第 46 卷　第 10 期　　西南师范大学学报(自然科学版)　　2021 年 10 月
Vol. 46　No. 10　　Journal of Southwest China Normal University (Natural Science Edition)　　Oct.　2021

DOI:10.13718/j.cnki.xsxb.2021.10.002

非幂零自中心化子群是 TI-子群或次正规子群的有限群[①]

陈婵婵，　李　玉，　卢家宽，　张博儒

广西师范大学 数学与统计学院，广西 桂林 541004

摘要：本文给出了所有非幂零自中心化子群是特殊子群的有限群的一些性质. 证明了：如果有限群 G 的每个非幂零自中心化子群是 TI-子群或次正规子群，则 G 的每个非幂零子群皆次正规于 G. 进一步还证明了：如果 K 是非幂零群 G 的任一非幂零自中心化子群，且 $K\trianglelefteq G$，或存在子群 L 正规于 G 使得 L 是以极大子群 K 为 Frobenius 补的 Frobenius 群，则 G 的所有非幂零自中心化子群是 TI-子群.

关　键　词：非幂零群；自中心化子群；TI-子群；次正规子群；非循环子群

中图分类号：O152.1　　**文献标志码**：A　　**文章编号**：1000-5471(2021)10-0005-05

Finite Groups in Which Every Non-Nilpotent Self-Centralizing Subgroup Is a TI-Subgroup or A Subnormal Subgroup

CHEN Chanchan，　LI Yu，　LU Jiakuan，　ZHANG Boru

School of Mathematics and Statistics, Guangxi Normal University, Guilin Guangxi 541004, China

Abstract: In this paper, we have obtained some properties of a finite group in which every non-nilpotent self-centralizing subgroup is a special subgroup. It has been proved that if every non-nilpotent self-centralizing subgroup of a finite group G is a TI-subgroup or a subnormal subgroup of G, then every non-nilpotent subgroup of G must be subnormal in G. We further prove that K is a non-nilpotent self-centralizing subgroup of a non-nilpotent group G, if K normal in G or exists a normal subgroup L of G such that K is a maximal subgroup of L and K is a Frobenius complement of L, then every non-nilpotent self-centralizing subgroup of G is a TI-subgroup.

Key words: non-nilpotent goups; self-centralizing subgroups; TI-subgroups; subnormal subgroups; non-cyclic subgroups

① 收稿日期：2020-10-28

基金项目：国家自然科学基金项目(11861015)；广西高校中青年教师基础能力提升项目(20210KY1597，2020KY2019)；广西师范大学硕士研究生创新项目(XYCSZ20211011).

作者简介：陈婵婵，硕士研究生，主要从事群论的研究.

通信作者：卢家宽，教授，博士.

利用某些特殊子群的性质来研究有限群的结构是近年来众多学者研究的重点课题之一，文献[1]利用子群的S-拟正规嵌入性给出了有限群为p-幂零群的一个充分条件，推广了已有的结论. 文献[2]刻画了Conway单群和Fischer单群. 文献[3]确定了共轭类个数取最小值的2^3p阶群的具体结构. 在这基础上，本文继续研究某些特殊子群的性质对有限群结构的影响.

设G是有限群，$H \leqslant G$，如果对任意$g \in G$有$H^g \cap H = H, 1$，则称H为G的TI-子群. 设$H \leqslant G$，则$H \leqslant N_G(H) \leqslant G$. 如果$N_G(H) = G$，则$H \trianglelefteq G$，且$H$是$G$的TI-子群. 如果$H = N_G(H)$，且$H$是TI-子群，则$G$是Frobenius群，$H$是$G$的Frobenius补. 显然，Frobenius群的Frobenius补是TI-子群. 近年来，越来越多的学者研究在特定条件下某些子群是TI-子群的有限群的结构. 文献[4]研究了所有非交换子群是TI-子群的有限群的结构. 文献[5]研究了所有交换子群是TI-子群的有限群的结构. 文献[6]对所有非亚循环群皆为TI-子群的有限群进行了完全分类.

