DOI:10.13718/j.cnki.xsxb.2021.10.006

D-E-预不变凸映射的特征性质[①]

王海英，　虎大力，　李　婧

南阳师范学院 数理学院，河南 南阳 473061

摘要：讨论了 D-E-预不变凸映射的一些特征性质. 通过 $*$-上半连续性、$*$-下半连续性、严格 D-E-预不变凸性、半严格 D-E-预不变凸性、D-E-预不变拟凸性、严格 D-E-预不变拟凸性和半严格 D-E-预不变拟凸性，获取了 D-E-预不变凸映射的一些特征性质，同时指出了 D-E-预不变凸优化的局部 E-最优解和全局 E-最优解之间的关系. 在适当的条件下得到了不可微 D-E-预不变凸映射的一些特征性质和应用. 这也为判别映射的 D-E-预不变凸性提供了一个新的判别角度.

关 键 词：D-E-预不变凸性；D-E-预不变拟凸性；半连续

中图分类号：O221.2　　**文献标志码**：A　　**文章编号**：1000-5471(2021)10-0030-08

Characteristics of D-E-Preinvex Mappings

WANG Haiying，　HU Dali，　LI Jing

Department of Mathematics and Statistics, Nanyang Normal College, Nanyang Henan 473061, China

Abstract: The characteristics properties and applications of the D-E-preinvex mappings have been studied by the $*$-upper semicontinuity, $*$-lower semicontinuity, strict D-E-preinvexity, semistrict D-E-preinvexity, D-E-prequaiinvexity, strict D-E-prequaiinvexity and semistrict D-E-preiquainvexity. Some new properties of the D-E-preinvex mappings have been received, and the relationship between the local E-minimum and the global E-minimum of the D-E-preinvex mappings in vector optimization also been pointed out. So, under suitable conditions, some characteristics properties and applications of the nondifferentiable D-E-preinvex mappings are obtained. These characteristics also provide a new discrimination perspective for the D-E-preinvexity.

Key words: D-E-preinvexity; D-E-prequaiinvexity; semicontinuity

凸性和广义凸性在数理经济、工程和优化理论等方面起着重要作用[1-3]. 因此，关于凸性和广义凸性的研究一直是数学规划的一个重要方面.

凸性的一个重要的推广是文献[4-5]所提出的预不变凸函数. 近些年来，很多学者都从事过预不变凸函数类的性质和应用的研究. 比如，文献[6]在条件 C 下给出了预不变凸函数的一些性质；文献[7]提出了严格预不变凸函数和半严格预不变凸函数，并讨论了预不变凸性、严格预不变凸性和半严格预不变凸性之

---

① 收稿日期：2020-05-18
基金项目：国家自然科学基金项目(61801250)；河南省高等教育教学改革研究与实践项目(2019SJGLX377).
作者简介：王海英，教授，主要从事最优化理论的研究.
通信作者：虎大力，讲师，博士.

间的关系．最近，文献[8]在条件C[9]的一个重要性质下，利用中间点的预不变凸性和半严格预不变凸性刻画了预不变凸性．

凸性和广义凸性在向量优化中也占有重要的地位，它也是刻画向量优化问题解集的存在性、特征性、最优性条件和对偶性的一个重要工具．文献[10]提出了向量值映射的D-预不变凸性．文献[11]给出了D-预不变凸值映射的一些性质．文献[12]从其他角度讨论了D-预不变凸映射．随后，文献[13]引入了一类新的广义凸向量值映射：D-预不变拟凸向量值映射，它是D-预不变凸映射和拟凸映射的推广．文献[14]研究了D-预不变凸性、D-预不变拟凸性、严格D-预不变拟凸性和半严格D-预不变拟凸性之间的关系．

文献[15]引入了E-不变凸函数的概念．文献[16-17]指出并纠正了文献[15]中的一些错误．文献[18]分别将E-凸集和E-凸函数推广到E-不变凸集和E-预不变凸函数，并取得了E-预不变凸函数在数学规划中的一些结果．最近，文献[19]引入了D-E-预不变拟凸映射，并给出了D-E-预不变拟凸映射的一些性质．

受上述结论的启发，本文主要研究D-E-预不变凸映射的特征性质．首先，在$*$-下半连续和$*$-上半连续的条件下，分别得到了D-E-预不变凸映射的一些等价命题．其次，讨论了D-E-预不变凸性、严格D-E-预不变凸性和半严格D-E-预不变凸性之间的关系．接着，讨论了D-E-预不变凸性与D-E-预不变拟凸性、严格D-E-预不变拟凸性和半严格D-E-预不变拟凸性之间的关系．最后，在一定条件下，得到了D-E-预不变凸映射在向量优化问题中的一个应用．

1　预备知识

本文中，设X为实拓扑向量空间，Y为实局部凸向量空间，$S\subset X$为非空子集，η：$S\times S\longrightarrow S$和$E$：$S\times S\longrightarrow S$是向量值映射，$D\subset Y$为非空尖闭凸锥，$Y^*$是$Y$的具有弱$*$拓扑的对偶空间．$D$的对偶锥定义为$D^*=\{f\in Y^*: f(y)=\langle f, y\rangle\geqslant 0, \forall y\in D\}$．

