

DOI:10.13718/j.cnki.xsxb.2021.10.024

# 数学分析课程的优化与变革研究<sup>①</sup>

胡 凯

西南大学 数学与统计学院, 重庆 400715

**摘要:** 近年来本科生的知识结构与水平已发生显著改变, 国家的科技发展战略也逐步调整. 现行的数学分析课程内容与教学方案已不能完全满足新时代人才的培养需求. 本文深入剖析了数学分析课程的内容设置与课堂教学的现状, 指出了当前面临的知识衔接不足、教学方式单一、重理论轻应用等方面的突出问题, 阐述了数学分析课程改革的必要性和迫切性. 依循我国高等教育课程的改革趋势, 有针对性地提出了整合资源、创新手段、交叉融合、面向应用的建设思路; 实现课程知识完备化、差异化, 内容的立体化、应用化, 教学资源可视化、互动化, 并结合具体案例阐述了各种措施的特点、作用和可行性, 旨在探索本科数学分析课程改革的优化方案, 打造顺应时代发展的数学分析课程.

**关键词:** 数学分析; 课程改革; 技术革新; 应用导向

**中图分类号:** G642.0

**文献标志码:** A

**文章编号:** 1000-5471(2021)10-0159-06

## On Course Reformation of Mathematics Analysis

HU Kai

*School of Mathematics and Statistics, Southwest University, Chongqing 400715, China*

**Abstract:** The knowledge of undergraduates gradually varies in recent years. Current content and teaching programme of mathematical analysis cannot satisfy the new demand of professional education. An intensive analysis is made on content and practical situation of this course. Main problems involve the knowledge gap between secondary and tertiary education, inadequate lessons on application and so on. According to the trend of curriculum reformation in tertiary education, a package of programmes has been proposed in this paper, which includes resource optimization, approach innovation, courses interplay, application enhancement. The features, function and feasibility of above programmes are discussed in detail. This paper provides a constructive plan of course reformation of mathematics analysis.

**Key words:** mathematics analysis; course reformation; technique innovation; guideline on application

① 收稿日期: 2021-04-01

基金项目: 2018 年数学与统计学院教育教学改革研究项目; 国家自然科学基金项目(11901475).

作者简介: 胡 凯, 副教授, 博士, 主要从事偏微分方程的研究.

数学分析是高校本科数学专业的基础核心课程. 它在高等数学教育和科学研究中起着奠基作用, 对学生形成现代数学的观念、科学的思维方式影响深远, 为实变函数、复变函数、概率统计、拓扑学、微分几何等后续课程打下专业基础. 数学分析的课程建设是关系到本科教学水平、人才培养质量的重要工作.

然而随着我国中学数学课程改革的推进, 本科新生的知识结构与水平已发生显著改变. 同时, 国家的科技发展战略对毕业生的综合专业能力提出了更高的要求. 现行的数学分析课程内容与教学方案已不能完全满足新时代人才的培养需求. 我们在本科教学中遇到了新的挑战与困难. 本文将结合一线教学经验, 就该课程的现状和改革方向进行有益的探讨.

## 1 现行课程中出现的问题与挑战

现今数学分析主要面临两大方面的问题: 课程内容的传统性、教学方式的局限性. 具体体现为以下几方面的矛盾:

### 1.1 知识脱节, 缺乏合理有效的衔接

我国高中数学课程标准和教材每隔 10 年就有一次大的变革, 对内容设置、培养目标有诸多调整. 《普通高中数学课程标准(2017 年版)》<sup>[1]</sup>(以下简称“新课标”)取消了文理分科, 对知识版块进行了大刀阔斧的改革. 课程内容的变化主要有: 减少必修课程的内容, 以现行选修课程文科内容为基础, 建构选择性必修课程内容, 设置丰富多样的适合学生不同发展需求的任意选修课程; 对原有课程内容进行重组和调整, 使得课程内容更具有系统性和完整性<sup>[2]</sup>. 新课标<sup>[1]</sup>强调基础性与实用性. 旨在培养学生的 6 个数学核心素养: 数学抽象、逻辑推理、数学建模、直观想象、数学运算、数据分析.