设$H \leqslant G$，如果$C_G(H) \leqslant H$，则称H为自中心化子群. 近几年来，众多学者研究了自中心化子群满足特定性质的有限群，并得到了一系列的结论. 文献[7-8]研究了所有非交换自中心化子群是TI-子群或次正规子群的有限群的结构，并得到：如果有限群G的所有非交换自中心化子群是TI-子群或次正规子群，则G的非交换子群皆次正规于G. 文献[9]研究了所有自中心化子群皆正规的有限群，得到：有限群G的所有自中心化子群皆正规当且仅当G是幂零类长不超过2的幂零群. 此外，文献[9]还得到：有限群G的所有自中心化子群皆次正规当且仅当G的每个子群皆次正规于G.

本文主要研究非幂零自中心化子群对有限群结构的影响，并得到了一些有意义的结果. 本文考虑的群都是有限群，使用的符号和术语都是标准的(参见文献[10]).

引理1[11] 设$H \leqslant G$，则$N_G(H)$是G的自中心化子群.

引理2[9] 设G是群，$H \leqslant G$，如果K是H的自中心化子群，则$\hat{K} = \langle K, C_G(K) \rangle$是$G$的自中心化子群，且：

(i) $\hat{K} \cap H = K$；

(ii) $N_G(\hat{K}) \cap H \leqslant N_H(K)$.

引理3 设G的每个非幂零自中心化子群是TI-子群或次正规子群，$K \leqslant G$，则K的每个非幂零自中心化子群是K的TI-子群或次正规子群.

证 设L是K的非幂零自中心化子群，根据引理2知$\hat{L} = \langle L, C_G(L) \rangle$是$G$的自中心化子群. 假设$\hat{L}$是幂零的，由$L \leqslant \hat{L}$知$L$是幂零的，矛盾. 故$\hat{L}$是非幂零的，从而根据假设，$\hat{L}$是$G$的TI-子群或次正规子群.

若$\hat{L} \lhd\lhd G$，则$L \trianglelefteq \hat{L} \lhd\lhd G$，从而$L \lhd\lhd G$，因此$L \lhd\lhd K$.

若$\hat{L}$是G的TI-子群，则对任意$g \in G$，有$\hat{L} \cap \hat{L}^g = \hat{L}, 1$. 由$K \leqslant G$知，对任意$k \in K$，有$\hat{L} \cap \hat{L}^k = \hat{L}, 1$. 若$\hat{L} \cap \hat{L}^k = 1$，则由引理2有

$$L \cap L^k = (\hat{L} \cap K) \cap (\hat{L} \cap K)^k = (\hat{L} \cap K) \cap (\hat{L}^k \cap K) = 1$$

从而L是K的TI-子群. 若$\hat{L} \cap \hat{L}^k = \hat{L}$，则

$$L \cap L^k = (\hat{L} \cap K) \cap (\hat{L} \cap K)^k = (\hat{L} \cap K) \cap (\hat{L}^k \cap K) = \hat{L} \cap K = L$$

从而L是K的TI-子群.

引理4[12] 设G是群，则下述结论等价：

(i) G是幂零群；

(ii) 若$H < G$，则$H < N_G(H)$；

(iii) G 的每个极大子群 $M \trianglelefteq G$(这时 $|G:M|$ 是素数)；

(iv) G 的每个 Sylow p-子群都是正规的，因而 G 是它的诸 Sylow 子群的直积.

引理 5[13]　Frobenius 群的所有 Frobenius 补共轭.

引理 6[13]　设 G 是 Frobenius 群，K 是 G 的 Frobenius 核，H 为 G 的 Frobenius 补，则：

(i) K 幂零；

(ii) 若 $p>2$，则 H 的 Sylow p-子群循环；若 $p=2$，则 H 的 Sylow p-子群循环或为广义四元数群.

引理 7[14]　设 G 是群，$H \lhd\lhd G$ 且 H 的阶为合数，如果存在 H 到 G 的合成列

$$H = G_s \trianglelefteq G_{s-1} \trianglelefteq \cdots \trianglelefteq G_1 \trianglelefteq G_0 = G$$

使得对每个 $1 \leqslant i \leqslant s$，$G_i$ 是 G 的 TI-子群，且 G_{i-1}/G_i 是素数阶循环群，则 $H \trianglelefteq G$.

定理 1　设群 G 的每个非幂零自中心化子群是 TI-子群或次正规子群，则 G 的每个非幂零子群皆次正规于 G.

证　设 K 是 G 的一个非幂零子群，若 $K \lhd\lhd G$，则结论成立. 假设 K 非次正规于 G，选择 K 是 G 的极大非幂零且非次正规的子群.