定义 1[18]　如果$\forall x,y\in S$，$\forall\alpha\in[0,1]$，$E(y)+\alpha\eta(E(x),E(y))\in S$，则称$S$关于$\eta$是$E$-不变凸集．

定义 2[18]　设S关于η是E-不变凸集，F：$S\longrightarrow\mathbb{R}$。如果$\forall x,y\in S$，$\forall\alpha\in[0,1]$，$F(E(y)+\alpha\eta(E(x),E(y)))\leqslant\alpha F(E(x))+(1-\alpha)F(E(y))$，则$F$是$D$-$E$-预不变凸函数．

定义 3　设S关于η是E-不变凸集，F：$S\longrightarrow Y$，

(a) 如果$\forall x,y\in S$，$\forall\alpha\in[0,1]$，

$$F(E(y)+\alpha\eta(E(x),E(y)))\in\alpha F(E(x))+(1-\alpha)F(E(y))-D$$

则F是D-E-预不变凸映射；

(b) 如果$\forall x,y\in S$，$x\neq y$，$\forall\alpha\in[0,1]$，

$$F(E(y)+\alpha\eta(E(x),E(y)))\in\alpha F(E(x))+(1-\alpha)F(E(y))-\operatorname{int}D$$

则F是严格D-E-预不变凸映射；

(c) 如果$\forall x,y\in S$，$F(E(x))\neq F(E(y))$，$\forall\alpha\in[0,1]$，

$$F(E(y)+\alpha\eta(E(x),E(y)))\in\alpha F(E(x))+(1-\alpha)F(E(y))-\operatorname{int}D$$

则F是半严格D-E-预不变凸映射；

(d) 如果$\forall x,y\in S$，$\forall\alpha\in[0,1]$，

$$F(E(y)+\alpha\eta(E(x),E(y)))\in F(E(x))-\operatorname{int}D$$

或

$$F(E(y)+\alpha\eta(E(x),E(y)))\in F(E(y))-\operatorname{int}D$$

则F是D-E-预不变拟凸映射[18]；

(e) 如果$\forall x,y\in S$，$x\neq y$，$\forall\alpha\in[0,1]$，

$$F(E(y)+\alpha\eta(E(x),E(y)))\in F(E(x))-\operatorname{int}D$$

或

$$F(E(y)+\alpha\eta(E(x),E(y)))\in F(E(y))-\operatorname{int}D$$

则 F 是严格 D-E- 预不变拟凸映射[18]；

(f) 如果 $\forall x, y \in S$，$F(E(x)) \neq F(E(y))$，$\forall \alpha \in [0, 1]$，

$$F(E(y)+\alpha\eta(E(x), E(y))) \in F(E(x)) - \operatorname{int} D$$

或

$$F(E(y)+\alpha\eta(E(x), E(y))) \in F(E(y)) - \operatorname{int} D$$

则 F 是半严格 D-E- 预不变拟凸映射[18].

定义 4[5] 设 $F: S \longrightarrow Y$. 如果 $\forall q \in D^*$，有 $q(F)(\cdot) = \langle q, F(\cdot)\rangle$，则 F 是 $*$ -下半连续映射.

定义 5[11] 设 $F: S \longrightarrow Y$. 如果 $\forall q \in D^*$，$q(F)(\cdot)$ 在 S 上上半连续，则 F 是 $*$ -上半连续映射.

引理 1[11] $\forall q \in D^*$，$q(d) \geqslant 0$ 当且仅当 $d \in D$.

条件 C′[19] 如果 $\forall x, y \in S$，$\forall \alpha \in [0, 1]$，有

$$\eta(E(y), E(y)+\alpha\eta(E(x), E(y))) = -\alpha\eta(E(x), E(y))$$

$$\eta(E(x), E(y)+\alpha\eta(E(x), E(y))) = (1-\alpha)\eta(E(x), E(y))$$

则 η 满足条件 C′.

性质 1 如果 η 满足条件 C′，则 $\forall x, y \in S$，$\forall \alpha_1, \alpha_2 \in [0, 1]$，有

$$\eta(E(y)+\alpha_1\eta(E(x), E(y)), E(y)+\alpha_2\eta(E(x), E(y))) = (\alpha_1-\alpha_2)\eta(E(x), E(y))$$

2 连续性和 *D*-*E*- 预不变凸性

本节将在 $*$ -上半连续和 $*$ -下半连续条件下，应用下面的引理 2 分别给出 D-E- 预不变凸映射的一些等价刻画.

引理 2 设 S 关于 η 是 E -不变凸集，η 满足条件 C′，$F: S \longrightarrow Y$ 满足条件 $F(E(y)+\eta(E(x), E(y))) \in F(E(x)) - D$. 若存在 $\alpha \in (0, 1)$，使得 $\forall x, y \in S$，有

$$F(E(y)+\alpha\eta(E(x), E(y))) \in \alpha F(E(x)) + (1-\alpha)F(E(y)) - D$$

则集合 $A = \{\lambda \in [0, 1]: F(E(y)+\lambda\eta(E(x), E(y))) \in \lambda F(E(x)) + (1-\lambda)F(E(y)) - D, \forall x, y \in S\}$ 在 $[0, 1]$ 中稠密.

