第 46 卷　第 10 期　　西南师范大学学报（自然科学版）　　2021 年 10 月
Vol. 46　No. 10　Journal of Southwest China Normal University (Natural Science Edition)　Oct.　2021

DOI：10.13718/j.cnki.xsxb.2021.10.004

一个特殊矩阵的两类逆问题①

雷英杰，　吉雁斐，　郭雪娟

中北大学 理学院，太原 030051

摘要：研究了一个特殊矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的两类逆问题，其中矩阵 $\boldsymbol{A}$ 是由图为扫帚形的矩阵推广而来的．问题 1 利用箭形矩阵和 Jacobi 矩阵的相关性质，将求解此类矩阵的逆特征值问题转换为求解线性方程组问题，最后得到了该问题有唯一解的充分必要条件．问题 2 将该矩阵的每个顺序主子式的最小和最大特征值作为其特征数据，利用矩阵顺序主子式之间的递推关系来解决．两个问题最后均给出了解的表达式以及数值模拟实例，验证了结果的准确性，推广了箭形矩阵和 Jacobi 矩阵的逆特征值问题．

关　键　词：箭形矩阵；Jacobi 矩阵；逆特征值问题；顺序主子式；最大特征值；最小特征值

中图分类号：O157　　　**文献标志码**：A　　　**文章编号**：1000－5471(2021)10－0016－10

Two Types of Inverse Problems for a Special Matrix

LEI Yingjie，　JI Yanfei，　GUO Xuejuan

School of Science，North University of China，Taiyuan 030051，China

Abstract：In this paper，two kinds of inverse problems have been studied of a special matrix $\boldsymbol{A}$，where the matrix $\boldsymbol{A}$ is generalized from a matrix whose graph is a broom. The first problem is related to the usage of the related properties of the arrow matrix and the Jacobi matrix to convert the problem of solving the inverse eigenvalue of this type of matrix into the problem of solving a system of linear equations，and finally，the sufficient and necessary conditions for the problem to have a unique solution are obtained. The second problem is related to the minimum and maximum eigenvalues of each sequential principal minors of the matrix as its eigen data and we use the recurrence relations among sequential principal minors to solve it. At the end of the two questions，the understood expressions and numerical simulation examples are given to verify the accuracy of the results，and the inverse eigenvalue problems of the arrow matrix and the Jacobi matrix are generalized.

Key words：arrow matrix；Jacobi matrix；inverse eigenvalue problem；sequential principal minors；maximal eigenvalue；minimal eigenvalue

矩阵的特征值问题是求取一个矩阵的特征值和特征向量．文献[1]对矩阵的特征值、特征向量以及特征对进行了定义．文献[2]提出了特征值问题的高精度数值算法．文献[3]定义了矩阵的最小特征值．从一组规定的特征数据重构特殊结构的矩阵的问题统称为逆特征值问题．逆特征值问题的难度等级取决于要重

① 收稿日期：2021－01－26
基金项目：国家自然科学基金项目(12071444)．

作者简介：雷英杰，副教授，硕士生导师，主要从事组合矩阵理论、图论及其在相关学科中的应用．

构的矩阵的结构以及可用的特征信息的类型．文献[4]详细描述了各种逆特征值问题．文献[5]研究了一些特殊类型(如对角矩阵、Jacobi 矩阵和箭形矩阵)的逆特征值问题．文献[6-9]研究了一些由特殊图描述构建的矩阵的逆特征值问题，特别地，文献[6-7]研究了图为路的非循环矩阵和图为扫帚的矩阵．文献[10-13]研究了机械振动、控制理论、极点分配和图论等各种领域中矩阵的逆特征值问题．文献[10]从力学角度详细阐述了振动中的一些逆特征值问题，其中弹簧质量系统等振动结构参数识别问题往往可以归结为 Jacobi 矩阵的逆特征值问题，星形弹簧质量系统的振动问题则归结为箭形矩阵的逆特征值问题．文献[14-16]分别研究了箭形矩阵、Jacobi 矩阵以及由箭形矩阵和 Jacobi 矩阵构成的特殊矩阵的逆特征值问题．

1　特殊矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的构造

文献[9]研究了图为路的矩阵和图为扫帚的矩阵，其中图为路 $\boldsymbol{P}_n$ 的矩阵 $\boldsymbol{A}_n$ 是对角线为非零元素的三对角矩阵，图为扫帚 $\boldsymbol{B}_{n+m}$ 的矩阵 $\boldsymbol{A}_{n+m}$ 是三对角矩阵和箭形矩阵的组合，矩阵 $\boldsymbol{A}_n$ 和 $\boldsymbol{A}_{n+m}$ 形式分别为

$$\boldsymbol{A}_n=\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ b_1 & a_2 & b_2 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & b_2 & a_3 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{n-1} & b_{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & b_{n-1} & a_n \end{pmatrix}_{n\times n}$$

$$\boldsymbol{A}_{n+m}=\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ b_1 & a_2 & b_2 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & b_2 & a_3 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{n-1} & b_{n-1} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & b_{n-1} & a_n & b_n & b_{n+1} & \cdots & b_{n+m-1} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & b_n & a_{n+1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & b_{n+1} & 0 & a_{n+2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & b_{n+m-1} & 0 & 0 & \cdots & a_{n+m} \end{pmatrix}_{(n+m)\times(n+m)}$$

它们的图分别如图 1(a)、图 1(b) 所示．

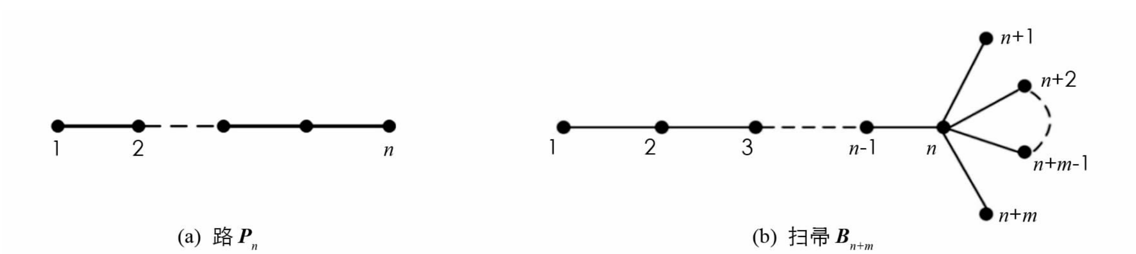

图 1　路 $\boldsymbol{P}_n$ 和扫帚 $\boldsymbol{B}_{n+m}$

因此，可推广出如图 2 所示的矩阵 $\boldsymbol{A}$.

