DOI:10.13718/j.cnki.xsxb.2021.10.005

局部紧的 Abel 群上的平移框架和框架谱集[①]

买买提艾力·喀迪尔[1], 阿里米热·阿布拉[1], 范 琼[1,2]

1. 喀什大学 数学与统计学院,新疆 喀什 844000;2. 华中师范大学 数学与统计学院,武汉 430079

摘要:设 G 是一个局部紧的 Abel 群,集合 $\Omega\subset G$ 是具有正有限 Haar 测度的 Borel 集. 研究了 G 上的 Paley-Wiener 空间 $PW_{\Omega}(G)$ 的平移框架和集合 Ω 上的平方 Haar 可积函数空间 $L^2(\Omega)$ 的 Fourier 框架之间的关系.

关 键 词:局部紧的 Abel 群;平移框架;框架谱集

中图分类号:O174.2 **文献标志码**:A **文章编号**:1000-5471(2021)10-0026-04

Translation Frames and Frame Spectral Sets on Locally Compact Abel Groups

Mamateli Kadir[1], Almire Abula[1], FAN Qiong[1,2]

1. *School of Mathematics and Statistics, Kashi University, Kashi Xinjiang 844000, China;*
2. *School of Mathematics and Statistics, Central China Normal University, Wuhan Hubei 430079, China*

Abstract: Let G be a locally compact Able group, and $\Omega\subset G$ be a Borel set of finite positive Haar measure. In this paper, we study the relationships between the translation frames on $PW_{\Omega}(G)$ and the Fourier frame on the square Haar integrable function space $L^2(\Omega)$ on the set Ω.

Key words: locally compact Abel groups; translation frames; frame spectral sets

设 G 是一个局部紧的 Abel 群,则在群 G 上存在不恒等于 0 的,且平移不变的正则 Borel 测度-Haar 测度,记为 m 或者 $\mathrm{d}x$. 群 G 的所有特征所组成的集合构成一个局部紧的 Abel 群,称之为 G 的共轭群,记为 $\hat{G}$. 对于 $\chi\in\hat{G}$ 和 $x\in G$,我们用 $\langle\chi, x\rangle$ 来表示特征 χ 在群元素 x 上的作用,并定义指数函数如下:

$$e_{\chi}: G\longrightarrow\mathbb{C}\qquad e_{\chi}(x)=\langle\chi, x\rangle$$

设 $\Omega\subset G$ 是一个具有正有限 Haar 测度的 Borel 集,$L^2(\Omega)$ 是集合 Ω 上的平方可积函数所作成的 Hilber 空间,即

$$L^2(\Omega)=\left\{f:\Omega\longrightarrow\mathbb{C}:\int_{\Omega}|f(x)|^2\mathrm{d}x<\infty\right\}$$

并且在空间上 $L^2(\Omega)$ 的内积和范数分别定义为

$$\langle f, g\rangle=\int_{\Omega}f(x)\overline{g(x)}\mathrm{d}x$$

$$\|f\|=\sqrt{\int_{\Omega}|f(x)|^2\mathrm{d}x}\qquad\forall f,g\in L^2(\Omega)$$

① 收稿日期:2020-08-21
基金项目:新疆维吾尔自治区自然科学基金项目(2020D01A09);新疆维吾尔自治区高校科研计划自然科学项目(XJEDU2018Y037).
作者简介:买买提艾力·喀迪尔,讲师,博士,主要从事分形上的 Fourier 分析和谱测度理论的研究.

对指数函数系

$$E(\Lambda) = \{e_\lambda(x): \lambda \in \Lambda\}$$

如果存在常数 $M, m > 0$，使得

$$m \| f \|^2 \leqslant \sum_{\lambda \in \Lambda} |\langle f, e_\lambda \rangle|^2 \leqslant M \| f \|^2 \qquad \forall f \in L^2(\Omega)$$

则称 $E(\Lambda)$ 为空间 $L^2(\Omega)$ 上的一个 Fourier 框架．当 $E(\Lambda)$ 是空间 $L^2(\Omega)$ 上的 Fourier 框架时，我们称集合 Ω 为框架谱集，称 Λ 为 Ω 的框架谱，称(Ω, Λ) 为框架谱对．文献[1] 研究了非调和 Fourier 级数，首先提出了 Fourier 框架的概念．

特别地，若 $E(\Lambda)$ 构成空间 $L^2(\Omega)$ 上的一个正交基，则称集合 Ω 为一个谱集，称集合 Λ 为 Ω 的一个谱，(Ω, Λ) 为一个谱对．谱集的研究跟几何中的概念"tile"有着密切的联系．如果存在一个离散集合 $T \subset G$，使得集族$\{\Omega + t: t \in T\}$ 构成 G 的一个划分(除了零测集外)，那么称集合 Ω 是 G 上的一个平移 tile，集合 T 称为 Ω 的一个平移集或一个 tiling 集，(Ω, T) 称为 tiling 对．

当 $G = \mathbb{R}^d$ 时，文献[2] 提出了如下的谱集猜想：一个具有正有限 Lebesgue 测度的 Borel 集 $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ 是一个谱集当且仅当它是一个平移 tile.