定理 1 设 $F: S \longrightarrow Y$ 是 E -不变凸集 S 上的 $*$ -上半连续映射且满足条件 $F(E(y)+\eta(E(x), E(y))) \in F(E(x)) - D$，$\eta$ 满足条件 C′. 则 F 是 D-E- 预不变凸映射当且仅当 $\forall x, y \in S$，存在 $\alpha \in (0, 1)$，使得 $F(E(y)+\alpha\eta(E(x), E(y))) \in \alpha F(E(x)) + (1-\alpha)F(E(y)) - D$.

证 由 D-E- 预不变凸映射的定义，可以获得必要性的证明. 下面证明充分性. 令

$$A = \{\lambda \in [0, 1]: F(E(y)+\lambda\eta(E(x), E(y))) \in \lambda F(E(x)) + (1-\lambda)F(E(y)) - D, \forall x, y \in S\}$$

由引理 2，A 在 $[0, 1]$ 中稠密. 故 $\forall \bar{\lambda} \in (0, 1)$，存在 $\{\lambda_n\} \subset (0, 1) \cap A$ 满足 $\lambda_n < \bar{\lambda}$，$\lambda_n \to \bar{\lambda}(n \to \infty)$.

取 $\forall x, y \in S$，令 $E(z) = E(y) + \bar{\lambda}\eta(E(x), E(y))$. 定义 $E(y_n) = E(y) + \dfrac{\bar{\lambda}-\lambda_n}{1-\lambda_n}\eta(E(x), E(y))$，则 $E(y_n) \to E(y)(n \to \infty)$. 因为 $0 < \lambda_n < \bar{\lambda} < 1$，故 $0 < \dfrac{\bar{\lambda}-\lambda_n}{1-\lambda_n} < 1$，注意到 S 是 E -不变凸集，从而 $E(y_n) \in S$.

由条件 C′，推得

$$E(y_n) + \lambda_n\eta(E(x), E(y_n)) = E(y) + \bar{\lambda}\eta(E(x), E(y)) = E(z) \tag{1}$$

因为 $\lambda_n \in A$，所以有 $F(E(z)) \to \lambda_n F(E(x)) + (1-\lambda_n)F(E(y_n)) - D$. 由 F 的 $*$ -上半连续性，对于 $\forall q \in D^*$，$q(F)(\cdot)$ 上半连续. 故 $\forall \varepsilon > 0$，存在 $N > 0$，当 $n > N$ 时，有

$$q(F)(E(y_n)) \leqslant q(F)(E(y)) + \varepsilon$$

则由(1)式以及 $\lambda_n \in A$，有 $q(F)(E(z)) \to \bar{\lambda}q(F)(E(x)) + (1-\bar{\lambda})[q(F)(E(y)) + \varepsilon]$. 因为 $\varepsilon > 0$ 可以任意小，所以对于 $\forall q \in D^*$，有 $q(F)(E(z)) \leqslant \bar{\lambda}q(F)(E(x)) + (1-\bar{\lambda})q(F)(E(y))$. 再由 q 的线性性质和性质 1，有 $F(E(z)) \in \bar{\lambda}F(E(x)) + (1-\bar{\lambda})F(E(y)) - D$. 从而，由 x, y 的任意性和定义知，F 是 D-E- 预不变凸映射.

定理 2 设 $F: S \longrightarrow Y$ 是 E -不变凸集 S 上的 $*$ -下半连续映射且满足条件 $F(E(y)+\eta(E(x),$

$E(y)))\in F(E(x))-D$，η满足条件C′．则F是D-E-预不变凸映射当且仅当$\forall x,y\in S$，存在$\alpha\in(0,1)$，使得$F(E(y)+\alpha\eta(E(x),E(y)))\in\alpha F(E(x))+(1-\alpha)F(E(y))-D$.

证　由D-E-预不变凸映射的定义，可以获得必要性的证明．下面证明充分性．反证法，假设F不是D-E-预不变凸映射，则存在$x,y\in S$，$\bar{\lambda}\in(0,1)$，使得

$$F(E(y)+\bar{\lambda}\eta(E(x),E(y)))\notin\bar{\lambda}F(E(x))+(1-\bar{\lambda})F(E(y))-D \tag{2}$$

令$E(x_t)=E(y)+t\eta(E(x),E(y))$，$t\in(\bar{\lambda},1]$；$\mu=\inf\{t\in(\bar{\lambda},1]:x_t\in B\}$；$B=\{x_t\in S:t\in(\bar{\lambda},1],F(E(x_t))=F(E(y)+t\eta(E(x),E(y)))\in tF(E(x))+(1-t)F(E(y))-D\}$．由假设，有$x_1\in B$．由(2)式知$x_{\bar{\lambda}}\notin B$．从而$x_t\notin B$，$\forall t\in[\bar{\lambda},\mu)$，存在$\{t_n\}$，$t_n\geqslant\mu$，$x_{t_n}\in B$，使得$t_n\to\mu(n\to\infty)$．则可知

$$F(E(x_{t_n}))=F(E(y)+t_n\eta(E(x),E(y)))\in t_nF(E(x))+(1-t_n)F(E(y))-D$$

故对于$\forall q\in D^*$，有$q(F)(E(x_{t_n}))\leqslant t_nq(F)(E(x))+(1-t_n)q(F)(E(y))$．因为$F$是$*$-下半连续的，故对于$\forall q\in D^*$，$q(F)(\cdot)$是下半连续的，有$q(F)(E(x_\mu))\leqslant\mu q(F)(E(x))+(1-\mu)q(F)(E(y))$．由$q$的线性性质和引理1，有

$$F(E(x_\mu))\in\mu F(E(x))+(1-\mu)F(E(y))-D \tag{3}$$

则$x_\mu\in B$.

