $\chi_1(1) > \chi_2(1)$，于是

$$|S| = \prod_i |S|_{p_i} = \prod_i \chi_i(1)_{p_i} \leqslant \chi_1(1)\chi_2(1) < \chi_1(1)^2$$

与 $|S| = \sum_{\chi \in \mathrm{Irr}(S)} \chi(1)^2 \geqslant 1 + \chi_1(1)^2 > \chi_1(1)^2$ 矛盾.

(iii) 若 $S$ 为 $n$ 次交错群 $A_n(n \geqslant 5)$. 当 $n < 13$ 时，由 Atlas 表[12]，$S$ 至少存在 3 个维数不同的不可约特征标 $\chi$，满足 $\chi(1)^2 \nmid |S|$，矛盾. 当 $n \geqslant 13$ 时，由引理 1，对素因子 $p = 5$，存在 $\chi' \in \mathrm{Irr}(S)$，使得 $5 \nmid \dfrac{|S|}{\chi'(1)}$，即

$$\chi'(1)_5 = |S|_5 \tag{2}$$

由引理 2，对所有的正整数 $k \leqslant \left[\dfrac{n}{2}\right]$，对称群 $S_n$ 的不可约特征标 $\chi^{(n-k,\,k)}$ 均满足

$$\chi^{(n-k,\,k)}(1) = \pi_k(1) - \pi_{k-1}(1) = C_n^k - C_n^{k-1} = \frac{n(n-1)\cdots(n-k+2)(n-2k+1)}{k!} \tag{3}$$

又由引理 7，在区间$\left(\left[\dfrac{n}{2}\right]+2,\, n\right]$中至少存在 2 个不同的素数 $p_1, p_2$. 不妨设 $11 \leqslant p_1 < p_2$.

由于 $p_1 > \left[\dfrac{n}{2}\right]+2$，则得到 $n+1-p_1 < \left[\dfrac{n}{2}\right]$. 所以存在 $k_1$，满足

$$n+1-p_1 < k_1 \leqslant \left[\frac{n}{2}\right] \qquad k_1 \geqslant 5$$

于是 $p_1 > n - k_1 + 1$，故 $p_i \mid n(n-1)\cdots(n-k_1+2)$，$p_i \nmid k_1!(i = 1,2)$，由(3) 式可得

$$p_i \mid \chi^{(n-k_1,\,k_1)}(1) \qquad i = 1,2 \tag{4}$$

由 $\chi^{(n-k_1,\,k_1)}(1) \,\Big|\, |S_n|$ 以及 $|S_n|_{p_i} = (n!)_{p_i} = p_i(i = 1,2)$，则 $\chi^{(n-k_1,\,k_1)}(1)^2 \nmid |S_n|$. 取 $\upsilon_1 \in \mathrm{Irr}(A_n)$ 满足 $[(\chi^{(n-k_1,\,k_1)})_{A_n}, \upsilon_1] \neq 0$. 再由引理 3，得到$(\chi^{(n-k_1,\,k_1)})_{A_n} = \upsilon_1$ 或者$(\chi^{(n-k_1,\,k_1)})_{A_n} = \upsilon_1 + (\upsilon_1)^g$，其中$(\upsilon_1)^g$ 与 $\upsilon_1$ 共轭且互不相同. 则 $\upsilon_1(1)^2 \nmid |A_n|$. 由 $k_1 \geqslant 5$，则 $5 \mid k_1!$. 由(2)，(3) 式可得$(\upsilon_1(1))_5 < \chi'(1)_5$，故 $\upsilon_1(1) \neq \chi'(1)$.

再由 $p_1 < p_2$，故存在 $k_2(k_2 \neq k_1)$ 满足

$$n+1-p_2 < k_2 \leqslant n+1-p_1 \qquad 2k_2 \neq n+1-p_1$$

于是

$$p_2 > n - k_2 + 1 \geqslant p_1 \qquad p_1 \neq n - 2k_2 + 1$$

故

$$p_2 \mid \chi^{(n-k_2,\,k_2)}(1) \qquad p_1 \nmid \chi^{(n-k_2,\,k_2)}(1) \tag{5}$$

同理 $\chi^{(n-k_2,\,k_2)}(1)^2 \nmid |S_n|$. 取 $\upsilon_2 \in \mathrm{Irr}(A_n)$ 满足$[(\chi^{(n-k_2,\,k_2)})_{A_n}, \upsilon_2] \neq 0$，则 $\upsilon_2(1)^2 \nmid |A_n|$. 由(2)，(3) 式易得 $\chi^{(n-k_2,\,k_2)}(1)_5 < \chi'(1)_5$. 故 $\upsilon_2(1) \neq \chi'(1)$. 再由(4)，(5) 式，则 $\upsilon_1(1) \neq \upsilon_2(1)$.

**定理 2**　若群 $G$ 恰有两个不可约特征标 $\chi_i$，满足 $\chi_i(1) \nmid \mathrm{cod}(\chi_i)$，$i = 1,2$，则 $G$ 可解.

**证**　显然 $G$ 非交换. 由定理 1，$G$ 非单. 设 $N$ 是 $G$ 的极小正规子群.

若 $N \nsubseteq \ker \chi_i$，则 $\chi_i \notin \mathrm{Irr}(G/N)$，$i = 1,2$，即 $\forall \eta \in \mathrm{Irr}(G/N)$，有 $\eta(1) \mid \mathrm{cod}(\eta)$. 由文献[2] 得 $G/N$ 幂零，故 $G/N$ 可解. 若 $N \subseteq \ker \chi_1$ 或$N \subseteq \ker \chi_2$，即 $G/N$ 只有一个 $\eta \in \mathrm{Irr}(G/N)$ 满足 $\eta(1) \nmid \mathrm{cod}(\eta)$，由文献[6] 得 $G/N$ 可解.