在研究欧式空间 $\mathbb{R}^d$ 上的谱集猜想的过程中，文献[3] 构造了一个反例，证明了维数大于等于 5 时谱集猜想并不成立．文献[4-5] 附加了一些条件，取得了一些正面的结论．后来文献[6-7] 证明了维数 $d \geqslant 3$ 时谱集猜想也不成立．但是在一维或者二维空间上谱集猜想是否成立仍然还不清楚．在任何局部紧的 Able 群 G 上，甚至在有限群上可以讨论谱集猜想[8]．

文献[9] 讨论了局部紧的 Abel 群上的 Paley-Wiener 空间的平移正交基与谱集之间的关系．本文研究一般局部紧的 Able 群 G 上的 Paley-Wiener 空间 $PW_\Omega(G)$ 的平移框架与具有正有限 Haar 测度的 Borel 集 Ω 上的 Hilbert 空间 $L^2(\Omega)$ 的 Fourier 框架(即框架谱集 Ω)之间的关系．在欧式空间 $\mathbb{R}^d$ 上的有关问题的研究，读者可以参阅文献[10-12].

1　预备知识

本节介绍局部紧 Abel 群 G 上的可积函数空间 $L^1(G)$，和平方可积函数空间 $L^2(G)$ 上 Fourier 变换及其基本性质等有关内容.

设集合 $\Omega \subset G$ 是具有正有限 Haar 测度的 Borel 集，$L^1(\Omega)$ 是 Ω 上的可积函数空间所构成的 Lebesgue 空间，即

$$L^1(\Omega) = \left\{ f: \Omega \longrightarrow \mathbb{C}: \int_\Omega |f(x)| \, \mathrm{d}x < +\infty \right\}$$

定义 1[13]　设函数 $f \in L^1(G)$，其 Fourier 变换定义为

$$\hat{f}(\xi) = \int_G f(x) \overline{e_\xi(x)} \, \mathrm{d}x \qquad \xi \in \hat{G}$$

Fourier 变换具有如下性质：

(a) 映射 $f \longmapsto \hat{f}$ 是从 $L^1(G)$ 到 $L^\infty(G)$ 的有界线性算子，并且 $\| \hat{f} \|_\infty \leqslant \| f \|_1$；

(b) 对 $\forall f, g \in (L^1 \cap L^2)(G)$，有 Plancherel 等式

$$\langle \hat{f}, \hat{g} \rangle_{L^2(\hat{G})} = \langle f, g \rangle_{L^2(G)} \qquad \| \hat{f} \|_{L^2(\hat{G})} = \| f \|_{L^2(G)}$$

(c) 映射 $f \longmapsto \hat{f}$ 是从 $L^2(G)$ 到 $L^2(\hat{G})$ 上的一个酉算子.

集合 $\Omega \subset \hat{G}$ 上的 Paley-Wiener 空间 $PW_\Omega(G)$ 定义为

$$PW_\Omega(G) = \{ f \in L^2(G): \hat{f}(\xi) = 0, \ \forall \xi \in \Omega^c \}$$

可以看出，通过 Fourier 变换，Paley-Wiener 空间 $PW_\Omega(G)$ 和 Hilbert 空间 $L^2(\Omega)$ 是等距同构的.

对于 $\lambda \in G$，$\omega \in \hat{G}$，$\varphi \in L^2(G)$，定义在空间 $L^2(G)$ 上的平移算子和调制算子分别为

$$T_\lambda \varphi(x) = \varphi(x - \lambda) \qquad M_\omega \varphi(x) = e_\omega(x) \varphi(x)$$

显然，这样定义的平移算子 T_λ 和调制算子 M_ω 是空间 $L^2(G)$ 上的等距算子，即

$$\| T_\lambda \varphi \|_2 = \| \varphi \|_2 \qquad \| M_\omega \varphi \|_2 = \| \varphi \|_2$$

根据 Fourier 变换的定义，并且通过简单的计算，可得到下面的引理：

引理 1[14] 假设 T_λ, M_ω 分别是空间 $L^2(G)$ 上的平移算子和调制算子，那么有

$$\widehat{T_\lambda \varphi} = M_{-\lambda} \hat{\varphi} \qquad \widehat{M_\omega \varphi} = T_\omega \hat{\varphi}$$

2 主要结论及其证明

定义 2 设 $T_\lambda: L^2(G) \longrightarrow L^2(G)$ 是一个平移算子，如果存在两个正数 $m \leqslant M$，使得

$$m \| f \|^2 \leqslant \sum_{\lambda \in \Lambda} | \langle f, T_\lambda \varphi \rangle |^2 \leqslant M \| f \|^2 \qquad \forall f \in PW_\Omega(G)$$

那么称平移函数族$\{T_\lambda \varphi\}_{\lambda \in \Lambda}$ 是空间 $PW_\Omega(G)$ 上的一个平移框架，其中 M, m 分别称为框架上界和下界. 如果 $m = M$，那么这个框架称为 Parseval 框架.