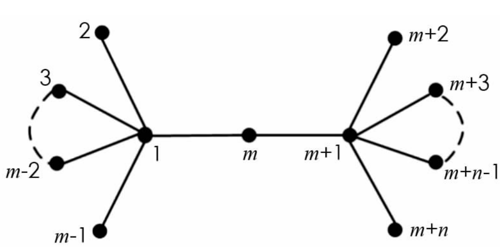

图 2　矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的图

矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的形式为

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & b_2 & \cdots & b_{m-2} & b_{m-1} & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ b_1 & a_2 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ b_2 & 0 & a_3 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{m-2} & 0 & 0 & \cdots & a_{m-1} & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ b_{m-1} & 0 & 0 & \cdots & 0 & a_m & b_m & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & b_m & a_{m+1} & b_{m+1} & b_{m+2} & \cdots & b_{m+n-1} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & b_{m+1} & a_{m+2} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & b_{m+2} & 0 & a_{m+3} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & b_{m+n-1} & 0 & 0 & \cdots & a_{m+n} \end{pmatrix}_{(m+n)\times(m+n)} \tag{1}$$

其中，$a_i(i=2,\cdots,m,m+2,\cdots,m+n)$ 互不相同，$b_i(i=1,\cdots,m+n-1)$ 不为0，且 $b_m>0$，当 $m=0$ 或 $n=0$ 时，形如(1)式的矩阵 $\boldsymbol{A}$ 为箭形矩阵，$\boldsymbol{A}_{m,m+2}$ 为 Jacobi 矩阵.

特殊矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的两类逆问题为：

问题1 给出3个非零互异实数 λ_1,λ_2,μ，3个非零实向量 $\boldsymbol{x}_1=(x_1,\cdots,x_m)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{x}_2=(x_m,\cdots,x_{m+n})^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{y}=(y_1,\cdots,y_{m+n})^{\mathrm{T}}$. 求具有形如(1)式的 $m+n$ 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 使得 $(\lambda_1,\boldsymbol{x}_1)$，$(\lambda_2,\boldsymbol{x}_2)$，$(\mu,\boldsymbol{y})$ 分别是 $\boldsymbol{A}_{1,m}$，$\boldsymbol{A}_{m,m+n}$ 和 $\boldsymbol{A}$ 的特征对. 其中 $\boldsymbol{A}_{1,m}$，$\boldsymbol{A}_{m,m+n}$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的主子式，分别有以下形式：

$$\boldsymbol{A}_{1,m}=\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & b_2 & \cdots & b_{m-2} & b_{m-1} \\ b_1 & a_2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ b_2 & 0 & a_3 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ b_{m-2} & 0 & 0 & \cdots & a_{m-1} & 0 \\ b_{m-1} & 0 & 0 & \cdots & 0 & a_m \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{A}_{m,m+n}=\begin{pmatrix} a_m & b_m & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ b_m & a_{m+1} & b_{m+1} & b_{m+2} & \cdots & b_{m+n-1} \\ 0 & b_{m+1} & a_{m+2} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & b_{m+2} & 0 & a_{m+3} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & b_{m+n-1} & 0 & 0 & \cdots & a_{m+n} \end{pmatrix}$$

可知 $\boldsymbol{A}_{1,m}$，$\boldsymbol{A}_{m+1,m+n}$ 均为箭形矩阵，$\boldsymbol{A}_{m,m+2}$ 为 Jacobi 矩阵.

问题2 给定 $2m+2n-1$ 个实数 $\lambda_1^{(j)}(j=1,\cdots,m+n)$ 和 $\lambda_j^{(j)}(j=2,\cdots,m+n)$，讨论在什么条件下可以构造出具有形如(1)式的 $m+n$ 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$，使得 $\lambda_1^{(j)}$ 和 $\lambda_j^{(j)}$ 分别为 $\boldsymbol{A}_j(j=1,\cdots,m+n)$ 的最小、最大特征值.

2 预备知识

现作如下约定：

$$D_m=x_m y_{m+1}-y_m x_{m+1} \qquad d_i=x_i y_i(i=1,2,\cdots,m+n)$$

$$x_{m+1}y_{m+1}=-x_m y_m \qquad \omega=x_1 x_m y_{m+1}-x_1 x_{m+1} y_m+x_m x_{m+1} y_1$$

$$E_i=\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_i & y_i \end{vmatrix}(i=1,2,\cdots,m+n-1) \qquad M_i=\begin{vmatrix} x_{m+1} & y_{m+1} \\ x_i & y_i \end{vmatrix}(i=m+2,\cdots,m+n)$$

$$A_j = \lambda_1^{(m+j)} P_{m+j-1}(\lambda_1^{(m+j)}) P_m(\lambda_{m+j}^{(m+j)}) \prod_{i=2}^{j-1} (\lambda_{m+j}^{(m+j)} - a_{m+i}) \tag{2}$$

$$B_j = \lambda_{m+j}^{(m+j)} P_{m+j-1}(\lambda_{m+j}^{(m+j)}) P_m(\lambda_1^{(m+j)}) \prod_{i=2}^{j-1} (\lambda_1^{(m+j)} - a_{m+i}) \tag{3}$$

引理 1　对给定的具有形如(1)式的矩阵 $\boldsymbol{A}$，其特征多项式序列$\{P_j(\lambda) = \det(\lambda \boldsymbol{I}_j - \boldsymbol{A}_j)\}_{j=1}^{m+n}$满足下列递推关系：

$$\begin{cases} P_1(\lambda) = (\lambda - a_1) \\ P_2(\lambda) = (\lambda - a_2) P_1(\lambda) - b_1^2 \\ P_j(\lambda) = (\lambda - a_j) P_{j-1}(\lambda) - b_{j-1}^2 \prod\limits_{i=2}^{j-1} (\lambda - a_i) & j = 3, \cdots, m \\ P_j(\lambda) = (\lambda - a_j) P_{j-1}(\lambda) - b_{j-1}^2 P_{j-2}(\lambda) & j = m+1, m+2 \\ P_{m+j}(\lambda) = (\lambda - a_{m+j}) P_{m+j-1}(\lambda) - b_{m+j-1}^2 P_m(\lambda) \prod\limits_{i=2}^{j-1} (\lambda - a_{m+i}) & j = 3, \cdots, n \end{cases}$$

其中，$P_0(\lambda) = 1$，$b_0 = 0$.

