第 46 卷 第 10 期 西南师范大学学报(自然科学版) 2021 年 10 月
Vol. 46 No. 10 Journal of Southwest China Normal University (Natural Science Edition) Oct. 2021

DOI:10.13718/j.cnki.xsxb.2021.10.003

Hom-李代数的粗糙代数结构①

李小朝, 高风昕

黄淮学院 数学与统计学院, 河南 驻马店 463000

摘要: Hom-李代数是一类新的代数结构. 将粗糙集思想引入到 Hom-李代数之中, 基于 Hom-李代数的理想, 定义了同余关系和 Hom-李代数的子空间关于同余的上(下)近似, 研究了 Hom-李代数的粗子代数、粗理想和商代数等粗糙代数结构.

关 键 词: Hom-李代数; 同余; 粗子代数; 粗理想; 商代数

中图分类号: O153 **文献标志码:** A **文章编号:** 1000-5471(2021)10-0010-06

On Rough Algebra Structures of Hom-Lie Algebra

LI Xiaochao, GAO Fengxin

School of Mathematics and Statistics, Huanghuai University, Zhumadian Henan 463000, China

Abstract: Hom-Lie algebra is a new kind of algebraic structure. The idea of rough set is introduced into Hom-Lie algebra. Based on the ideal of Hom-Lie algebra, the congruence relation and the upper (lower) approximation of subspace of Hom-Lie algebra on congruence are defined. The rough algebra structures of Hom-Lie algebra such as rough subalgebra, rough ideal and quotient algebra are studied.

Key words: Hom-Lie algebra; congruence; rough subalgebra; rough ideal; quotient algebra

Hom-李代数是 Hartwig 等在 2006 年研究 Witt 代数和 Virasoro 代数的形变理论时提出来的[1], 它是把李代数的 Jacobi 等式通过线性映射进行扭曲而得到的新的代数结构. 关于李代数的形变, 更早的研究见文献[2]所给出的 q- 李代数. 由于 Hom-李代数与理论物理、量子群等有着紧密的联系, 自被提出以来, 就得到较为广泛和深入的研究, 例如 Hom-李代数的表示理论[3] 和复半单李代数的 Hom-李代数结构[4] 等. 目前还没有关于 Hom-李代数上粗糙集的研究. 粗糙集的理论是文献[5]首先提出来的, 它在机器学习、知识发现、数据的决策与分析和模式识别等领域有着广泛应用. 文献[6-9]利用粗糙集理论研究了半群、环、格和线性空间等的广义代数结构. 文献[10-12]研究了其他形式的广义半群和代数理论. 文献[13]在结合代数上基于理想定义了同余关系, 研究了结合代数上的粗糙集. 本文把粗糙集的思想引入到 Hom-李代数上, 研究 Hom- 李代数上的上(下)近似和粗糙代数结构, 得到一些有意义的结果.

1 预备知识

定义 1[1,3] 设 L 是复数域 $\mathbb{C}$ 上的线性空间, σ: $L \longrightarrow L$ 是一个线性映射. 若二元运算 $L \times L \longrightarrow$

---

① 收稿日期: 2020-08-15

基金项目: 河南省高等学校青年骨干教师培养计划(2019GGJS228); 河南省科技计划项目(182102110292).

作者简介: 李小朝, 副教授, 博士, 主要从事代数学和模糊数学的研究.

L：$(x, y) \longmapsto [x, y]$ 是双线性的，且对任意 $x, y, z \in L$ 满足：

(a) $[x, y] = -[y, x]$；

(b) $[\sigma(x), [y, z]] + [\sigma(y), [z, x]] + [\sigma(z), [x, y]] = 0$.

则称三元组$(L, [,], \sigma)$ 是一个 Hom-李代数.（b）称为 Hom-Jacobi 等式.