但是大学的数学分析课程建设却相对滞后. 国内主流数学分析教材都编撰于 2000 年前后, 虽多次再版微调, 但内容仍沿袭了古典的分析学范式. 使得数学分析与高中数学内容脱节, 拉大了基础教育与高等教育之间的知识差距. 具体来讲, 新课标<sup>[1]</sup>对许多知识点进行了弱化甚至删减. 与数学分析直接相关的内容主要反映在:

(1) 函数部分——删除了映射、逆映射, 弱化了反函数.

(2) 三角函数部分——淡化了和差化积、积化和差、半角公式的应用, 删除了万能公式、辅助角公式、正(余)割公式, 删除了反三角函数.

(3) 不等式部分——弱化了不等式的证明, 删除了绝对值不等式(三点不等式).

这些内容都是数学分析学习所必需的基本常识. 相关知识的缺乏提高了数学分析的学习门槛. 因此我们的专业课程也必须与时俱进, 实行内容的变革, 减少知识点的盲区, 完成中学到大学的顺利过渡.

### 1.2 教学方式单一

传统的数学分析课堂以老师的讲授为主. 由于课时的压力, 数学分析课堂以满堂灌输的方式为主, 学生常处于被动接受、无暇思考的状态, 这极大地影响了教学的效果, 减弱了学生的学习兴趣. 数学分析知识量大, 线索错综复杂, 由于缺乏归纳和梳理, 很多学生知识碎片化严重, 没有建立起一套完整的知识体系. 从 2020 年以来, 本科线上教学的普及使这些问题更加突出.

### 1.3 知识扁平化

数学分析强调课程的内在独立性, 能独立于其他课程形成一套完整、严密的理论体系. 虽然它与实变函数、复变函数、泛函分析、几何拓扑、概率统计等课程有着紧密的知识联系, 但是这些联系往往在教学实践中被淡化, 甚至忽视. 客观上造成学生知识扁平化, 局限于本课程之内, 没有形成发散的宏观知识体系. 所谓只见树木, 不见森林. 这实际上妨碍了学生专业水平的提升, 制约了创新能力的发展.

### 1.4 重理论轻应用

新课标<sup>[1]</sup>将数学建模作为高中数学核心素养之一. 教材编写增加了数学建模、数学探究活动, 补充了

经济学模型、社会学模型等内容. 旨在培养学生的数学应用能力和创新能力. 中学数学教育已全面转向实用化, 而大学数学仍相对保守. 我国理工科的高等教育效仿了前苏联的模式. 数学分析课程强化基础理论, 强调严密性和内容深度. 在教学实践中侧重对概念的解析、思想的阐述、方法的训练, 而忽视了微积分广泛的应用, 与现代科学的发展脱钩. 笔者在调研中发现, 学生普遍认为数学分析内容深刻、技巧性强、难于掌握, 课程不生动活泼, 缺乏吸引力, 学会了也不知道有何用途, 对其形成了程式化、抽象化的刻板印象.

微积分是问题驱动的实用科学, 曾在世界两次工业革命中作出了巨大贡献. 从二战以后, 应用数学与交叉科学蓬勃发展, 以计算数学、人工智能、生命科学、航天技术为首的新兴学科异军突起, 带来社会生产力新的飞跃. 数学的应用化和多学科的交叉融合成为 21 世纪数学发展的大趋势. 传统的数学分析课程自然面临着冲击与挑战. 沃尔夫奖与阿贝尔奖得主、美国国家科学院院士 Lax<sup>[3]</sup>指出: “应用的观点对亟需改革的本科课程是至关重要的, 尤其是在最薄弱的微积分方面. 旧的微积分课程用大量的篇幅教授古老的技巧, 这些技巧比计算机上的功能要差得多. 我们必须认真考虑到底应该学些什么.”