引理 2[16]　若 $a_i (i = 2, \cdots, m)$ 互不相同，$\boldsymbol{A}_j (j = 1, 2, \cdots, m)$ 的特征值为 $\lambda_1^{(j)} \leqslant \lambda_2^{(j)} \leqslant \cdots \leqslant \lambda_j^{(j)}$，则 $\lambda_i^{(j)} (i = 1, 2, \cdots, j)$ 为互不相同的实数，且 $\lambda_1^{(j)} < a_2 < \lambda_2^{(j)} < \cdots < \lambda_{j-1}^{(j)} < a_j < \lambda_j^{(j)}$.

引理 3[16]　若 $a_i (i = 2, 3, \cdots, m)$ 互不相同，则相邻的两个特征多项式 $P_{j-1}(\lambda), P_j(\lambda) (j = 1, 2, \cdots, n)$ 不能同时为 0.

引理 4[16]　设 $\boldsymbol{A}_{j-1}$ 的特征值为 $\lambda_1^{(j-1)}, \lambda_2^{(j-1)}, \cdots, \lambda_{j-1}^{(j-1)}$，$\boldsymbol{A}_j$ 的特征值为 $\lambda_1^{(j)}, \lambda_2^{(j)}, \cdots, \lambda_j^{(j)}$，则 $\lambda_1^{(j)} < \lambda_1^{(j-1)} < \lambda_2^{(j)} < \lambda_2^{(j-1)} < \cdots < \lambda_{j-1}^{(j)} < \lambda_{j-1}^{(j-1)} < \lambda_j^{(j)}$，即 $\boldsymbol{A}_{j-1}$ 的特征值与 $\boldsymbol{A}_j$ 的特征值是严格隔离的.

引理 5[6]　对 $j = 1, 2, \cdots, m+n$，若 $\lambda_1^{(j)}, \lambda_j^{(j)}$ 分别为 $\boldsymbol{A}_j$ 的最小、最大特征值，则：

(i) 若 $\mu < \lambda_1^{(j)}$，则 $(-1)^j P_j(\mu) > 0$；

(ii) 若 $\mu > \lambda_j^{(j)}$，则 $P_j(\mu) > 0$.

3　主要结果

3.1　问题 1 有唯一解的充分必要条件

定理 1　问题 1 有唯一解的充分必要条件是：

(i) $\begin{cases} E_i \neq 0 & i = 2, \cdots, m-1 \\ M_i \neq 0 & i = m+2, \cdots, m+n; \\ \omega \neq 0 \end{cases}$

(ii) $\begin{cases} (\lambda_1 - \mu) \sum\limits_{i=1}^{m} x_i y_i + b_m x_m y_{m+1} = 0 \\ (\lambda_2 - \mu) \sum\limits_{i=m+1}^{m+n-1} x_{i+1} y_{i+1} + b_{m-1} x_m y_1 = 0 \end{cases}$；

(iii) $b_m = \dfrac{[-(\lambda_1 - \lambda_2) x_m y_1 + (\mu - \lambda_2) x_1 y_m] x_m}{\omega} > 0$.

证　充分性　因为$(\lambda_1, \boldsymbol{x}_1), (\lambda_2, \boldsymbol{x}_2), (\mu, \boldsymbol{y})$分别是 $\boldsymbol{A}_{1,m}, \boldsymbol{A}_{m,m+n}$ 和 $\boldsymbol{A}$ 的特征对，所以有

$$\boldsymbol{A}_{1,m} \boldsymbol{x}_1 = \lambda_1 \boldsymbol{x}_1 \qquad \boldsymbol{A}_{m,m+n} \boldsymbol{x}_2 = \lambda_2 \boldsymbol{x}_2 \qquad \boldsymbol{A} \boldsymbol{y} = \mu \boldsymbol{y}$$

当 $i = 2, \cdots, m-1$ 时，由 $\boldsymbol{A}_{1,m} \boldsymbol{x}_1 = \lambda_1 \boldsymbol{x}_1$，$\boldsymbol{A} \boldsymbol{y} = \mu \boldsymbol{y}$ 得线性方程组

$$\begin{cases} b_{i-1} x_1 + a_i x_i = \lambda_1 x_i \\ b_{i-1} y_1 + a_i y_i = \lambda_1 y_i \end{cases} \quad i = 2, \cdots, m-1 \tag{4}$$

由条件(i)$E_i \neq 0(i=2,\cdots,m-1)$ 知 a_i, b_{i-1} 有唯一解：

$$b_{i-1}=\frac{(\lambda_1-\mu)d_i}{E_i} \qquad a_i=\begin{cases}\dfrac{\lambda_1 x_i-b_{i-1}x_1}{x_i} & x_i\neq 0\\[2ex] \dfrac{\mu y_i-b_{i-1}y_1}{y_i} & y_i\neq 0\end{cases} \tag{5}$$

下证(5)式中 a_i 的两个表达式等价. 由 b_{i-1} 的表达式得

$$\frac{\lambda_1 x_i-b_{i-1}x_1}{x_i}-\frac{\mu y_i-b_{i-1}y_1}{y_i}=\frac{\lambda_1 x_i y_i-b_{i-1}x_1 y_i-\mu y_i x_i+b_{i-1}y_1 x_i}{x_i y_i}=$$
$$\frac{(\lambda_1-\mu)x_i y_i-b_{i-1}(x_1 y_i-y_1 x_i)}{x_i y_i}=\frac{(\lambda_1-\mu)d_i-(\lambda_1-\mu)d_i}{x_i y_i}=0$$

所以(5)式中 a_i 的两个表达式等价得证.

当 $i=m$ 时，由 $\boldsymbol{A}_{1,m}\boldsymbol{x}_1=\lambda_1\boldsymbol{x}_1$，$\boldsymbol{Ay}=\mu\boldsymbol{y}$，$\boldsymbol{A}_{m,m+n}\boldsymbol{x}_2=\lambda_2\boldsymbol{x}_2$ 解得

$$\begin{cases}b_{m-1}=\dfrac{[(\lambda_1-\lambda_2)x_m y_{m+1}+(\mu-\lambda_1)x_{m+1}y_m]x_m}{\omega}\\[2ex] b_m=\dfrac{[-(\lambda_1-\lambda_2)x_m y_1+(\mu-\lambda_2)x_1 y_m]x_m}{\omega}\\[2ex] a_m=\dfrac{\lambda_1 x_m x_{m+1}y_1+\lambda_2 x_1 x_m y_{m+1}-\mu x_1 x_{m+1}y_m}{\omega}\end{cases} \tag{6}$$

其中 $\omega=x_1 x_m y_{m+1}-x_1 x_{m+1}y_m+x_m y_{m+1}y_1$ 且 $\omega\neq 0$.