若 L 的子空间 N_1 满足 $\sigma(N_1) \subseteq N_1$，$[N_1, N_1] \subseteq N_1$，则称$(N_1, [,], \sigma|_{N_1})$ 是$(L, [,], \sigma)$ 的 Hom-李子代数，简称子代数. 若 L 的子空间 N_2 满足 $\sigma(N_2) \subseteq N_2$，$[L, N_2] \subseteq N_2$，则称$(N_2, [,], \sigma|_{N_2})$ 是$(L, [,], \sigma)$ 的理想.

定义 2[4]　设$(L_1, [,]_1, \sigma_1)$，$(L_2, [,]_2, \sigma_2)$ 是两个 Hom-李代数，f：$L_1 \longrightarrow L_2$ 是一个线性映射. 若对任意 $x, y \in L_1$，都有 $f([x, y]_1) = [f(x), f(y)]_2$ 和 $f \circ \sigma_1 = \sigma_2 \circ f$，则称 f 是 Hom-李代数的同态映射. 若 f 是双射，则称 f 是 Hom-李代数同构，而 Hom-李代数$(L_1, [,]_1, \sigma_1)$，$(L_2, [,]_2, \sigma_2)$ 是同构的.

设 f 是 Hom-李代数 L_1 到 L_2 的同态映射，则 $\mathrm{Ker}\, f = \{x \in L_1 \mid f(x) = 0\}$ 称为同态 f 的核，$\mathrm{Im}\, f = \{f(x) \mid x \in L_1\}$ 称为同态 f 的像. 显然，$\mathrm{Ker}\, f$ 是 L_1 的理想，$\mathrm{Im}\, f$ 是 L_2 的子代数.

命题 1　设 f：$(L_1, [,]_1, \sigma_1) \longrightarrow (L_2, [,]_2, \sigma_2)$ 是 Hom-李代数同态，I 是 L_1 的理想，则 $f(I)$ 是 $f(L_1)$ 的理想.

命题 1 的证明容易得到，证明过程略.

设 R 是 Hom-李代数 L 上的等价关系，若对任意 $z \in L$，$k \in \mathbb{C}$，由$(x, y) \in R$ 可推出$(x+z, y+z)$，(kx, ky)，$([x, z], [y, z]) \in R$，则称 R 是 L 上的一个同余关系.

设 I 是 Hom-李代数 L 的理想. 在 L 上定义二元关系 $R_I = \{(x, y) \mid x - y \in I, \forall x, y \in L\}$. 显然，$R_I$ 是一个等价关系，满足反身性、对称性和传递性.

命题 2　R_I 是 Hom-李代数 L 上的一个同余关系.

命题 2 的证明容易得到，证明过程略.

此时称 x, y 是同余的，记为 xR_Iy. 记 $R_I(x)$ 表示包含 x 的 R_I 同余类，显然 $R_I(x) = x + I$.

命题 3　设 I 是 Hom-李代数 L 的理想，对任意 $x, y \in L$，有：

(i) $R_I(x) + R_I(y) = R_I(x + y)$；

(ii) $R_I(kx) = kR_I(x)$，$\forall k \in \mathbb{C}$，$k \neq 0$；

(iii) $[R_I(x), R_I(y)] \subseteq R_I([x, y])$.

由于 I 是理想，也是子空间，有 $I + I = I$，$kI = I (k \neq 0)$ 和$[I, I] \subseteq I$. 再结合 $R_I(x) = x + I$，命题 3 容易证明.

2　Hom-李代数的粗糙代数结构

定义 3　设 I 是 Hom-李代数 L 的理想，M 是 L 的非空子集. 定义 M 关于 I 的下近似为 $\underline{R}_I(M) = \{x \in L \mid R_I(x) \subseteq M\}$，$M$ 关于 I 的上近似为$\overline{R}_I(M) = \{x \in L \mid R_I(x) \cap M \neq \varnothing\}$.

定理 1　设 I 是 Hom-李代数 L 的理想，M 是 L 的子空间，则$\overline{R}_I(M) = M + I$，$\underline{R}_I(M) = M$ 或 $\underline{R}_I(M) = \varnothing$.