2020 年教育部组织部分高校开展数学等基础学科招生改革试点, 实行强基计划. 以基础科学促进尖端科技发展, 聚焦智能科技、先进制造、国家安全等关键领域, 培养国家紧缺的创新型高端人才. 国家的战略导向明确地向应用发展.

由此可见, 数学分析的课程优化是必要的、迫切的. 既顺应高等教育的改革趋势, 也契合当下国家科技发展的战略需求.

## 2 课程改革的建设性思路

笔者基于长期的一线教学经验和深入调研, 主要针对西南大学数学专业的数学分析课程, 提出从以下几方面践行课程优化与改革:

### 2.1 知识的完备化、差异化

课程改革的第一步就是实现内容的完备化, 弥补从基础数学到高等数学存在的知识空白. 普通高中数学教材<sup>[4]</sup>中删除了不少数学分析所需的必备常识, 给本科新生专业入门制造了巨大的障碍. 为此我们需要在课程的前期阶段将衔接性知识进行补充完善. 具体来讲:

- (1) 增加映射、逆映射的概念, 建立并强化映射思想;
- (2) 增加反三角函数的概念, 介绍相关函数的性质;
- (3) 补充三角变换公式;
- (4) 增加绝对值不等式及其应用, 加强不等式证明技巧的训练.

映射是现代数学的一个核心概念. 数学家们摆脱了运动变化、直观经验的束缚, 用映射的观点来认识变量间的关系, 极大地拓宽了人类的认知范围. 在映射的基础上才能形成对函数(特别是病态函数)的正确认识, 建立起实变函数、线性代数等数学理论. 由于缺乏映射的观念, 近些年的新生普遍反映专业学习十分吃力. 这里以反函数连续性定理为例, 来阐述重塑映射观点的重要性.

**定理 1** 若函数  $f$  在  $[a, b]$  上严格单调且连续, 则反函数  $f^{-1}$  在其定义域  $[f(a), f(b)]$  或  $[f(b), f(a)]$  上连续.

分析: 高中对反函数的理解仅限于指数-对数函数、幂函数, 知道  $f$  和  $f^{-1}$  图像的对称性, 学会反解、改写、值域互易的求解步骤. 这一认识是粗浅片面的. 因为变量  $x, y$  的改写, 使得图像呈现对称性. 这让学生习惯性地将  $x$  视为自变量, 试图用对称图像  $y = f^{-1}(x)$  来分析和证明该定理, 最后陷入混乱的记号和错综复杂的逻辑关系当中.

我们只有从逆映射的角度出发, 才能正确地理解反函数的概念. 用映射的观点看,  $y = f(x)$  和  $x = f^{-1}(y)$  其实是同一对应关系的两种表达形式. 它确定了 2 个独立空间上不同数集之间的对应法则. 呈现在

$xy$  平面中是同一条曲线. 高中阶段变量的改写, 造成了图像的对称翻转, 导致认知的错位. 通过映射思想的建立, 能让学生破除旧认识, 正确理解反函数连续性定理的证明思路.

**证** 不妨设  $y = f(x)$  在  $[a, b]$  上严格递增, 则  $f: [a, b] \rightarrow [f(a), f(b)]$  是一一映射. 利用连续函数介值定理可得  $f([a, b]) = [f(a), f(b)]$ . 任取反函数的自变量  $y_0 \in (f(a), f(b))$ , 则  $x_0 = f^{-1}(y_0) \in (a, b)$ . 对任意的  $\varepsilon > 0$ , 对于充分靠近  $y_0$  的自变量  $y$ , 要证  $|f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)| < \varepsilon$ , 即  $|x - x_0| < \varepsilon$ , 其中  $x = f^{-1}(y)$ . 不妨设  $0 < \varepsilon < \min\{x_0 - a, b - x_0\}$ . 记  $y_1 = f(x_0 - \varepsilon)$ ,  $y_2 = f(x_0 + \varepsilon)$ . 利用  $f$  的递增性可得  $f(a) < y_1 < y_2 < f(b)$ , 如图 1 所示. 要取一个  $y_0$  的小邻域  $U(y_0)$ , 使得邻域的像  $f^{-1}(U(y_0))$  完全落在区间  $(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$  当中. 因此可取半径  $\delta = \min\{y_0 - y_1, y_2 - y_0\} > 0$ , 结合  $f$  的递增性可得, 对任意  $y \in U(y_0, \delta)$ , 有

$$x = f^{-1}(y) \in (f^{-1}(y_0 - \delta), f^{-1}(y_0 + \delta)) \subset (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$$