当 $i=1$ 时，由 $\boldsymbol{A}_{1,m}\boldsymbol{x}_1=\lambda_1\boldsymbol{x}_1$，$\boldsymbol{Ay}=\mu\boldsymbol{y}$ 解得

$$a_1=\begin{cases}\dfrac{\lambda_1 x_1-\sum\limits_{i=1}^{m-1}b_i x_{i+1}}{x_1} & x_1\neq 0\\[3ex] \dfrac{\mu y_1-\sum\limits_{i=1}^{m-1}b_i y_{i+1}}{y_1} & y_1\neq 0\end{cases} \tag{7}$$

下证 a_1 的两个表达式等价. 利用条件(ii)中 $(\lambda_1-\mu)\sum\limits_{i=1}^{m}x_i y_i+b_m x_m y_{m+1}=0$ 得

$$(\lambda_1-\mu)\sum_{i=1}^{m}x_i y_i+b_m x_m y_{m+1}=0\Rightarrow(\lambda_1-\mu)\sum_{i=1}^{m-1}x_i y_i+b_{m-1}E_m=0\Rightarrow(\lambda_1-\mu)d_1+\sum_{i=1}^{m-1}b_i E_{i+1}=0$$

即 $\lambda_1 x_1 y_1-\sum\limits_{i=1}^{m-1}b_i x_{i+1}y_1=\mu y_1 x_1-\sum\limits_{i=1}^{m-1}b_i y_{i+1}x_1$，两边同时除以 $x_1 y_1$，得证 a_1 的两个表达式等价.

当 $i=m+2,\cdots,m+n$ 时，由 $\boldsymbol{A}_{m,m+n}\boldsymbol{x}_2=\lambda_2\boldsymbol{x}_2$，$\boldsymbol{Ay}=\mu\boldsymbol{y}$ 解得

$$b_{i-1}=\frac{(\lambda_2-\mu)d_i}{M_i} \qquad a_i=\begin{cases}\dfrac{\lambda_2 x_i-b_{i-1}x_{m+1}}{x_i} & x_i\neq 0\\[2ex] \dfrac{\mu y_i-b_{i-1}y_{m+1}}{y_i} & y_i\neq 0\end{cases} \tag{8}$$

其中 $M_i\neq 0$. 此处 a_i 的两个表达式等价证明同(5)式.

当 $i=m+1$ 时，由 $\boldsymbol{A}_{m,m+n}\boldsymbol{x}_2=\lambda_2\boldsymbol{x}_2$，$\boldsymbol{Ay}=\mu\boldsymbol{y}$ 解得

$$a_{m+1}=\begin{cases}\dfrac{\lambda_2 x_{m+1}-b_m x_m-\sum\limits_{i=m+1}^{m+n-1}b_i x_{i+1}}{x_{m+1}} & x_{m+1}\neq 0\\[3ex] \dfrac{\mu y_{m+1}-b_m y_m-\sum\limits_{i=m+1}^{m+n-1}b_i y_{i+1}}{y_{m+1}} & y_{m+1}\neq 0\end{cases} \tag{9}$$

下证 a_{m+1} 的两个表达式等价．利用条件(ii) 中$(\lambda_2-\mu)\sum_{i=m+1}^{m+n-1}x_{i+1}y_{i+1}+b_{m-1}x_my_1=0$ 得

$$(\lambda_2-\mu)\sum_{i=m+1}^{m+n-1}x_{i+1}y_{i+1}+b_{m-1}x_my_1=0\Rightarrow(\lambda_2-\mu)\sum_{i=m}^{m+n-1}x_{i+1}y_{i+1}-b_mD_m=0$$

则有

$$(\lambda_2-\mu)d_{m+1}+\sum_{i=m+1}^{m+n-1}b_iM_{i+1}-b_mD_m=0$$

即 $\lambda_2x_{m+1}-b_mx_m-\sum_{i=m+1}^{m+n-1}b_ix_{i+1}=\mu y_{m+1}-b_my_m-\sum_{i=m+1}^{m+n-1}b_iy_{i+1}$，两边同时除以 $x_{m+1}y_{m+1}$，a_{m+1}，表达式等价得证.

由条件(i) 和(ii) 可知，a_i，b_{i-1} 是问题 1 的唯一解，且给出解的表达式(5)，(6)，(7)，(8)，(9)，充分性得证.

必要性　若问题 1 有唯一解，则线性方程组(4) 有唯一解，则可推出条件(i) 成立．又因矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的顺序主子式 $\boldsymbol{A}_{m,m+2}$ 为 Jacobi 矩阵，若问题 1 有解，则条件(iii) 成立．下证条件(ii) 成立.

若问题 1 有解，则要满足 $\boldsymbol{A}_{1,m}\boldsymbol{x}_1=\lambda_1\boldsymbol{x}_1$，$\boldsymbol{A}\boldsymbol{y}=\mu\boldsymbol{y}$，通过计算得$(\lambda_1-\mu)\sum_{i=1}^{m}x_iy_i=-b_mx_my_{m+1}$，条件(ii) 中$(\lambda_1-\mu)\sum_{i=1}^{m}x_iy_i+b_mx_my_{m+1}=0$ 得证.

若问题 1 有解还需同时满足 $\boldsymbol{A}_{m,n}\boldsymbol{x}_2=\lambda_2\boldsymbol{x}_2$，$\boldsymbol{A}\boldsymbol{y}=\mu\boldsymbol{y}$，同理可证条件(ii) 中$(\lambda_2-\mu)\sum_{i=m+1}^{m+n-1}x_{i+1}y_{i+1}+b_{m-1}x_my_1=0$. 因此必要性得证.

3.2　问题 2 有唯一解的充分必要条件

定理 2　给定 $2n+2m-1$ 个实数 $\lambda_1^{(j)}(j=1,2,\cdots,m+n)$ 和 $\lambda_j^{(j)}(j=2,\cdots,m+n)$，存在唯一的 $\boldsymbol{A}$，使得 $\lambda_1^{(j)}$ 和 $\lambda_j^{(j)}$ 分别为 $\boldsymbol{A}_j(j=1,\cdots,m+n)$ 的最小、最大特征值的充分必要条件为：

$$\lambda_1^{(m+n)}<\lambda_1^{(m+n-1)}<\cdots<\lambda_1^{(2)}<\lambda_1^{(1)}<\lambda_2^{(2)}<\cdots<\lambda_{m+n-1}^{(m+n-1)}<\lambda_{m+n}^{(m+n)}$$

证　充分性　每个对角元素 a_i 也是 $\boldsymbol{A}$ 的 1×1 主子矩阵，因此 $\lambda_1^{(j)}\leqslant a_i\leqslant\lambda_j^{(j)}(1\leqslant i\leqslant j)$，所以 $\lambda_1^{(j)}$ 和 $\lambda_j^{(j)}$ 分别是 $\boldsymbol{A}_j$ 的最小、最大特征值，则问题 2 有解等价于求解 $P_j(\lambda_1^{(j)})=0$，$P_j(\lambda_j^{(j)})=0$，存在解 a_j，b_{j-1}^2，且 $b_{j-1}^2>0(j=1,2,\cdots,m+n)$．下面用引理 1 的递推关系解决该问题.