对 $\forall \varphi \in PW_\Omega(\hat{G})$，令

$$E_\varphi = \{\xi \in \Omega: \hat{\varphi}(\xi) \neq 0\}$$

下面的定理1是本文的主要结果，说明空间 $PW_\Omega(G)$ 上的平移框架$\{T_\lambda \varphi\}_{\lambda \in \Lambda}$ 存在等价于(Ω, Λ)是一个框架谱对.

定理 1 设存在 $0 < m \leqslant M$，使得对几乎处处的 $x \in E_\varphi$，有 $m \leqslant | \hat{\varphi}(x) | \leqslant M$，则平移函数族$\{T_\lambda \varphi\}_{\lambda \in \Lambda}$ 是空间 $PW_\Omega(\hat{G})$ 上的一个平移框架当且仅当(Ω, Λ) 是一个框架谱对，即指数函数系$\{e_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ 是空间 $L^2(\Omega)$ 上的一个 Fourier 框架.

证 用 1_Ω 表示集合 Ω 的示性函数，即

$$1_\Omega(x) = \begin{cases} 1 & x \in \Omega \\ 0 & x \notin \Omega \end{cases}$$

对 $\forall f \in PW_\Omega(G)$，取 $h = \hat{f} \overline{\hat{\varphi}} 1_{E_\varphi}$，由于对几乎处处的 $x \in E_\varphi$，有

$$m \leqslant | \hat{\varphi}(x) | \leqslant M$$

所以

$$m \| f \|^2 = m \| \hat{f} \|^2 \leqslant \| h \|^2 \leqslant M \| \hat{f} \|^2 = M \| f \|^2 \tag{1}$$

根据 Plancherel 等式，有

$$\sum_{\lambda \in \Lambda} | \langle f, T_\lambda \varphi \rangle |^2 = \sum_{\lambda \in \Lambda} | \langle \hat{f}, \widehat{T_\lambda \varphi} \rangle |^2$$

根据引理 1 有

$$\sum_{\lambda \in \Lambda} | \langle \hat{f}, \widehat{T_\lambda \varphi} \rangle |^2 = \sum_{\lambda \in \Lambda} | \langle \hat{f}, \hat{\varphi} e_\lambda \rangle |^2 = \sum_{\lambda \in \Lambda} | \langle \hat{f} \overline{\hat{\varphi}} 1_{E_\varphi}, e_\lambda \rangle |^2 = \sum_{\lambda \in \Lambda} | \langle h, e_\lambda \rangle |^2 \tag{2}$$

充分性 如果指数函数系$\{e_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ 是空间 $L^2(\Omega)$ 上的一个 Fourier 框架，其框架上界和下界分别是 C_1, C_2，那么由(2) 式，我们有

$$C_1 \| h \|^2 \leqslant \sum_{\lambda \in \Lambda} | \langle f, T_\lambda \varphi \rangle |^2 \leqslant C_2 \| h \|^2 \tag{3}$$

根据不等式(1) 和不等式(3)，得到

$$C_1 m \| f \|^2 \leqslant \sum_{\lambda \in \Lambda} | \langle f, T_\lambda \varphi \rangle |^2 \leqslant C_2 M \| f \|^2$$

这蕴含着平移函数族$\{T_\lambda \varphi\}_{\lambda \in \Lambda}$ 是空间 $PW_\Omega(G)$ 上的一个平移框架.

必要性 设平移函数族$\{T_\lambda \varphi\}_{\lambda \in \Lambda}$ 是空间 $PW_\Omega(G)$ 上的一个平移框架，$g \in L^2(\Omega)$，令 $\psi = 1_{E_\varphi} \dfrac{g}{\overline{\hat{\varphi}}}$，由于对几乎处处的 $x \in E_\varphi$，有

$$m \leqslant | \hat{\varphi}(x) | \leqslant M$$

则

$$\frac{1}{M}\| g \| \leqslant \| \psi \| = \left\| 1_{E_\varphi} \frac{g}{\hat{\varphi}} \right\| \leqslant \frac{1}{m} \| g \|$$