类似地，令$E(y_t)=E(y)+t\eta(E(x),E(y))$，$t\in[0,\bar{\lambda})$；$\nu=\sup\{t\in[0,\bar{\lambda}):y_t\in D\}$；$D=\{y_t\in S:t\in[0,\bar{\lambda}),F(E(y_t))=F(E(y)+t\eta(E(x),E(y)))\in tF(E(x))+(1-t)F(E(y))-D\}$，则有

$$F(E(y_\nu))\in\nu F(E(x))+(1-\nu)F(E(y))-D \tag{4}$$

则$y_\nu\in D$.

由μ,ν的定义，有$0\leqslant\nu<\bar{\lambda}<\mu\leqslant1$．由性质1、条件C′，有

$$E(x_\mu)+\lambda\eta(E(y_\nu),E(x_\mu))=E(y)+[\lambda\nu+\mu(1-\lambda)]\eta(E(x),E(y))\qquad\forall\lambda\in(0,1)$$

从而

$$\lambda F(E(y_\nu))+(1-\lambda)F(E(x_\mu))-D\in[\lambda\nu+(1-\lambda)\mu]F(E(x))+[1-\lambda\nu-(1-\lambda)\mu]F(E(y))-D$$

则由(3)－(4)式，有

$$F(E(x_\mu)+\lambda\eta(E(y_\nu),E(x_\mu)))\in[\lambda\nu+(1-\lambda)\mu]F(E(x))+[1-\lambda\nu-(1-\lambda)\mu]F(E(y))-D$$

从而，对于$\forall\lambda\in(0,1)$，$F(E(x_\mu)+\lambda\eta(E(y_\nu),E(x_\mu)))\in\lambda F(E(y_\nu))+(1-\lambda)F(E(x_\mu))-D$，与(2)式矛盾，从而充分性得证.

推论1　设$F:S\longrightarrow Y$是E-不变凸集S上的$*$-下半连续映射且满足条件$F(E(y)+\eta(E(x),E(y)))\in F(E(x))-D$，$\eta$满足条件C′．则$F$是$D$-$E$-预不变凸映射当且仅当存在$\alpha\in(0,1)$，使得$\forall x,y\in S$，有$F(E(y)+\alpha\eta(E(x),E(y)))\in\alpha F(E(x))+(1-\alpha)F(E(y))-D$.

3　*D-E*-预不变凸性、严格*D-E*-预不变凸性和半严格*D-E*-预不变凸性

本节将讨论D-E-预不变凸性、严格D-E-预不变凸性和半严格D-E-预不变凸性之间的关系.

定理3　设η满足条件C′，$F:S\longrightarrow Y$是E-不变凸集S上的D-E-预不变凸向量值映射，且满足条件：存在$\alpha\in(0,1)$，使得$\forall x,y\in S$，$x\neq y$，有

$$F(E(y)+\alpha\eta(E(x),E(y)))\in\alpha F(E(x))+(1-\alpha)F(E(y))-\operatorname{int}D \tag{5}$$

则F是严格D-E-预不变凸向量值映射.

证　假设F不是严格D-E-预不变凸向量值映射，则存在$x,y\in S$，$x\neq y$，存在$\lambda\in(0,1)$，使得

$$F(E(y)+\lambda\eta(E(x),E(y)))\notin\lambda F(E(x))+(1-\lambda)F(E(y))-\operatorname{int}D \tag{6}$$

选取β_1,β_2，$0<\beta_1<\beta_2<1$，令$\lambda=\alpha\beta_1+(1-\alpha)\beta_2$，

$$E(\bar{x})=E(y)+\beta_1\eta(E(x),E(y))\qquad E(\bar{y})=E(y)+\beta_2\eta(E(x),E(y))$$

因为F是D-E-预不变凸向量值映射，则有

$$F(E(\bar{x})),F(E(\bar{y}))\in\beta_2F(E(x))+(1-\beta_2)F(E(y))-D \tag{7}$$

由性质 1 有 $E(\bar{y})+\alpha\eta(E(\bar{x}), E(\bar{y}))=E(y)+\lambda\eta(E(x), E(y))$. 再根据(5)式，有

$$F(E(y)+\lambda\eta(E(x), E(y)))\in\alpha F(E(\bar{x}))+(1-\alpha)F(E(\bar{y}))-\operatorname{int} D \tag{8}$$

由(7),(8)式，有 $F(E(y)+\lambda\eta(E(x), E(y)))\in\lambda F(E(x))+(1-\lambda)F(E(y))-\operatorname{int} D$. 这与(6)式矛盾，即证得 F 是严格 D-E- 预不变凸向量值映射.