证　对任意 $x \in \overline{R}_I(M)$，有 $R_I(x) \cap M \neq \varnothing$，即$(x + I) \cap M \neq \varnothing$. 因此存在 $y \in I$，$z \in M$，满足 $z = x + y$，得到 $x = z - y \in M + I$，也就是有$\overline{R}_I(M) \subseteq M + I$. 对任意 $z + y \in M + I (z \in M, y \in I)$，有 $-y \in I$，满足 $z + y + (-y) \in (z + y + I) \cap M$，得到 $z + y \in \overline{R}_I(M)$，即 $M + I \subseteq \overline{R}_I(M)$. 因此得到 $\overline{R}_I(M) = M + I$.

当 $I \subseteq M$ 时. 若 $x \in M$，有 $R_I(x) = x + I \subseteq M$，即 $x \in \underline{R}_I(M)$. 若 $x \in \underline{R}_I(M)$，则 $x \in R_I(x) \subseteq M$. 因而 $\underline{R}_I(M) = M$.

当 $I \not\subset M$ 时. 此时存在 $x \in I$，$x \notin M$. 若有元素 $y \in \underline{R}_I(M)$，即有 $R_I(y) = y + I \subseteq M$，进而有 $y + x \in M$. 又因 $y \in \underline{R}_I(M)$，即 $R_I(y) = y + I \subseteq M$，得 $y \in M$. 因为 M 是线性空间，则有 $x \in M$，与假

设矛盾. 故有 $\underline{R}_I(M) = \varnothing$.

定义 4　设 I 是 Hom -李代数 L 的理想，M 是 L 的子空间. 如果 $\underline{R}_I(M)$ 是 L 的一个子代数(理想)，则称 M 是一个下粗子代数(理想)；如果 $\overline{R}_I(M)$ 是 L 的一个子代数(理想)，则称 M 是一个上粗子代数(理想)；如果 M 同时是上粗子代数(理想) 和下粗子代数(理想)，则称 M 是一个粗子代数(理想).

定理 2　设 I 是 Hom -李代数 L 的理想，如果 M 是 L 的子代数(理想)，则 M 是 L 的一个上粗子代数(理想). 进而，如果 $I \subseteq M$，则 M 是 L 的一个粗子代数(理想).

证　由定理 1 知 $\overline{R}_I(M) = M + I$. 由于 I 是理想，M 是子代数，则有

$$[\overline{R}_I(M), \overline{R}_I(M)] = [M + I, M + I] \subseteq [M, M] + I \subseteq M + I = \overline{R}_I(M)$$

和

$$\sigma(\overline{R}_I(M)) = \sigma(M + I) = \sigma(M) + \sigma(I) \subseteq M + I$$

因此，$\overline{R}_I(M)$ 是子代数，即 M 是 L 的一个上粗子代数.

如果还有 $I \subseteq M$，则对任意的 $x \in M$，有 $R_I(x) = x + I \subseteq M$，即 $x \in \underline{R}_I(M)$. 因而 $\underline{R}_I(M) = M$ 是 L 的一个子代数. 故 M 是 L 的一个粗子代数.

对理想的情形类似可证，过程略.

定理 3　设 I 是 Hom -李代数 L 的理想，如果 M, N 是 L 的下粗子代数(理想)，则 $M \cap N$ 和 $[M, M]$ 是 L 的下粗子代数(理想).

证　由 M, N 是 L 的下粗子代数和定理 1 知，$\underline{R}_I(M) = M$ 和 $\underline{R}_I(N) = N$ 是子代数，此时有 $I \subseteq M$，$I \subseteq N$. 进而有 $I \subseteq M \cap N$，得到 $\underline{R}_I(M \cap N) = M \cap N$ 是子代数，即 $M \cap N$ 是 L 的下粗子代数.

同理可证，$[M, M]$ 是 L 的下粗子代数.

对理想的情形类似可证，过程略.

定理 4　设 I 是 Hom -李代数 L 的理想，如果 M 是 L 的上粗子代数，则 $[M, M]$ 是 L 的上粗子代数.