当 $j=1$ 时，$P_1(\lambda_1^{(1)})=0$，即 $\lambda_1^{(1)}-a_1=0$，则有 $a_1=\lambda_1^{(1)}$.

当 $j=2$ 时，由 $P_2(\lambda_1^{(2)})=0$，$P_2(\lambda_2^{(2)})=0$ 得

$$\begin{cases}(\lambda_1^{(2)}-a_2)P_1(\lambda_1^{(2)})-b_1^2=0\\(\lambda_2^{(2)}-a_2)P_1(\lambda_2^{(2)})-b_1^2=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a_2P_1(\lambda_1^{(2)})+b_1^2=\lambda_1^{(2)}P_1(\lambda_1^{(2)})\\a_2P_1(\lambda_2^{(2)})+b_1^2=\lambda_2^{(2)}P_1(\lambda_2^{(2)})\end{cases}$$

令 D_2 表示此方程组中 a_2 和 b_1^2 的系数矩阵的行列式，则 $D_2=P_1(\lambda_1^{(2)})-P_1(\lambda_2^{(2)})$，因此得

$$a_2=\frac{\lambda_1^{(2)}P_1(\lambda_1^{(2)})-\lambda_2^{(2)}P_1(\lambda_2^{(2)})}{D_2}\qquad b_1^2=\frac{(\lambda_2^{(2)}-\lambda_1^{(2)})P_1(\lambda_1^{(2)})P_1(\lambda_2^{(2)})}{D_2}\tag{10}$$

当 $j=3,\cdots,m$ 时，由 $P_j(\lambda_1^{(j)})=0$，$P_j(\lambda_j^{(j)})=0$ 得 a_j 和 b_{j-1}^2 的线性方程组为

$$\begin{cases}(\lambda_1^{(j)}-a_j)P_{j-1}(\lambda_1^{(j)})-b_{j-1}^2\prod_{i=2}^{j-1}(\lambda_1^{(j)}-a_i)=0\\(\lambda_j^{(j)}-a_j)P_{j-1}(\lambda_j^{(j)})-b_{j-1}^2\prod_{i=2}^{j-1}(\lambda_j^{(j)}-a_i)=0\end{cases}\tag{11}$$

$D_j=P_{j-1}(\lambda_1^{(j)})\prod_{i=2}^{j-1}(\lambda_j^{(j)}-a_i)-P_{j-1}(\lambda_j^{(j)})\prod_{i=2}^{j-1}(\lambda_1^{(j)}-a_i)$，由引理 5 知$(-1)^{j-1}P_{j-1}(\lambda_1^{(j)})>0$，$P_{j-1}(\lambda_j^{(j)})>0$.

由引理2知 $\prod_{i=2}^{j-1}(\lambda_j^{(j)}-a_i)>0$，$(-1)^{j-2}\prod_{i=2}^{j-1}(\lambda_1^{(j)}-a_i)>0$，故 $(-1)^{j-1}D_j>0$，则方程(11)存在唯一解 a_j, b_{j-1}^2，且

$$\begin{cases} a_j=\dfrac{\lambda_1^{(j)}P_{j-1}(\lambda_1^{(j)})\prod_{i=2}^{j-1}(\lambda_j^{(j)}-a_i)-\lambda_j^{(j)}P_{j-1}(\lambda_j^{(j)})\prod_{i=2}^{j-1}(\lambda_1^{(j)}-a_i)}{D_j} \\ b_{j-1}^2=\dfrac{(\lambda_j^{(j)}-\lambda_1^{(j)})P_{j-1}(\lambda_1^{(j)})P_{j-1}(\lambda_j^{(j)})}{D_j} \end{cases} \quad j=3,\cdots,m \tag{12}$$

当 $j=m+1$ 和 $j=m+2$ 时，由 $P_j(\lambda_1^{(j)})=0$，$P_j(\lambda_j^{(j)})=0$ 得 a_j 和 b_{j-1}^2 的线性方程组为

$$\begin{cases} (\lambda_1^{(j)}-a_j)P_{j-1}(\lambda_1^{(j)})-b_{j-1}^2P_{j-2}(\lambda_1^{(j)})=0 \\ (\lambda_j^{(j)}-a_j)P_{j-1}(\lambda_j^{(j)})-b_{j-1}^2P_{j-2}(\lambda_j^{(j)})=0 \end{cases} \tag{13}$$

$m_j=P_{j-1}(\lambda_1^{(j)})P_{j-2}(\lambda_j^{(j)})-P_{j-1}(\lambda_j^{(j)})P_{j-2}(\lambda_1^{(j)})$，由引理5得 $(-1)^{j-1}m_j>0$，则方程(13)存在唯一解 a_j, b_{j-1}^2，且

$$\begin{cases} a_j=\dfrac{\lambda_1^{(j)}P_{j-1}(\lambda_1^{(j)})P_{j-2}(\lambda_j^{(j)})-\lambda_j^{(j)}P_{j-1}(\lambda_j^{(j)})P_{j-2}(\lambda_1^{(j)})}{m_j} \\ b_{j-1}^2=\dfrac{(\lambda_j^{(j)}-\lambda_1^{(j)})P_{j-1}(\lambda_1^{(j)})P_{j-1}(\lambda_j^{(j)})}{m_j} \end{cases} \quad j=m+1,\ m+2 \tag{14}$$