假设 $C_G(K) \nsubseteq K$，则 $K < \hat{K} = \langle K, C_G(K)\rangle$. 根据引理 2，$\hat{K}$ 是自中心化的. 因为 $\hat{K}$ 非幂零，所以由 $K < \hat{K} = \langle K, C_G(K)\rangle \leqslant G$ 及 K 的极大性知 $\hat{K} \lhd\lhd G$. 又因 $K \lhd \hat{K}$，则 $K \lhd\lhd G$，矛盾. 故 $C_G(K) \leqslant K$，从而 K 是 G 的自中心化子群.

假设 $K < N_G(K)$，由引理 1 知 $N_G(K)$ 是 G 的自中心化子群. 假设 $N_G(K)$ 是幂零群，由 $K < N_G(K)$ 知 K 幂零，矛盾. 因此 $N_G(K)$ 非幂零，从而由 K 的极大性知 $N_G(K) \lhd\lhd G$. 又由 $K \lhd N_G(K)$ 知 $K \lhd\lhd G$，矛盾. 故 $K = N_G(K)$，从而 K 是 G 的非幂零自中心化子群. 又因 K 非次正规于 G，由假设知 K 是 G 的 TI-子群，故 G 是 Frobenius 群，且 K 是 G 的 Frobenius 补. 设 N 是 G 的 Frobenius 核，则 $G = N \rtimes K$，即 G 是 N 和 K 的半直积.

设 K_1 是 K 的极大子群，假设 K 是素数阶群，则 K 循环，从而 K 交换，因此 K 幂零，矛盾. 故 K 不是素数阶群，从而 $K_1 \neq 1$，且 $N \rtimes K_1$ 是 G 的非幂零极大子群. 若 $N \rtimes K_1 \ntrianglelefteq G$，则 $N \rtimes K_1$ 非次正规于 G，且 $N \rtimes K_1$ 是自中心化的，从而由假设知 $N \rtimes K_1$ 是 G 的 TI-子群，因此 $N \rtimes K_1$ 也是 G 的 Frobenius 补，由引理 5 知，存在 $x \in G$，使得 $K = (N \rtimes K_1)^x$，则

$$N \cap K = N \cap (N \rtimes K_1)^x = N \cap (N \rtimes K_1^{\,x}) = N \neq 1$$

矛盾. 于是对 K 的每个极大子群 K_1 有 $N \rtimes K_1 \trianglelefteq G$. 由子群的模律有

$$K_1 = K_1(N \cap K) = NK_1 \cap K \trianglelefteq K$$

由引理 4 知 K 幂零，矛盾，即 K 非次正规于 G 不成立.

定理 2　设群 G 的每个非循环自中心化子群是 TI-子群或次正规子群，则 G 的每个非循环子群皆次正规于 G.

证　因为任意非交换自中心化子群必是非循环自中心化子群，所以 G 的每个非交换自中心化子群是 TI-子群或次正规子群. 根据文献[7]的定理 1.1 知 G 的每个非交换子群皆次正规于 G.

设 H 是 G 的非循环子群. 反证法，假设 H 非次正规于 G，选择 H 是 G 的极大非循环且非次正规的子群.

假设 $C_G(H) \nsubseteq H$，则 $H < \hat{H} = \langle H, C_G(H)\rangle$. 根据引理 2 知 $\hat{H}$ 是自中心化的. 因为 $\hat{H}$ 非循环，所以由 $H < \hat{H} = \langle H, C_G(H)\rangle \leqslant G$ 及 H 的极大性知 $\hat{H} \lhd\lhd G$. 又因 $H \lhd \hat{H}$，则 $H \lhd\lhd G$，矛盾. 故 $C_G(H) \leqslant H$，从而 H 是 G 的自中心化子群.

因 $H \leqslant G$，$N_G(H) \leqslant G$，则 $H \leqslant N_G(H)$. 若 $H < N_G(H)$，由引理 1 知 $N_G(H)$ 自中心化，且 $N_G(H)$ 非循环，从而由 H 的极大性知 $N_G(H) \lhd\lhd G$. 又由 $H \lhd N_G(H)$ 知 $H \lhd\lhd G$，矛盾. 故 $H = N_G(H)$. 由 H 是 G 的 TI-子群和 $H = N_G(H)$ 知，G 为关于子群 H 的 Frobenius 群，H 为 G 的 Frobenius 补. 因为 G 的