证　由于 M 是上粗子代数，则 $\overline{R}_I(M) = M + I$ 是子代数，进而有 $[M, M] \subseteq M + I$. 因此得到

$$[\overline{R}_I[M, M], \overline{R}_I[M, M]] = [[M, M] + I, [M, M] + I] \subseteq [M + I, M + I] \subseteq$$
$$[M, M] + I = \overline{R}_I[M, M]$$

和

$$\sigma(\overline{R}_I[M, M]) = \sigma([M, M] + I) = \sigma([M, M]) + \sigma(I) =$$
$$[\sigma(M), \sigma(M)]) + \sigma(I) \subseteq [M, M] + I = \overline{R}_I[M, M]$$

故 $\overline{R}_I[M, M]$ 是 L 的子代数，即 $[M, M]$ 是 L 的上粗子代数.

定理 5　设 I 是 Hom -李代数 L 的理想，如果 J, M 分别是 L 的上粗理想和上粗子代数，则 $J + M$ 是上粗子代数.

证　由于 J, M 分别是 L 的上粗理想和上粗子代数，则 $\overline{R}_I(J) = J + I$ 是 L 的理想，$\overline{R}_I(M) = M + I$ 是 L 的子代数. 可以得到

$$[\overline{R}_I(J + M), \overline{R}_I(J + M)] = [J + M + I, J + M + I] =$$
$$[(J + I) + (M + I), (J + I) + (M + I)] \subseteq (J + 1) + (M + I) = \overline{R}_I(J + M)$$
$$\sigma(\overline{R}_I(J + M)) = \sigma(J + M + I) = \sigma(J + I + M + I) =$$
$$\sigma(J + I) + \sigma(M + I) \subseteq (J + 1) + (M + I) = \overline{R}_I(J + M)$$

因此 $\overline{R}_I(J + M)$ 是子代数，即 $J + M$ 是上粗子代数.

定理 6　设 I 是 Hom -李代数 L 的理想. 若 K, J 是 L 的上粗理想，则 $K + J$ 也是 L 的上粗理想.

由定理 1 和定义 4 知定理 6 易证.

设 $f: L_1 \longrightarrow L_2$ 是 Hom -李代数同态，由命题 1，类似地有 $R_{f(I)}$ 是 $f(L_1)$ 上关于理想 $f(I)$ 的一个同余关系.

定理 7　设 $f: L_1 \longrightarrow L_2$ 是 Hom -李代数同态，I 是 L_1 的理想，M 是 L_1 的子空间，则 $f(\overline{R}_I(M)) = \overline{R}_{f(I)}(f(M))$.

证　由定理 1 知，$f(\overline{R}_I(M)) = f(M+I) = f(M)+f(I) = \overline{R}_{f(I)}(f(M))$.

定理 8　设 $f: L_1 \longrightarrow L_2$ 是 Hom-李代数单同态，I 是 L_1 的理想，M 是 L_1 的子空间，则 $f(\underline{R}_I(M)) = \underline{R}_{f(I)}(f(M))$.

证　对任意 $x \in f(\underline{R}_I(M))$，存在 $y \in \underline{R}_I(M)$，使得 $x = f(y)$，此时 $y+I \subseteq M$. 进而有 $f(y)+f(I) \subseteq f(M)$，得到 $x = f(y) \in \underline{R}_{f(I)}(f(M))$. 故 $f(\underline{R}_I(M)) \subseteq \underline{R}_{f(I)}(f(M))$.

对任意 $x \in \underline{R}_{f(I)}(f(M))$，有 $R_{f(I)}(x) \subseteq f(M)$，即 $x+f(I) \subseteq f(M)$，则存在 $y \in L_1$，使得 $x = f(y)$. 进而 $f(y)+f(I) \subseteq f(M)$，得到 $f(y+I) \subseteq f(M)$. 由于 f 是单射，则有 $y+I \subseteq M$，即 $R_I(y) \subseteq M$，也即是 $y \in \underline{R}_I(M)$. 故 $x = f(y) \in f(\underline{R}_I(M))$，即 $\underline{R}_{f(I)}(f(M)) \subseteq f(\underline{R}_I(M))$.