当 $j=3,\cdots,n$ 时，λ_1^{m+j} 和 λ_{m+j}^{m+j} 分别为 $\boldsymbol{A}_{m+j}$ 的最小、最大特征值，则 $P_{m+j}(\lambda_1^{m+j})=0$，$P_{m+j}(\lambda_{m+j}^{m+j})=0$，即

$$\begin{cases} a_{m+j}P_{m+j-1}(\lambda_1^{(m+j)})+b_{m+j-1}^2P_m(\lambda_1^{(m+j)})\prod_{i=2}^{j-1}(\lambda_1^{(m+j)}-a_{m+i})=\lambda_1^{(m+j)}P_{m+j-1}(\lambda_1^{(m+j)}) \\ a_{m+j}P_{m+j-1}(\lambda_{m+j}^{(m+j)})+b_{m+j-1}^2P_m(\lambda_{m+j}^{(m+j)})\prod_{i=2}^{j-1}(\lambda_{m+j}^{(m+j)}-a_{m+i})=\lambda_{m+j}^{(m+j)}P_{m+j-1}(\lambda_{m+j}^{(m+j)}) \end{cases} \tag{15}$$

$$D_{m+j}=P_{m+j-1}(\lambda_1^{(m+j)})P_m(\lambda_{m+j}^{(m+j)})\prod_{i=2}^{j-1}(\lambda_{m+j}^{(m+j)}-a_{m+i})-P_{m+j-1}(\lambda_{m+j}^{(m+j)})P_m(\lambda_1^{(m+j)})\prod_{i=2}^{j-1}(\lambda_1^{(m+j)}-a_{m+i})$$

由柯西交错定理得

$$\lambda_1^{(m+j)}\leqslant\lambda_1^{(m+j-1)}\leqslant\cdots\leqslant\lambda_1^{(m+1)}\leqslant a_{m+i}\leqslant\lambda_{m+1}^{(m+1)}\leqslant\cdots\leqslant\lambda_{m+j-1}^{(m+j-1)}\leqslant\lambda_{m+j}^{(m+j)} \quad i=2,3,\cdots,n \tag{16}$$

因此 $\prod_{i=2}^{j-1}(\lambda_{m+j}^{(m+j)}-a_{m+i})\geqslant 0$ 且 $(-1)^{j-1}\prod_{i=2}^{j-1}(\lambda_1^{(m+j)}-a_{m+i})\geqslant 0$，则

$$\begin{aligned}(-1)^{m+j-1}D_{m+j}=&(-1)^{m+j-1}P_{m+j-1}(\lambda_1^{(m+j)})P_m(\lambda_{m+j}^{(m+j)})\prod_{i=2}^{j-1}(\lambda_{m+j}^{(m+j)}-a_{m+i})+\\&(-1)^{m+j-2}P_{m+j-1}(\lambda_{m+j}^{(m+j)})P_m(\lambda_1^{(m+j)})\prod_{i=2}^{j-1}(\lambda_1^{(m+j)}-a_{m+i})\end{aligned}$$

由引理5得 $(-1)^{m+j-1}D_{m+j}\geqslant 0(j=3,\cdots,n)$，因此若使 $D_{m+j}=0$，则有 $(-1)^{m+j-1}D_{m+j}=0$，即

$$\begin{cases} P_{m+j-1}(\lambda_1^{(m+j)})P_m(\lambda_{m+j}^{(m+j)})\prod_{i=2}^{j-1}(\lambda_{m+j}^{(m+j)}-a_{m+i})=0 \\ P_{m+j-1}(\lambda_{m+j}^{(m+j)})P_m(\lambda_1^{(m+j)})\prod_{i=2}^{j-1}(\lambda_1^{(m+j)}-a_{m+i})=0 \end{cases} \tag{17}$$

下面对(17)式进行讨论．若 $P_m(\lambda_1^{(m+j)})=0$，因为 $\lambda_1^{(m+j)}\leqslant\lambda_1^{(m+j-1)}\leqslant\cdots\leqslant\lambda_1^{(m)}$，且 $\lambda_1^{(m)}$ 是 $P_m=0$ 时的最小特征值，所以 $\lambda_1^{(m+j)}=\lambda_1^{(m+j-1)}=\cdots=\lambda_1^{(m)}$，则 $P_m(\lambda_1^{(m+j)})=P_{m-1}(\lambda_1^{(m+j)})=0$，这与引理3矛盾，所以 $P_m(\lambda_1^{(m+j)})\neq 0$，同理可证 $P_m(\lambda_{m+j}^{(m+j)})\neq 0$.

若 $\begin{cases} P_{m+j-1}(\lambda_1^{(m+j)})=0 \\ P_{m+j-1}(\lambda_{m+j}^{(m+j)})=0 \end{cases}$，则由 $b_{n+j-1}\neq 0$ 和(15)式得 $\prod_{i=2}^{j-1}(\lambda_1^{(m+j)}-a_{m+i})=0$，$\prod_{i=2}^{j-1}(\lambda_{m+j}^{(m+j)}-a_{m+i})=0$，即

$a_{m+i}=\lambda_1^{(m+j)}$，$a_{m+i}=\lambda_{m+j}^{(m+j)}(i=2,3,\cdots,n)$．而由(16)式得 $\lambda_1^{(m+j)}=\lambda_1^{(m+j-1)}=\cdots=\lambda_1^{(m+1)}$，$\lambda_{m+1}^{(m+1)}=\lambda_{m+2}^{(m+2)}=\cdots=\lambda_{m+j}^{(m+j)}$，因此有 $P_{m+3}(\lambda_1^{(m+3)})=0$ 且 $P_{m+2}(\lambda_1^{(m+2)})=0$，则有 $P_{m+3}(\lambda_1^{(m+j)})=0$ 且 $P_{m+2}(\lambda_1^{(m+j)})=0$．由引理 1 得 $P_{m+3}(\lambda_1^{(m+j)})=(\lambda_1^{(m+j)}-a_{m+3})P_{m+2}(\lambda_1^{(m+j)})-b_{m+2}^2P_m(\lambda_1^{(m+j)})(\lambda_1^{(m+j)}-a_{m+2})$．由 $P_{m+3}(\lambda_1^{(m+j)})=0$ 且 $P_{m+2}(\lambda_1^{(m+j)})=0$ 得 $\lambda_1^{(m+j)}=a_{m+2}$．同理可得 $\lambda_{m+j}^{(m+j)}=a_{m+2}$．而 $\lambda_1^{(m+j)}\leqslant a_{m+2}\leqslant\lambda_{m+j}^{(m+j)}$，所以有 $\lambda_1^{(m+j)}=\lambda_{m+j}^{(m+j)}$．由引理 4 可知 $\lambda_1^{(m+j)}=\lambda_{m+j}^{(m+j)}$ 不成立，因此 $\begin{cases}P_{m+j-1}(\lambda_1^{(m+j)})=0\\P_{m+j-1}(\lambda_{m+j}^{(m+j)})=0\end{cases}$ 不成立．同理，$\prod\limits_{i=2}^{j-1}(\lambda_1^{(m+j)}-a_{m+i})=0$ 且 $\prod\limits_{i=2}^{j-1}(\lambda_{m+j}^{(m+j)}-a_{m+i})=0$ 也不成立．