从而 $\psi \in L^2(\Omega)$. 设函数 Ψ 是函数 ψ 的 Fourier 逆变换，即 $\hat{\Psi} = \psi$，则根据 Plancherel 等式，有

$$\sum_{\lambda \in \Lambda} |\langle \Psi, T_\lambda \varphi \rangle|^2 = \sum_{\lambda \in \Lambda} |\langle \psi, \hat{\varphi} e_\lambda \rangle|^2 = \sum_{\lambda \in \Lambda} |\langle \psi \overline{\hat{\varphi}}, e_\lambda \rangle|^2 = \sum_{\lambda \in \Lambda} |\langle g, e_\lambda \rangle|^2 \tag{4}$$

如果框架 $\{T_\lambda \varphi\}_{\lambda \in \Lambda}$ 的框架上界和下界分别是 C_1，C_2，那么由(4)式，我们有

$$C_1 \| \Psi \|^2 \leqslant \sum_{\lambda \in \Lambda} |\langle g, e_\lambda \rangle|^2 \leqslant C_2 \| \Psi \|^2 \tag{5}$$

因为

$$\| \Psi \| = \| \psi \| = \left\| 1_{E_\varphi} \frac{g}{\hat{\varphi}} \right\|$$

且对几乎处处的 $x \in E_\varphi$，有

$$m \leqslant |\hat{\varphi}(x)| \leqslant M$$

则

$$M^{-1} \| g \|^2 \leqslant \| \Psi \|^2 \leqslant m^{-1} \| g \|^2 \tag{6}$$

由不等式(5)和不等式(6)知，指数函数系 $\{e_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ 是空间 $L^2(\Omega)$ 上的一个 Fourier 框架.

推论 1　设集合 $\Omega \subset \hat{G}$ 是具有正有限 Haar 测度的 Borel 集，函数 $\hat{\varphi}$ 在 Ω 上处处不为 0，则对于任意函数 $\varphi \in PW_\Omega(G)$，平移函数族 $\{T_\lambda \varphi\}_{\lambda \in \Lambda}$ 是空间 $PW_\Omega(G)$ 上的一个平移 Parseval 框架当且仅当指数函数系 $\{e_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ 是空间 $L^2(\Omega)$ 上的一个 Parseval 框架.

参考文献：

[1] DUFFIN R，SCHAEFFER A. A Class of Nonharmonic Fourier Series [J]. Transactions of the American Mathematical Society，1952，72(2)：341-366.

[2] FUGLEDE B. Commuting Self-Adjoint Partial Differential Operators and a Group Theoretic Problem [J]. Journal of Functional Analysis，1974，16(1)：101-121.

[3] TAO T. Fuglede's Conjecture is False in 5 and Higher Dimensions [J]. Mathematical Research Letters，2004，11(2)：251-258.

[4] IOSEVICH A，KATZ N，TAO T. The Fuglede Spectral Conjecture Holds for Convex Planar Domains [J]. Mathematical Research Letters，2003，10(5)：559-569.

[5] KOLOUNTZAKIS M N. Non-Symmetric Convex Domains Have No Basis of Exponentials [J]. Illinois Journal of Mathematics，2000，44(3)：542-550.

[6] KOLOUNTZAKIS M N，MATOLCSI M. Tiles with No Spectra [J]. Forum Mathematicum，2006，18(3)：519-528.

[7] MATOLCSI M. Fuglede's Conjecture Fails in Dimension 4 [J]. Proceedings of the American Mathematical Society，2005，133(10)：3021-3026.

[8] AYACHI B，BAU E，FITZ PATRICK D，et al. Tiling Sets and Spectral Sets Over Finite Fields [J]. Journal of Functional Analysis，2017，273(8)：2547-2577.

[9] 买买提艾力·喀迪尔. 局部紧的 Abel 群上的 Paley-Wiener 空间和规范正交基 [J]. 安徽大学学报(自然科学版)，2021，45(2)：23-27.

[10] IOSEVICH A，MAYELI A. Exponential Bases，Paley-Wiener Spaces and Applications [J]. Journal of Functional Analysis，2015，268(2)：363-375.

[11] BOOR C，DEVORE R A，RON A. Approximation from Shift Invariant Subspaces of $L^2(\mathbb{R}^d)$ [J]. Transactions of the Americal Mathematical Society Amer Math Soc，1993，341(2)：787-806.

[12] BOWNIK M. The Structure of Shift-Invariant Subspace of $L^2(\mathbb{R}^d)$ [J]. Journal of Functional Analysis，2000，177(2)：282-309.

[13] RUDIN W. Fourier Analysis on Groups [M]. New York：John Wiley and Sons，1962.

[14] GROCHENIG K. Foundations of Time-Frequency Analysis [M]. Boston：Birkhäuser，2001.

责任编辑　廖　坤