每个非交换子群皆次正规于G，则H交换，从而H幂零，于是由引理4知，H为它的诸Sylow子群的直积．又由引理6及H交换知，H的Sylow子群皆为循环群，从而由文献[12]第一章的习题3.1知H循环，矛盾．因此G的每个非循环子群皆次正规于G．

定理3　设G是非幂零群，如果G的每个非幂零自中心化子群是TI-子群或次正规子群，则G可解．

证　假设结论不成立，设G为极小阶反例．设$K \leqslant G$，由引理3知K的每个非幂零自中心化子群是TI-子群或次正规子群，则由G的极小性知K是可解的．假设G的每个极大子群幂零，则由文献[13]的定理9.19知G可解，矛盾．故存在G的极大子群非幂零．不妨设M为G的非幂零极大子群，假设$M \trianglelefteq G$，则G/M只有平凡子群1和G/M，从而由文献[12]第一章的习题1.19知G/M必为素数阶循环群，因此G/M可解．又因M可解，于是G可解，矛盾．故$M \ntrianglelefteq G$．显然M非次正规于G．由M的极大性及$M \ntrianglelefteq G$知$M = N_G(M)$，则由引理1知M为G的非幂零自中心化子群，从而由假设知M是G的TI-子群，因此G是Frobenius群，M为G的Frobenius补．不妨设N为G的Frobenius核，则由引理6知N幂零，从而N可解．又因$G/N \cong M$，则G/N可解，从而G可解，矛盾．因此G可解．

定理4　设G是非幂零群，如果G的所有非幂零自中心化子群是TI-子群，则G的每个非幂零自中心化子群皆正规于G．

证　反证法，假设存在G的非幂零自中心化子群K，使得$K \ntrianglelefteq G$．由$K \ntrianglelefteq G$知$N_G(K) < G$．考虑群列

$$K = K_1 \leqslant N_G(K_1) = K_2 \leqslant N_G(K_2) = K_3 \leqslant \cdots \leqslant N_G(K_{r-1}) = K_r \leqslant N_G(K_r) \leqslant G$$

如果存在正整数r使得$N_G(K_r) = G$，则$K_r \trianglelefteq G$．设$G = K_{r+1}$，因为

$$K_i \trianglelefteq N_G(K_i) = K_{i+1} \qquad 1 \leqslant i \leqslant r$$

则$K \trianglelefteq\trianglelefteq G$．由Schreier加细定理知$K$在$G$的某个合成列中出现．不妨设

$$K = G_s \trianglelefteq G_{s-1} \trianglelefteq \cdots \trianglelefteq G_1 \trianglelefteq G_0 = G$$

是从K到G的合成列．因K是自中心化的且$K \leqslant G_t$，$0 \leqslant t \leqslant s$，则每个$G_t$皆是自中心化的．由假设知$G_t$是$G$的TI-子群．又因$K$非幂零且$K \ntrianglelefteq G$，则$K \neq 1$，且$K$的阶为合数．由引理7及定理3知$K \trianglelefteq G$，矛盾．故$N_G(K_r) < G$．

假设不存在r使得$K_r = N_G(K_r)$，则对$\forall r$，$K_r < N_G(K_r) < G$，从而

$$K_r^g < N_G(K_r)^g < G \qquad \forall g \in G \backslash N_G(K_r)$$

因此

$$1 \leqslant K_r \cap K_r^g < N_G(K_r) \cap N_G(K_r)^g$$

又因$N_G(K_r)$和K_r皆为G的TI-子群且$K_r \ntrianglelefteq G$，则

$$K_r \cap K_r^g = 1 \qquad N_G(K_r) \cap N_G(K_r)^g = 1$$

显然$K_r \cap K_r^g < N_G(K_r) \cap N_G(K_r)^g$不成立，矛盾．故存在正整数$r$，使得$K_r = N_G(K_r)$．由引理1知$K_r$是自中心化的，又由$K$非幂零知$K_r$非幂零，则由假设知$K_r$是TI-子群，从而$G$是Frobenius群，$K_r$是$G$的非幂零Frobenius补．设$N$是$G$的Frobenius核，则$G = N \rtimes K_r$，即$G$是$N$和$K_r$的半直积．