定理 4 设 η 满足条件 C′, F: $S\longrightarrow Y$ 是 E-不变凸集 S 上的半严格 D-E- 预不变凸向量值映射，且满足条件：存在 $\alpha\in(0,1)$，使得 $\forall x,y\in S$, $x\neq y$，有

$$F(E(y)+\alpha\eta(E(x), E(y)))\in\alpha F(E(x))+(1-\alpha)F(E(y))-\operatorname{int} D \tag{9}$$

则 F 是严格 D-E- 预不变凸映射.

证 因为 F 是半严格 D-E- 预不变凸映射，故只需在 $f(E(x))=f(E(y))$ 且 $x\neq y$ 时证得 $F(E(y)+\lambda\eta(E(x), E(y)))\in\lambda F(E(x))+(1-\lambda)F(E(y))-\operatorname{int} D=F(E(x))-\operatorname{int} D$, $\forall\lambda\in(0,1)$.

令 $E(\bar{x})=E(y)+\alpha\eta(E(x), E(y))$. 由(9)式，对于 $\forall x,y\in S$, $x\neq y$，有

$$F(E(\bar{x}))=F(E(y)+\alpha\eta(E(x), E(y)))\in F(E(x))-\operatorname{int} D \tag{10}$$

对于 $\forall\lambda\in(0,1)$，当 $\lambda<\alpha$ 时，取 $\mu=\dfrac{\alpha-\lambda}{\alpha}$，则 $\mu\in(0,1)$. 再根据条件 C′，可得

$$E(\bar{x})+\mu\eta(E(y), E(\bar{x}))=E(y)+\lambda\eta(E(x), E(y))$$

由 F 的半严格 D-E- 预不变凸性和(10)式，可得 $F(E(y)+\lambda\eta(E(x), E(y)))\in F(E(x))-\operatorname{int} D$.

当 $\lambda>\alpha$ 时，取 $\nu=\dfrac{\lambda-\alpha}{1-\alpha}$，则 $\nu\in(0,1)$. 再由条件 C′，可得

$$E(\bar{x})+\nu\eta(E(x), E(\bar{x}))=E(y)+\lambda\eta(E(x), E(y))$$

由 F 的半严格 D-E- 预不变凸性和(10)式，可得 $F(E(y)+\lambda\eta(E(x), E(y)))\in F(E(x))-\operatorname{int} D$.

综上所述，即证得 F 是严格 D-E- 预不变凸映射.

定理 5 设 η 满足条件 C′, F: $S\longrightarrow Y$ 是 E-不变凸集 S 上的半严格 D-E- 预不变凸映射，且满足 $*$-下半连续性，则 F 是 D-E- 预不变凸映射.

证 令 $x,y\in S$，当 $F(E(x))\neq F(E(y))$ 时，由 F 的半严格 D-E- 预不变凸性，可得

$$F(E(y)+\lambda\eta(E(x), E(y)))\in\lambda F(E(x))+(1-\lambda)F(E(y))-D \qquad \forall\lambda\in(0,1)$$

当 $F(E(x))=F(E(y))$ 时，为了证得 F 是 D-E- 预不变凸映射，只需要说明 $F(E(y)+\lambda\eta(E(x), E(y)))\in F(E(x))-D$, $\forall\lambda\in(0,1)$.

反证法，假设存在 $\alpha\in(0,1)$，使得

$$F(E(y)+\alpha\eta(E(x), E(y)))\notin F(E(x))-D \tag{11}$$

令 $E(z_\alpha)=E(y)+\alpha\eta(E(x), E(y))$. 因为 $F(x)-D$ 是闭凸集，所以由凸集的强分离定理，可知存在 $0\neq q\in Y^*$, $b\in\mathbb{R}$, $\forall d\in D$，使得

$$q(F)(E(z_\alpha))>q[(F)(E(x))-d] \tag{12}$$

因为 D 是锥，对于 $\forall d\in D$，有 $q(d)\geqslant 0$，推得 $q\in D^*$.

由 $0\in D$ 和(12)式，可得

$$q(F)(E(z_\alpha))>b\geqslant q(F)(E(x)) \tag{13}$$

因为 F 是 $*$-下半连续的，存在 $\beta(\alpha<\beta<1)$，使得

$$q(F)(E(z_\beta))=q(F)(E(y)+\beta\eta(E(x), E(y)))>q(F)(E(x))=q(F)(E(y)) \tag{14}$$

根据条件 C′，有 $E(z_\beta)=E(z_\alpha)+\dfrac{\beta-\alpha}{1-\alpha}\eta(E(x), E(z_\alpha))$.