因此 $f(\underline{R}_I(M)) = \underline{R}_{f(I)}(f(M))$.

关于 Hom-李代数的同态，同样有粗子代数和粗理想的结论.

定理 9　设 $f: L_1 \longrightarrow L_2$ 是 Hom-李代数单同态，I 是 L_1 的理想，M 是 L_1 的子空间，则 M 是 L_1 的粗子代数当且仅当 $f(M)$ 是 L_2 的粗子代数.

证　*必要性*　由于 M 是 L_1 的粗子代数，则 $\overline{R}_I(M)$，$\underline{R}_I(M)$ 是 L_1 的子代数. 首先，$\overline{R}_I(M)$ 是 L_1 的子代数，即

$$[\overline{R}_I(M),\ \overline{R}_I(M)]_1 \subseteq \overline{R}_I(M) \qquad \sigma_1(\overline{R}_I(M)) \subseteq \overline{R}_I(M)$$

进而得到

$$[f(\overline{R}_I(M)),\ f(\overline{R}_I(M))]_2 \subseteq f(\overline{R}_I(M)) \qquad \sigma_2 \circ f(\overline{R}_I(M)) = f \circ \sigma_1(\overline{R}_I(M)) \subseteq f(\overline{R}_I(M))$$

也就是 $f(\overline{R}_I(M))$ 是 L_2 的子代数. 由定理 7 知，$\overline{R}_{f(I)}(f(M))$ 是 L_2 的子代数. 其次，由 $\underline{R}_I(M)$ 是 L_1 的子代数，类似可证 $\underline{R}_{f(I)}(f(M))$ 是 L_2 的子代数. 故 $f(M)$ 是 L_2 的粗子代数.

充分性　由于 $f(M)$ 是 L_2 的粗子代数，则 $\overline{R}_{f(I)}(f(M))$ 和 $\underline{R}_{f(I)}(f(M))$ 是 L_2 的子代数. 首先，$f(\overline{R}_I(M)) = \overline{R}_{f(I)}(f(M))$ 是 L_2 的子代数，得到

$$f([\overline{R}_I(M),\ \overline{R}_I(M)]_1) = [f(\overline{R}_I(M)),\ f(\overline{R}_I(M))]_2 \subseteq f(\overline{R}_I(M))$$

由于 f 是单同态，则$[\overline{R}_I(M),\ \overline{R}_I(M)] \subseteq \overline{R}_I(M)$. 又因 $\sigma_2(\overline{R}_{f(I)}(f(M))) \subseteq \overline{R}_{f(I)}(f(M))$，得到

$$f \circ \sigma_1(\overline{R}_I(M)) = \sigma_2 \circ f(\overline{R}_I(M)) \subseteq f(\overline{R}_I(M))$$

由于 f 是单同态，有 $\sigma_1(\overline{R}_I(M)) \subseteq \overline{R}_I(M)$，进而得到 $\overline{R}_I(M)$ 是 L_1 的子代数. 同样可以证明 $\underline{R}_I(M)$ 是 L_1 的子代数，故 M 是 L_1 的粗子代数.

对于粗理想的情形，与定理 9 的证明类似，有如下结论成立：

定理 10　设 $f: L_1 \longrightarrow L_2$ 是 Hom-李代数同构，I 是 L_1 的理想，M 是 L_1 的子空间，则 M 是 L_1 的粗理想当且仅当 $f(M)$ 是 L_2 的粗理想.

令 $\overline{L} = \{R_I(x) \mid x \in L\}$ 表示 Hom-李代数$(L, [\,,\,], \sigma)$ 关于理想 I 的全体同余类集合. 在 $\overline{L}$ 上定义加法、数量乘法和方括号运算分别为

$$R_I(x)+R_I(y) = R_I(x+y) \qquad rR_I(x) = R_I(rx) \qquad [R_I(x),\ R_I(y)] = R_I([x,\ y])$$

对任意 $x, y \in L$，$r \in \mathbb{C}$，容易证明上述运算是合理的，与代表元的选取无关.