若 $\begin{cases}P_{m+j-1}(\lambda_1^{(m+j)})=0\\\prod\limits_{i=2}^{j-1}(\lambda_1^{(m+j)}-a_{m+i})=0\end{cases}$，则(15)式的系统增广矩阵的秩为 1，因此该系统将有无穷多个解．同理，若 $\begin{cases}P_{m+j-1}(\lambda_{m+j}^{(m+j)})=0\\\prod\limits_{i=2}^{j-1}(\lambda_{m+j}^{(m+j)}-a_{m+i})=0\end{cases}$，该系统也会有无穷多个解．然而，若加上附加条件 $\lambda_1^{(m+j)}<\lambda_1^{(m+j-1)}$ 和 $\lambda_{m+j-1}^{(m+j-1)}<\lambda_{m+j}^{(m+j)}(j=3,\cdots,n)$，则有 $P_{m+j-1}(\lambda_1^{(m+j)})\neq0$ 和 $P_{m+j-1}(\lambda_{m+j}^{(m+j)})\neq0$，与 $\begin{cases}P_{m+j-1}(\lambda_1^{(m+j)})=0\\\prod\limits_{i=2}^{j-1}(\lambda_1^{(m+j)}-a_{m+i})=0\end{cases}$ 和 $\begin{cases}P_{m+j-1}(\lambda_{m+j}^{(m+j)})=0\\\prod\limits_{i=2}^{j-1}(\lambda_{m+j}^{(m+j)}-a_{m+i})=0\end{cases}$ 不符，因此 $\begin{cases}P_{m+j-1}(\lambda_1^{(m+j)})=0\\\prod\limits_{i=2}^{j-1}(\lambda_1^{(m+j)}-a_{m+i})=0\end{cases}$ 和 $\begin{cases}P_{m+j-1}(\lambda_{m+j}^{(m+j)})=0\\\prod\limits_{i=2}^{j-1}(\lambda_{m+j}^{(m+j)}-a_{m+i})=0\end{cases}$ 不成立．

综上所述，$D_{m+j}\neq0$ 当且仅当 $\lambda_1^{(m+j)}<\cdots<\lambda_1^{(m+1)}<a_{m+i}<\lambda_{m+1}^{(m+1)}<\cdots<\lambda_{m+j}^{(m+j)}$，即 $(-1)^{m+j-1}D_{m+j}>0$，则方程组(15)存在唯一解 a_{m+j}，$b_{m+j-1}^2(j=3,\cdots,n)$，且

$$a_{m+j}=\frac{A_j-B_j}{D_{m+j}}\qquad b_{m+j-1}^2=\frac{(\lambda_{m+j}^{(m+j)}-\lambda_1^{(m+j)})P_{m+j-1}(\lambda_1^{(m+j)})P_{m+j-1}(\lambda_{m+j}^{(m+j)})}{D_{m+j}}\tag{18}$$

必要性　假定存在唯一的 $m+n$ 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 使得 $\lambda_1^{(j)}$，$\lambda_j^{(j)}$ 分别为 $\boldsymbol{A}_j(j=1,2,\cdots,m+n)$ 的最小、最大特征值，由柯西交错定理和引理 4 得 $\lambda_1^{(m+n)}<\lambda_1^{(m+n-1)}<\cdots<\lambda_1^{(2)}<\lambda_1^{(1)}<\lambda_2^{(2)}<\cdots<\lambda_{m+n-1}^{(m+n-1)}<\lambda_{m+n}^{(m+n)}$．必要性得证．

4　数值算法

问题 1 的算法

1. 输入 λ_1，λ_2，μ，x_1，x_2，y，以及 m，n；
2. 若 λ_1，λ_2，μ，x_1，x_2，y 满足条件(i) 和(ii)，则继续；否则算法结束；
3. 当 $i=2,\cdots,m-1$ 时，由(5)式计算 a_i，b_{i-1}；
4. 当 $i=m$ 时，由(6)式计算 b_{m-1}，b_m，a_m；
5. 当 $i=1$ 时，由(7)式计算 a_1；
6. 当 $i=m+2,\cdots,m+n$ 时，由(8)式计算 a_i，b_{i-1}；
7. 当 $i=m+1$ 时，由(9)式计算 a_{m+1}；
8. 输出：矩阵 $\boldsymbol{A}$，a_i，b_{i-1}．

问题 2 的算法

1. 输入 m，n，将 $2m+2n-1$ 个特征值按大小顺序排列；

2. 令 $a_1 = \lambda_1^{(1)}$，当 $j = 2$ 时，由(10)式计算 a_2 和 b_1；

3. 当 $j = 3,\cdots,m$ 时，由(12)式计算 a_j 和 b_{j-1}；

4. 当 $j = m+1,m+2$ 时，由(14)式计算 a_j 和 b_{j-1}；

5. 当 $j = 3,\cdots,n$ 时，由(18)式计算 a_{m+j} 和 b_{m+j-1}；

6. 输出：矩阵 $\boldsymbol{A}$，a_j，b_{j-1}.

5 实例分析

例 1 给定实数 $\lambda_1 = -0.825\,7$，$\lambda_2 = -0.596\,0$，$\mu = -0.717\,2$，$m = 4$，$n = 3$，给定实向量 $\boldsymbol{x}_1 = (-0.566\,7, 0.096\,1, -0.390\,3, -0.719\,3)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{x}_2 = (-0.719\,3, -2.598\,9, -0.455\,6, -0.267\,6)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{y} = (0.410\,9, -0.075\,2, 0.308\,0, -0.442\,6, 0.122\,5, 0.656\,8, 0.297\,2)^{\mathrm{T}}$.

根据问题 1 的算法，通过 MATLAB2017a 编程计算 a_i, b_i，形成矩阵 $\boldsymbol{A}$ 为

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} -0.059\,1 & 0.250\,6 & -0.920\,5 & -0.071\,0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.250\,6 & 0.652\,3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0.920\,5 & 0 & 0.510\,8 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0.071\,0 & 0 & 0 & -0.769\,8 & 0.048\,1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.048\,1 & -0.614\,5 & 0.022\,0 & 0.013\,0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.022\,0 & -0.721\,3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.013\,0 & 0 & -0.722\,6 \end{pmatrix}$$

易验证$(\lambda_1, \boldsymbol{x}_1)$是 $\boldsymbol{A}_{1,4}$ 的一个特征对，$(\lambda_2, \boldsymbol{x}_2)$是 $\boldsymbol{A}_{4,7}$ 的一个特征对，$(\mu, \boldsymbol{y})$是 $\boldsymbol{A}$ 的一个特征对，$\boldsymbol{A}$ 即为所求.