从而，F 的半严格 D-E- 预不变凸性，有

$$F(E(z_\beta))\in\frac{\beta-\alpha}{1-\alpha}F(E(x))+\left(1-\frac{\beta-\alpha}{1-\alpha}\right)F(E(z_\alpha))-\operatorname{int} D \tag{15}$$

又因为 $q\in D^*$，所以由(13)式和(14)式，可导出

$$q(F)(E(z_\beta))\in\frac{\beta-\alpha}{1-\alpha}q(F)(E(x))+\left(1-\frac{\beta-\alpha}{1-\alpha}\right)q(F)(E(z_\alpha))<q(F)(E(z_\alpha)) \tag{16}$$

根据条件 C′，有 $E(z_\alpha)=E(z_\beta)+\left(1-\dfrac{\alpha}{\beta}\right)\eta(E(y),E(z_\beta))$，从而，由(14)式和 F 的半严格 D-E- 预不变凸性，有

$$F(E(z_\alpha))\in\left(1-\frac{\alpha}{\beta}\right)F(E(x))+\frac{\alpha}{\beta}F(E(z_\beta))-\operatorname{int}D \tag{17}$$

因为 $q\in D^*$，所以由(14)式和(17)式，可导出 $q(F)(E(z_\alpha))<q(F)(E(z_\beta))$. 这与(16)式矛盾，即证得 F 是 D-E- 预不变凸映射.

定理 6　设 η 满足条件 C′，F：$S\longrightarrow Y$ 是 E- 不变凸集 S 上的 D-E- 预不变凸映射，且满足条件：$\forall x,y\in S$，$F(x)\neq F(y)$，存在 $\alpha\in(0,1)$，使得

$$F(E(y)+\alpha\eta(E(x),E(y)))\in\alpha F(E(x))+(1-\alpha)F(E(y))-\operatorname{int}D \tag{18}$$

则 F 是半严格 D-E- 预不变凸映射.

证　对于 $\forall x,y\in S$，$F(x)\neq F(y)$，$\lambda\in(0,1)$，有

$$F(E(y)+\lambda\eta(E(x),E(y)))\in\lambda F(E(x))+(1-\lambda)F(E(y))-D \tag{19}$$

若 $\lambda\leqslant\alpha$，由条件 C′，有 $E(y)+\dfrac{\lambda}{\alpha}\eta(E(y)+\alpha\eta(E(x),E(y)),E(y))=E(y)+\lambda\eta(E(x),E(y))$，结合(18)式和(19)式，可得

$$F(E(y)+\lambda\eta(E(x),E(y)))\in\lambda F(E(x))+(1-\lambda)F(E(y))-\operatorname{int}D \tag{20}$$

若 $\lambda>\alpha$，则 $0<\dfrac{1-\lambda}{1-\alpha}<1$. 由条件 C′，有

$$E(y)+\alpha\eta(E(x),E(y))+\left(1-\frac{1-\lambda}{1-\alpha}\right)\eta(E(x),E(y)+\alpha\eta(E(x),E(y)))=E(y)+\lambda\eta(E(x),E(y))$$

结合(18)式和(19)式，可得

$$F(E(y)+\lambda\eta(E(x),E(y)))\in\lambda F(E(x))+(1-\lambda)F(E(y))-\operatorname{int}D \tag{21}$$

从而由(20)式和(21)式，可知 F 是半严格 D-E- 预不变凸映射.

4　*D*-*E*- 预不变凸性与 *D*-*E*- 预不变拟凸性、严格 *D*-*E*- 预不变拟凸性和半严格 *D*-*E*- 预不变拟凸性

本节将分别讨论 D-E- 预不变凸性与 D-E- 预不变拟凸性、严格 D-E- 预不变拟凸性和半严格 D-E- 预不变拟凸性之间的关系.

定理 7　设 η 满足条件 C′，F：$S\longrightarrow Y$ 是半严格 D-E- 预不变拟凸映射，若存在 $\alpha\in(0,1)$，使得 $\forall x,y\in S$，有 $F(E(y)+\alpha\eta(E(x),E(y)))\in\alpha F(E(x))+(1-\alpha)F(E(y))-D$，则 F 是 E- 不变凸集 S 上的 D-E- 预不变凸映射.

证　假设 F 不是 D-E- 预不变凸映射，则存在 $x,y\in S$，$\beta\in(0,1)$，使得

$$F(E(y)+\beta\eta(E(x),E(y)))\notin\beta F(E(x))+(1-\beta)F(E(y))-D \tag{22}$$

令 $A=\{\lambda\in[0,1]:F(E(y)+\lambda\eta(E(x),E(y)))\in\lambda F(E(x))+(1-\lambda)F(E(y))-D,\ \forall x,y\in S\}$，由引理 2，$A$ 在$[0,1]$中稠密，存在 $\mu,\omega\in A$，$0<\mu<\beta<\omega<1$，使得

$$\begin{cases}F(E(z_\beta))\notin\mu F(E(x))+(1-\mu)F(E(y))-D\\ F(E(z_\beta))\notin\omega F(E(x))+(1-\omega)F(E(y))-D\end{cases} \tag{23}$$

其中 $E(z_\beta)=E(y)+\beta\eta(E(x),E(y))$.

令 $t_1=\dfrac{\beta-\mu}{1-\mu}<\beta$，$t_2=\dfrac{\beta}{\omega}>\beta$，由条件 C′ 和性质 1，得

$$E(z_\beta)=E(z_{t_1})+\mu\eta(E(x),E(z_{t_1}))\qquad E(z_\beta)=E(y)+\omega\eta(E(z_{t_2}),E(y))$$

其中 $E(z_{t_1})=E(y)+t_1\eta(E(x),E(y))$，$E(z_{t_2})=E(y)+t_2\eta(E(x),E(y))$.