在 $\overline{L}$ 上定义映射 $\bar{\sigma}(R_I(x)) = \bar{\sigma}(x+I) = \sigma(x)+I$，此时 $\bar{\sigma}(R_I(x)) = R_I(\sigma(x))$. 容易验证 $\bar{\sigma}$ 是线性映射，且 $\bar{\sigma}([R_I(x),\ R_I(y)]) = [\bar{\sigma}(R_I(x)),\ \bar{\sigma}(R_I(y))]$.

定理 11　设 L 为 Hom-李代数，则 $\overline{L}$ 关于上述加法、数量乘法和方括号运算以及线性映射 $\bar{\sigma}$ 构成 Hom-李代数.

证　容易验证 $\overline{L}$ 关于加法和数量乘法运算构成线性空间，零元素为 $R_I(0)$. 又因为

$$[R_I(x),\ R_I(y)] = R_I([x, y]) = R_I(-[y,\ x]) = -R_I([y,\ x]) = -[R_I(y),\ R_I(x)]$$

$$[\bar{\sigma}(R_I(x)),\ [R_I(y),\ R_I(z)]] + [\bar{\sigma}(R_I(y)),\ [R_I(z), R_I(x)]] + [\bar{\sigma}(R_I(z)),\ [R_I(x),\ R_I(y)]] =$$

$$R_I([\sigma(x),\ [y,\ z]] + [\sigma(y),\ [z,\ x]] + [\sigma(z),\ [x,\ y]]) = R_I(0)$$

故 $\overline{L}$ 是一个 Hom-李代数.

定理 11 中的 Hom-李代数 $\overline{L}$ 称为 Hom-李代数 L 关于同余 R_I 的商代数，记为 L/R_I，即 $\overline{L} = L/R_I$.

设 $f: L_1 \longrightarrow L_2$ 是 Hom-李代数同态，则 $\operatorname{Ker} f$ 是 L_1 的理想，$R_{\operatorname{Ker} f}$ 是 L_1 上的同余关系，有如下结论成立：

定理 12 设 $f: L_1 \longrightarrow L_2$ 是 Hom-李代数同态，则 $L_1/R_{\operatorname{Ker} f}$ 与 $\operatorname{Im} f$ 同构.

证 定义 $\phi: L_1/R_{\operatorname{Ker} f} \longrightarrow \operatorname{Im} f$，$\phi(R_{\operatorname{Ker} f}(x)) = f(x)$，$\forall R_{\operatorname{Ker} f}(x) \in L_1/R_{\operatorname{Ker} f}$.

首先证明 ϕ 是一个映射. 若 $R_{\operatorname{Ker} f}(x) = R_{\operatorname{Ker} f}(y)$，有 $x + \operatorname{Ker} f = y + \operatorname{Ker} f$，即 $x - y \in \operatorname{Ker} f$，得到 $f(x) = f(y)$，即 ϕ 是一个映射.

其次证明 ϕ 是同态. 对任意 $R_{\operatorname{Ker} f}(x), R_{\operatorname{Ker} f}(y) \in L_1/R_{\operatorname{Ker} f}$，有

$$\begin{aligned}\phi(R_{\operatorname{Ker} f}(x) + R_{\operatorname{Ker} f}(y)) = &\phi(R_{\operatorname{Ker} f}(x + y)) = f(x + y) = \\ &f(x) + f(y) = \phi(R_{\operatorname{Ker} f}(x)) + \phi(R_{\operatorname{Ker} f}(y))\end{aligned}$$

同理可证 ϕ 保持数量乘法和方括号运算.

再次证明 $\phi \circ \bar{\sigma} = \sigma_2 \circ \phi$. 对任意 $R_{\operatorname{Ker} f}(x) \in L_1/R_{\operatorname{Ker} f}$，有

$$\phi \circ \bar{\sigma}(R_{\operatorname{Ker} f}(x)) = \phi \circ R_{\operatorname{Ker} f}(\sigma_1(x)) = f \circ \sigma_1(x)$$

由于 f 是 Hom-李代数同态，满足 $f \circ \sigma_1 = \sigma_2 \circ f$，则有

$$\phi \circ \bar{\sigma}(R_{\operatorname{Ker} f}(x)) = f \circ \sigma_1(x) = \sigma_2 \circ f(x) = \sigma_2 \circ \phi(R_{\operatorname{Ker} f}(x))$$

即 $\phi \circ \bar{\sigma} = \sigma_2 \circ \phi$ 成立.