例 2 给定 $m=4$，$n=4$，再给出15个实数2.75，3.9，4.39，−2.5，6.1，−4.7，7.8，−6.64，10.53，−7.58，11.8，−8.3，13，−9.2，15.7. 将其按以下顺序排列：$\lambda_1^{(8)} < \lambda_1^{(7)} < \lambda_1^{(6)} < \lambda_1^{(5)} < \lambda_1^{(4)} < \lambda_1^{(3)} < \lambda_1^{(2)} < \lambda_1^{(1)} < \lambda_2^{(2)} < \lambda_3^{(3)} < \lambda_4^{(4)} < \lambda_5^{(5)} < \lambda_6^{(6)} < \lambda_7^{(7)} < \lambda_8^{(8)}$，即 $-9.2 < -8.3 < -7.58 < -6.64 < -4.7 < -2.5 < 2.75 < 3.9 < 4.39 < 6.1 < 7.8 < 10.53 < 11.8 < 13 < 15.7$.

根据问题 2 的算法，通过 MATLAB2017a 编程计算 a_j, b_{j-1} 和 a_{m+j}, b_{m+j-1}，形成矩阵 $\boldsymbol{A}_{4+4}$ 为

$$\boldsymbol{A}_{4+4} = \begin{pmatrix} 3.900\,0 & 0.750\,7 & 3.615\,4 & 4.419\,6 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.750\,7 & 3.240\,0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3.615\,4 & 0 & -0.425\,8 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 4.419\,6 & 0 & 0 & -1.129\,7 & 6.251\,8 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6.251\,8 & 5.653\,6 & 5.371\,1 & 4.885\,8 & 6.451\,4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5.371\,1 & -0.997\,2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4.885\,8 & 0 & 0.7407 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 6.451\,4 & 0 & 0 & 5.609\,8 \end{pmatrix}$$

重新计算 $\boldsymbol{A}_8$ 的顺序主子阵 $\boldsymbol{A}_j (j = 1,2,\cdots,8)$ 的谱 $\Lambda(\boldsymbol{A}_j)$，得：

$\Lambda(\boldsymbol{A}_1) = \{3.900\,0\}$，$\Lambda(\boldsymbol{A}_2) = \{2.750\,0, 4.390\,0\}$，$\Lambda(\boldsymbol{A}_3) = \{-2.500\,0, 3.114\,2, 6.100\,0\}$

$\Lambda(\boldsymbol{A}_4) = \{-4.700\,0, -0.692\,1, 3.176\,6, 7.800\,0\}$

$\Lambda(\boldsymbol{A}_5) = \{-6.640\,0, -1.764\,2, 3.136\,0, 5.976\,3, 10.530\,0\}$

$\Lambda(\boldsymbol{A}_6) = \{-7.580\,0, -3.092\,9, -0.786\,4, 3.156\,0, 6.744\,2, 11.800\,0\}$

$\Lambda(\boldsymbol{A}_7) = \{-8.300\,0, -3.415\,9, -0.793\,7, 0.230\,0, 3.164\,5, 7.096\,7, 13.000\,0\}$

$\Lambda(\boldsymbol{A}_8) = \{-9.200\,0, -3.621\,4, -0.796\,9, 0.166\,9, 3.136\,7, 3.629\,0, 7.577\,2, 15.700\,0\}$

以上数据说明问题 2 的算法是有效的.

参考文献：

[1] 张小双，陈　震，刘奇龙．求解不同阶对称张量组特征值的带位移高阶幂法［J］．西南大学学报（自然科学版），2020，42(8)：81-87.

[2] 杨　敏，安　静．圆域上二阶椭圆特征值问题的一种高效有限元方法［J］．西南大学学报（自然科学版），2020，42(12)：96-102.

[3] 陈付彬．M-矩阵 Fan 积的新不等式［J］．西南师范大学学报（自然科学版），2020，45(8)：1-5.

[4] CHU M T. Inverse Eigenvalue Problems［J］. SIAM Review，1998，40(1)：1-39.

[5] PENG J，HU X Y，ZHANG L. Two Inverse Eigenvalue Problems for a Special Kind of Matrices［J］. Linear Algebra and its Applications，2006，416(2/3)：336-347.

[6] SHARMA D，SEN M. Inverse Eigenvalue Problems with Partial Eigen Data for Acyclic Matrices Whose Graph is a Broom［J］. Kyungpook Mathematical Journal，2017，57(2)：211-222.

[7] SEN M，SHARMA D. Generalized Inverse Eigenvalue Problem for Matrices Whose Graph is a Path［J］. Linear Algebra and Its Applications，2014，446：224-236.

[8] HOGBEN L. Spectral Graph Theory and the Inverse Eigenvalue Problem of a Graph［J］. Journal of Linear Algebra，2005，14(1)：12-31.

[9] SHARMA D，SEN M. Inverse Eigenvalue Problems for Two Special Acyclic Matrices［J］. Mathematics，2016，4(1)：1-12.

[10] GLADWELL G M L. Inverse Problems in Vibration［M］. Dordrecht：Springer Netherlands，1986.

[11] MONFARED K H，SHADER B L. Construction of Matrices with a Given Graph and Prescribed Interlaced Spectral Data［J］. Linear Algebra and Its Applications，2013，438(11)：4348-4358.

[12] NYLEN P，UHLIG F. Inverse Eigenvalue Problems Associated with Spring-Mass Systems［J］. Linear Algebra and its Applications，1997，254(1/2/3)：409-425.

[13] 孟纯军，钟　璨，胡锡炎．两类对称箭形矩阵的逆问题［J］．湖南大学学报（自然科学版），2008，35(8)：82-84.

[14] 潘云兰，秦　立．由部分特征值和顺序主子阵构造广义 Jacobi 矩阵的逆特征值问题［J］．浙江师范大学学报（自然科学版），2018，41(2)：10-17.

[15] 段复建，方　甜，袁　璠．一类特殊矩阵的逆特征值问题［J］．数学杂志，2019，39(4)：543-554.

[16] 吴春红，卢琳璋．一类特殊矩阵的逆特征值问题［J］．厦门大学学报（自然科学版），2009，48(1)：22-26.

责任编辑　廖　坤