设L是K_r的极大子群，则$N \rtimes L$是G的非幂零极大子群．若$N \rtimes L \ntrianglelefteq G$，则$N \rtimes L$非次正规于$G$，且$N \rtimes L$是自中心化的，从而由假设知$N \rtimes L$是$G$的TI-子群，这说明$N \rtimes L \trianglelefteq G$，矛盾．因此$N \rtimes L \trianglelefteq G$．由子群的模律有

$$L = L(N \cap K_r) = NL \cap K_r \trianglelefteq K_r$$

由引理4知K_r幂零，矛盾．因此G的每个非幂零自中心化子群皆正规于G．

定理5　设G是非幂零群，K是G的任一非幂零自中心化子群，如果$K \trianglelefteq G$，或存在子群L正规于G，使得L是以极大子群K为Frobenius补的Frobenius群，则G的所有非幂零自中心化子群是TI-子群．

证　设K是G的任一非幂零自中心化子群，则只需证K是G的TI-子群．

若$K \trianglelefteq G$，则$K^g = K$，显然K是G的TI-子群．

若 $K \ntrianglelefteq G$，则由假设知存在 $L \trianglelefteq G$，使得 K 是 L 的极大子群，且 K 是 L 的 Frobenius 补，即有 $K^x \cap K = 1(\forall x \in L \backslash K)$. 显然 K^g 是 L^g 的极大子群，而

$$(K^g)^{x^g} \cap K^g = K^{xg} \cap K^g = (K^x \cap K)^g = 1 \qquad \forall x^g \in L^g \backslash K^g$$

则 K^g 是 L^g 的 Frobenius 补. 又因 $L \trianglelefteq G$，则 $L^g = L(\forall g \in G)$，从而 K^g 是 L 的 Frobenius 补. 由引理 5 知，存在 $y \in L$ 使得 $K^y = K^g$. 又由 K 是 L 的 Frobenius 补知 $K^l \cap K = 1(\forall l \in L \backslash K)$，则 $K^y \cap K = K, 1$，从而 $K^g \cap K = K, 1(\forall g \in G)$，故 K 是 G 的 TI-子群.

参考文献：

[1] 袁　媛，唐　康，刘建军. S-拟正规嵌入子群与有限群的 p-幂零性 [J]. 西南师范大学学报(自然科学版)，2020，45(6)：1-4.

[2] 雷　倩，何立官. 关于 Conway 单群和 Fischer 单群的刻画 [J]. 西南大学学报(自然科学版)，2020，42(10)：96-100.

[3] 廖俊梅，曹洪平. $2^3 p$ 阶群的共轭类个数与群的结构 [J]. 西南大学学报(自然科学版)，2018，40(12)：86-89.

[4] SHI J T，ZHANG C. Finite Groups in Which All Nonabelian Subgroups are TI-Subgroups [J]. Journal of Algebra and Its Applications，2014，13(1)：1350074.

[5] GUO X Y，LI S R，FLAVELL P. Finite Groups Whose Abelian Subgroups are TI-Subgroups [J]. Journal of Algebra，2007，307(2)：565-569.

[6] LI S R，SHEN Z C，DU N. Finite Groups with Few TI-Subgroups [J]. Communications in Algebra，2015，43(7)：2680-2689.

[7] SUN Y Q，LU J K，MENG W. Finite Groups Whose Non-Abelian Self-Centralizing Subgroups are TI-Subgroups or Subnormal Subgroups [J]. Journal of Algebra and Its Applications，2021，20(3)：2150040.

[8] 孙雨晴，卢家宽. 自中心化子群对有限群结构的影响 [J]. 广西师范大学学报(自然科学版)，2020，38(5)：48-55.

[9] HASSANZADEH M，MOSTAGHIM Z. On Groups Whose Self-Centralizing Subgroups are Normal [J]. Journal of Algebra and Its Applications，2019，18(6)：1950106.

[10] HUPPERT B. Endliche Gruppen I [M]. New York：Springer-Verlag，1979.

[11] FALCO M，GIOVANNI F，MUSELLA C. Groups with Large Centralizer Subgroups [J]. Notedi Matemetica，2009，29(2)：21-28.

[12] 徐明曜. 有限群导引(上册) [M]. 2 版. 北京：科学出版社，1999.

[13] ROBINSON D J S. A Course in the Theory of Groups [M]. New York：Springer-Verlag，1996.

[14] SHI J T，ZHANG C. A Note on TI-Subgroups of a Finite Group [J]. Algebra Colloquium，2014，21(2)：343-346.

责任编辑　廖　坤