最后证明 ϕ 是双射. 对任意 $f(x) \in \operatorname{Im} f$(这里 $x \in L_1$)，有 $R_{\operatorname{Ker} f}(x) \in L_1/R_{\operatorname{Ker} f}$，满足 $\phi(R_{\operatorname{Ker} f}(x)) = f(x)$，即 ϕ 是满射. 对任意 $R_{\operatorname{Ker} f}(x), R_{\operatorname{Ker} f}(y) \in L_1/R_{\operatorname{Ker} f}$，若 $f(x) = f(y)$，则有 $f(x-y) = f(x) - f(y) = 0$，得到 $x - y \in \operatorname{Ker} f$，进而可以得到 $R_{\operatorname{Ker} f}(x) = R_{\operatorname{Ker} f}(y)$，即 ϕ 是单射.

因此，ϕ 是 $L_1/R_{\operatorname{Ker} f}$ 到 $\operatorname{Im} f$ 的同构映射，$L_1/R_{\operatorname{Ker} f}$ 与 $\operatorname{Im} f$ 同构.

定理 13 设 I 为 Hom-李代数 L 的理想，若 M 是 L 的粗子代数，则 $\overline{R}_I(M)/R_I$ 和 $\underline{R}_I(M)/R_I$ 是 L/R_I 的子代数.

证 因为 M 是 L 的粗子代数，则 $\overline{R}_I(M), \underline{R}_I(M)$ 是 L 的子代数.

对任意 $R_I(x), R_I(y) \in \overline{R}_I(M)/R_I$，有

$$R_I(x) + R_I(y) = R_I(x + y) \in \overline{R}_I(M)/R_I$$

$$rR_I(x) = R_I(rx) \in \overline{R}_I(M)/R_I$$

$$[R_I(x), R_I(y)] = R_I([x, y]) \in \overline{R}_I(M)/R_I$$

又因为 $\bar{\sigma}(R_I(x)) = R_I(\sigma(x)) \in \overline{R}_I(M)/R_I$，故 $\overline{R}_I(M)/R_I$ 是 L/R_I 的子代数. 同理可证 $\underline{R}_I(M)/R_I$ 是 L/R_I 的子代数.

定理 14 设 I 为 Hom-李代数 L 的理想，若 J 是 L 的粗理想，则 $\overline{R}_I(J)/R_I$ 和 $\underline{R}_I(J)/R_I$ 是 L/R_I 的理想.

与定理 13 的证明过程类似，过程略.

由定理 14 知，$\overline{R}_I(J)/R_I$ 是 L/R_I 的理想，记 $\overline{R}_I(J)/R_I = I'$.

定理 15 设 I 为 Hom-李代数 L 的理想，J 是 L 的上粗理想，则 $(L/R_I)/R_{I'}$ 与 L/R_{I+J} 同构.

证 由于 J 是 L 的上粗理想，则 $\overline{R}_I(J) = I + J$ 是 L 的理想，故 R_{I+J} 是 L 上一个同余.

定义 $\phi: L/R_I \longrightarrow L/R_{I+J}$，$\phi(R_I(x)) = R_{I+J}(x)$，$\forall R_I(x) \in L/R_I$.

容易验证 ϕ 是一个满射，即 $\operatorname{Im} \phi = L/R_{I+J}$. 设 π_1, π_2 分别是 L 到 $L/R_I, L/R_{I+J}$ 的映射，即 $\pi_1(x) = R_I(x)$，$\pi_2(x) = R_{I+J}(x)$，容易证明 π_1, π_2 是满同态. 对任意 $x \in L$，有

$$\phi\pi_1(x) = \phi(R_I(x)) = R_{I+J}(x) = \pi_2(x)$$

也就得到 $\phi\pi_1 = \pi_2$.