若 $N \subseteq \ker \chi_i$，则$\chi_i \in \mathrm{Irr}(G/N)(i = 1,2)$. 故 $G/N$ 满足定理 2 的条件. 对 $|G|$ 用归纳法，则 $G/N$ 可解.

下面假设 $N$ 不可解. 设 $K \neq N$ 也是$G$ 的极小正规子群，则 $G \lesssim G/N \times G/K$. 因为 $G/N$，$G/K$ 可解，则 $G$ 可解，$N$ 可解，矛盾. 于是 $N$ 为唯一的极小正规子群. 若 $C_G(N) \neq 1$，则 $C_G(N) \geqslant N$，与 $N$ 不可解矛盾，

因此 $C_G(N)=1$. 因为 $N$ 可以写成同构单群的直积，且 $N$ 非交换，所以

$$N = W_1 \times \cdots \times W_s$$

其中 $W_i \cong W_1(1 \leqslant i \leqslant s)$，是非交换单群. 由 $|\mathrm{Aut}(W_i)| = |W_i| \cdot |\mathrm{Out}(W_i)|$，我们断言 $W_1$ 至少存在 3 个维数不同的 $\phi_i \in \mathrm{Irr}(W_1)$，满足

$$\phi_i(1)^2 \nmid |\mathrm{Aut}(W_1)| \qquad i = 1,2,3 \tag{6}$$

若 $W_1$ 为散在单群，由 Atlas 表[12]，结论成立.

若 $W_1$ 为李型单群，由引理 5，任意素因子 $p \,\Big|\, |W_1|$ 有 $|W_1|_p > |\mathrm{Out}(W_1)|_p$. 则

$$(|W_1|_p)^2 > |W_i|_p \cdot |\mathrm{Out}(W_1)|_p = |\mathrm{Aut}(W_1)|_p$$

由定理 1(ii)，至少有 3 个维数不同的 $\phi_i \in \mathrm{Irr}(W_1)$，都存在 $p_i$ 满足 $\phi_i(1)_{p_i} = |W_1|_{p_i}$，则 $\phi_i(1)^2_{p_i} > |\mathrm{Aut}(W_1)|_{p_i}(i=1,2,3)$，即(6) 式成立.

若 $W_1$ 为 $n$ 次交错群，由文献[10]有 $|\mathrm{Out}(W_1)| \leqslant 4$. 故由定理 1(iii) 构造出的 3 个维数不同的 $\phi_i \in \mathrm{Irr}(W_1)$ 也均满足(6) 式. 因此断言成立.

由(6) 式可得，存在素因子 $p \,\Big|\, |W_i|$ 使得 $v_p \dfrac{|\mathrm{Aut}(W_i)|}{\phi_i(1)^2} < 0$. 再由引理 4，存在 3 个维数不同的 $\phi = \phi_i \times \cdots \times \phi_i \in \mathrm{Irr}(N)(i=1,2,3)$，使得

$$v_p \frac{|G|}{\phi(1)^2} < 0 \tag{7}$$

对每个 $\phi$，取 $\chi \in \mathrm{Irr}(G)$ 满足$[(\chi)_N, \phi] = [\chi, \phi^G] \neq 0$. 因为 $\phi$ 的维数互不相同，由 Clifford 定理，则得到 3 个互不相同的 $\chi \in \mathrm{Irr}(G)$. 由(7) 式可得 $|G|_p < \phi(1)^2_p \leqslant \chi(1)^2_p$，则 $\chi(1)^2 \nmid |G|$，即 $\chi(1) \nmid \mathrm{cod}(\chi)$，与定理 2 的条件矛盾. 则 $N$ 可解. 故 $G$ 可解.

**参考文献：**


[1] 袁　媛，常　健，刘建军. 有限群的可解性与其部分极大子群的 SS-可补性 [J]. 西南师范大学学报(自然科学版)，2020，45(4)：1-4.

[2] GAGOLA M，LEWIS M L. A Character Theoretic Condition Characterizing Nilpotent Groups [J]. Communications in Algebra，1999，27(3)：1053-1056.

[3] QIAN G H，WANG Y M，WEI H Q. Co-Degrees of Irreducible Characters in Finite Groups [J]. Journal of Algebra，2007，312(2)：946-955.

[4] 雷　倩，何立官. 关于 Conway 单群和 Fischer 单群的刻画 [J]. 西南大学学报(自然科学版)，2020，42(10)：96-100.

[5] LIANG D F，QIAN G H. Finite Groups With Coprime Character Degrees and Codegrees [J]. Journal of Group Theory，2016，19(5)：763-776.

[6] 周　茹. 具有特殊非线性特征标的有限群 [D]. 重庆：西南大学，2020.

[7] DOLFI S，PACIFICI E，SANOS L，et al. On the Orders of Zeros of Irreducible Characters [J]. Journal of Algebra，2009，321(1)：345-352.

[8] JAMES G，LIEBECK M. Representations and Characters of Groups [M]. Cambridge：Cambridge University Press，2001：343-345.

[9] ISAACS I. Character Theory of Finite Groups [M]. Providence，Rhode Island：America Mathematical Society，2006.

[10] QIAN G H. A Character Theoretic Criterion for a $p$-Closed Group [J]. Israel Journal of Mathematics，2012，190(1)：401-412.

[11] 华罗庚. 数论导引 [M]. 北京：科学出版社，1975：99-100.

[12] CONWAY J H，CURTIS R T，NORTON S P，et al. Atlas of Finite Groups [M]. London：Oxford University Press，1985：35-276.


**责任编辑　廖　坤**