因为 $\mu,\omega\in A$，所以

$$\begin{cases}F(E(z_\beta))\in\mu F(E(x))+(1-\mu)F(E(z_{t_1}))-D\\ F(E(z_\beta))\in\omega F(E(z_{t_2}))+(1-\omega)F(E(y))-D\end{cases} \tag{24}$$

由(24)式,得

$$F(E(z_{t_1})) \notin F(E(y)) - D \qquad F(E(z_{t_2})) \notin F(E(x)) - D \tag{25}$$

下面分两种情形去考虑:

情形 1 $F(E(x)) \neq F(E(y))$. 由 F 的 D-E- 预不变拟凸性和(25)式,得到

$$F(E(z_{t_1})) \in F(E(x)) - \operatorname{int} D \qquad F(E(z_{t_2})) \in F(E(y)) - \operatorname{int} D$$

则由(24)式,得到 $F(E(z_\beta)) \in F(E(x)) - \operatorname{int} D$,$F(E(z_\beta)) \in F(E(y)) - \operatorname{int} D$. 从而 $F(E(z_\beta)) \in \beta F(E(x)) + (1-\beta)F(E(y)) - \operatorname{int} D$,与(22)式矛盾.

情形 2 $F(E(x)) = F(E(y))$. 由(22)式、性质 1 和 $F(E(z_\beta)) \neq F(E(y))$,得到

$$E(z_{t_1}) = E(y) + \frac{\beta - \mu}{\beta(1-\mu)}\eta(E(z_\beta), E(y))$$

由 F 的半严格 D-E- 预不变拟凸性和(25)式,有 $F(E(z_{t_1})) \in F(E(z_\beta)) - \operatorname{int} D$. 结合(24)式,有

$$F(E(z_\beta)) \in \mu F(E(x)) + (1-\mu)F(E(z_\beta)) - \operatorname{int} D$$

所以 $F(E(z_\beta)) \in \beta F(E(x)) + (1-\beta)F(E(y)) - \operatorname{int} D$,与(22)式矛盾.

由定义 4,严格 D-E- 预不变拟凸映射是半严格 D-E- 预不变拟凸映射,根据定理 7,可获得下面的推论:

推论 2 设 η 满足条件 C′,$F: S \longrightarrow Y$ 是严格 D-E- 预不变拟凸映射,若存在 $\alpha \in (0, 1)$,使得 $\forall x, y \in S$,有

$$F(E(y) + \alpha\eta(E(x), E(y))) \in \alpha F(E(x)) + (1-\alpha)F(E(y)) - D$$

则 F 是 E-不变凸集 S 上的 D-E- 预不变凸映射.

类似于定理 7 的证明方法,可得到下面的定理:

定理 8 设 η 满足条件 C′,$F: S \longrightarrow Y$ 是 D-E- 预不变拟凸映射,若存在 $\alpha \in (0, 1)$,使得 $\forall x, y \in S$,有

$$F(E(y) + \alpha\eta(E(x), E(y))) \in \alpha F(E(x)) + (1-\alpha)F(E(y)) - D$$

则 F 是 E-不变凸集 S 上的 D-E- 预不变凸映射.

5 *D*-*E*- 预不变凸规划问题

考虑下面的数学规划问题:

(VP_0) $\min\limits_{x \in S} F(x)$,其中 S 是 E-不变凸集,$F: S \longrightarrow Y$ 是向量值映射.

定义 6[16] 令 $F(E(S)) = \bigcup\limits_{x \in S} F(E(x))$,如果 $(F(E(\bar{x})) - D\backslash\{0_Y\}) \cap F(E(S)) = \varnothing$,则 $\bar{x} \in S$ 是问题(VP_0)的 E- 全局最优解;如果存在 $\bar{x}$ 的邻域 U,使得 $(F(E(\bar{x})) - D\backslash\{0_Y\}) \cap F(E(S \cap U)) = \varnothing$,则 $\bar{x} \in S$ 是问题(VP_0)的 E-局部最优解.

定理 9 设 S 是 E-不变凸集,$F: S \longrightarrow Y$ 是 D-E- 预不变凸映射,则问题(VP_0)的任一 E-局部最优解是 E-全局最优解.

证 设 $\bar{x}$ 是问题(VP_0)的 E- 局部最优解,则存在 $\bar{x}$ 的邻域 U,使得

$$(F(E(\bar{x})) - D\backslash\{0_Y\}) \cap F(E(S \cap U)) = \varnothing \tag{26}$$

反证法,假设 $\bar{x}$ 不是问题(VP_0)的 E-全局最优解,则 $(F(E(\bar{x})) - D\backslash\{0_Y\}) \cap F(E(S)) \neq \varnothing$. 即存在 $x_0 \in S$,使得 $F(E(x_0)) \in F(E(\bar{x})) - D\backslash\{0_Y\}$.