对任意 $R_I(x) \in \overline{R}_I(J)/R_I(x \in \overline{R}_I(J))$，有

$$\phi(R_I(x)) = R_{I+J}(x) = x + I + J = I + J$$

即 $R_I(x) \in \operatorname{Ker} \phi$，得到 $\overline{R}_I(J)/R_I \subseteq \operatorname{Ker} \phi$. 由于 π_1 是满同态，对任意 $\pi_1(x) = R_I(x) \in \operatorname{Ker} \phi$，有 $R_{I+J}(x) = \pi_2(x) = \phi(\pi_1(x)) = I + J$，即 $x \in I + J = \overline{R}_I(J)$，得到 $R_I(x) \in \overline{R}_I(J)/R_I$，也就是有 $\operatorname{Ker} \phi \subseteq \overline{R}_I(J)/R_I$.

因而有 $\mathrm{Ker}\ \phi=\overline{R}_I(J)/R_I=I'$.

对任意 $\pi_1(x),\pi_1(y)\in L/R_I(x,y\in L)$，有

$$\phi([\pi_1(x),\ \pi_1(y)])=\phi\pi_1([x,\ y])=\pi_2([x,\ y])=[\pi_2(x),\ \pi_2(y)]=[\phi\pi_1(x),\ \phi\pi_1(y)]$$

得到 ϕ 是一个同态. 由定理 12 可以得到$(L/R_I)/R_{I'}$ 与 L/R_{I+J} 同构.

3　结束语

本文定义了 Hom-李代数上基于理想的同余关系，给出了同余类的表示形式和运算性质，讨论了 Hom-李代数的粗子代数、粗理想和商代数等粗糙代数结构. 把粗糙集的思想应用到代数理论中研究代数上的粗糙集性质，具有一定的研究意义.

参考文献：

[1] HARTWIG J T, LARSSON D, SILVESTROV S D. Deformations of Lie Algebras Using σ-Derivations [J]. Journal of Algebra, 2006, 295(1): 314-361.

[2] HU N H. q-Witt Algebras, q-Lie Algebras, q-Holomorph Structure and Representations [J]. Algebra Colloquium, 1999, 6(1): 51-70.

[3] SHENG Y H. Representations of Hom-Lie Algebras [J]. Algebra and Represent Theory, 2012, 15(6): 1081-1098.

[4] JIN Q Q, LI X C. Hom-Lie Algebra Structures on Semi-simple Lie Algebras [J]. Journal of Algebra, 2008, 319(4): 1398-1408.

[5] PAWLAK Z. Rough Sets [J]. International Journal of Computer and Information Sciences, 1982, 11(5): 341-356.

[6] KUROKI N. Rough Ideals in Semigroups [J]. Information Sciences, 1997, 100(1/2/3/4): 139-163.

[7] DAVVAZ B. Roughness in Rings [J]. Information Sciences, 2004, 164(1/2/3/4): 147-163.

[8] XIAO Q M, LI Q G, GUO L K. Rough Sets Induced by Ideals in Lattices [J]. Information Sciences, 2014, 271(2): 82-92.

[9] LIU W J. Rough Linear Space [J]. 模糊系统与数学, 2007, 21(4): 137-143.

[10] 于晓丹，孔祥智. Vague 软 Clifford 半群 [J]. 西南大学学报(自然科学版), 2020, 42(6): 46-53.

[11] 张前滔，赵　平，罗永贵. 半群 $\mathrm{TOP}_n(k)$的格林(星)关系及富足性 [J]. 西南师范大学学报(自然科学版), 2020, 45(6): 9-15.

[12] 黄　昱，廖祖华. 新型反软亚 BCI-代数 [J]. 西南大学学报(自然科学版), 2020, 42(6): 38-45.

[13] 李小朝，别　潇. 结合代数上的粗糙集 [J]. 模糊系统与数学, 2020, 34(1): 157-162.

责任编辑　廖　坤