因为 S 是 E- 不变凸集,所以 $\forall \alpha \in (0, 1)$,有 $E(\bar{x}) + \alpha\eta(E(\bar{x}), E(x_0)) \in S$. 根据 $F: S \longrightarrow Y$ 的 D-E- 预不变凸性,有

$$F(E(\bar{x}) + \alpha\eta(E(\bar{x}), E(x_0))) \in F(E(\bar{x})) - D - D\backslash\{0_Y\} \subset F(E(\bar{x})) - D\backslash\{0_Y\} \tag{27}$$

当 α 足够小时,有 $E(\bar{x}) + \alpha\eta(E(\bar{x}), E(x_0)) \in E(S \cap U)$,从而

$$F(E(\bar{x}) + \alpha\eta(E(\bar{x}), E(x_0))) \in F(E(S \cap U))$$

这就意味着(26)式与(27)式矛盾,即证得问题(VP_0)的 E- 局部最优解是 E- 全局最优解.

6 结 论

本文研究了 D-E- 预不变凸映射,借助 $*$-上半连续性、$*$-下半连续性、严格 D-E- 预不变凸性、半严

格 D-E- 预不变凸性、D-E- 预不变拟凸性、严格 D-E- 预不变拟凸性和半严格 D-E- 预不变拟凸性，获得了不可微 D-E- 预不变凸映射的一些特征性质，同时指出了 D-E- 预不变凸规划问题的 E -局部最优解和 E -全局最优解之间的关系. 所得结果(定理 1、定理 2、定理 3 和定理 6) 把文献[11] 中 D -预不变凸映射的相关结论(定理 2.2、定理 2.3、定理 3.3、定理 3.5、定理 3.7 和定理 3.9) 分别推广到 D-E- 预不变凸映射. 某种意义上，这些特征性质也为判别映射的 D-E- 预不变凸性提供了一个新的判别角度. 而 D-E- 预不变凸映射优化问题的最优性条件、鞍点定理以及对偶定理，将是后续要研究的课题.

参考文献：

[1] 龚黔芬，安　军. 强伪单调均衡问题近似点方法的收敛性 [J]. 西南大学学报(自然科学版)，2020，42(9)：101-105.

[2] 邵正梅，欧增奇. 具有凹凸非线性项的 Kirchhoff 方程的多解性 [J]. 西南师范大学学报(自然科学版)，2020，45(4)：25-29.

[3] 郭　栋，敖　恩，汤　获，等. 一类双单叶近于凸解析函数类的系数估计 [J]. 西南师范大学学报(自然科学版)，2020，45(10)：16-20.

[4] WEIR T，MOND B. Pre-invex Functions in Multiple Objective Optimization [J]. Journal of Mathematical Analysis and Applications，1988，136(1)：29-38.

[5] JEYAKUMAR V，OETTLI W，NATIVIDAD M. A Solvability Theorem for a Class of Quasiconvex Mappings with Applications to Optimization [J]. Journal of Mathematical Analysis and Applications，1993，179(2)：537-546.

[6] YANG X M，LI D. On Properties of Preinvex Functions [J]. Journal of Mathematical Analysis and Applications，2001，256(1)：229-241.

[7] YANG X M，LI D. Semistrictly Preinvex Functions [J]. Journal of Mathematical Analysis and Applications，2001，258(1)：287-308.

[8] YANG J，YANG X M. Two New Characterizations of Preinvex Functions [J]. Dynamics of Continuous Discrete and Impulsive Systems，2012，3(3)：405-410.

[9] YANG X M. A Note on Preinvexity [J]. Journal of Industrial and Management Optimization，2014，10(4)：1319-1321.

[10] KAZMI K R. Some Remarks on Vector Optimization Problems [J]. Journal of Optimization Theory and Applications，1998，96(1)：133-138.

[11] PENG J W，ZHU D L. On D-Preinvex Type Functions [J]. Journal of Inequalities and Applications，2006，2006(1)：1-14.

[12] LONG X J，PENG Z Y，ZENG B. Remark on Cone Semistrictly Preinvex Functions [J]. Optimization Letters，2009，3(3)：337-345.

[13] 彭建文. 向量值映射 D-η-预不变真拟凸的性质 [J]. 系统科学与数学，2003，23(3)：306-314.

[14] 唐莉萍，杨新民. 关于 D-半预不变凸性的某些新性质 [J]. 应用数学和力学，2015，36(3)：325-331.

[15] YOUNESS E A. E-Convex Sets，E-Convex Functions，and E-Convex Programming [J]. Journal of Optimization Theory and Applications，1999，102(2)：439-450.

[16] YANG X M. On E-Convex Sets，E-Convex Functions and E-Convex Programming [J]. Journal of Optimization Theory and Applications，2001，109(3)：699-704.

[17] JIAN J B. Incorrect Results for E-Convex Functions and E-Convex Programming [J]. Journal of Mathematical Research & Exposition，2003，23(3)：461-466.

[18] FULGA C，PREDA V. Nonlinear Programming with E-Preinvex and Local E-Preinvex Functions [J]. European Journal of Operational Research，2009，192(3)：737-743.

[19] 彭再云，李科科，范琳煊. 向量值 D-E-预不变真拟凸映射研究 [J]. 系统科学与数学，2016，36(8)：1298-1307.

责任编辑　廖　坤