即  $|x - x_0| < \varepsilon$ . 于是  $x = f^{-1}(y)$  在点  $y_0$  处连续. 区间端点  $f(a)$  和  $f(b)$  处的单侧连续性同理可证.

这个案例充分说明了在现行课程中建立并巩固映射观点的必要性和重要性. 映射的观点为研究反函数求导、隐函数定理、换元积分法打下了基础, 更是后续专业课程不可或缺的工具.

三角函数是第二类重要的衔接性内容. 数学分析应在预备知识章节补充反三角函数  $\arcsin x$ ,  $\arccos x$ ,  $\arctan x$ ,  $\operatorname{arccot} x$  的函数性质, 为学习导函数基本公式、换元积分法做好铺垫. 在积分学版块之前, 补充三角函数的和差化积公式、正余割公式、辅助角公式、万能公式等常用结论. 它们是三角有理式积分计算的必要手段. 此外, 还要适时补充绝对值不等式、伯努利不等式、柯西不等式等常用不等式. 这对于学习极限的  $\varepsilon$ - $\delta$  定义、插值方法、积分估计等将起到关键作用.

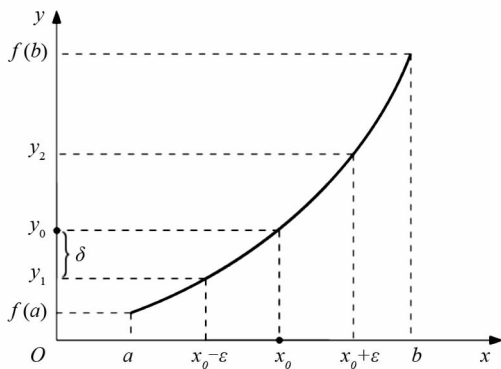


图 1  $y = f(x)$

增加了课程内容必然会带来课时的压力. 所以笔者提出要对教学内容进行差异化处理. 新版教材<sup>[4]</sup>将一部分大学的内容下放到高中. 例如导数的概念、导数四则运算、基本初等函数的求导公式、函数的极值与最值、函数草图等. 我们需要对重复性内容进行精简, 重新编排, 压缩课时. 对授课内容进行差异化处理, 重核心、重应用. 重点讲授数列极限、中值定理、定积分、级数理论等核心内容. 同时, 多媒体技术的辅助也可极大地提高课堂效率, 解决课时不足的矛盾.

## 2.2 内容的立体化、应用化

所谓的内容的立体化, 即指课程内部串联整合、外部发散延伸. 数学分析包含实数理论、极限理论、微分学、积分学、级数理论等多个知识版块, 内容庞杂, 特点鲜明. 学生折服于数学分析严谨的逻辑语言与丰富的闪光思想, 却难以将零散的知识点梳理成体系. 因此我们需引导学生以更高的观点统领全局, 进行知识的串联整合.

数学分析的核心概念就是极限——数列极限、函数极限、黎曼和式极限、级数和. 为了训练学生正确使用上述极限, 避免混淆与错用, 传统数学分析课程强调辨析区别, 这只是课程学习的初级阶段. 我们应

该重视事物的联系,有意识地用拓扑观点将所有内容有机整合起来,将极限思想升华.教材[5]在这方面进行了有益的尝试.拓扑观点的介绍只需点到为止,不必过多展开细节,目的在于激发学生探寻共性的意识,拓宽数学视野,渗透前沿科学思想.

其次,数学分析课改应注重课程的交叉融合.数学分析是实变函数、复变函数、泛函分析、微分方程等课程的理论基石,也与代数、几何、数论、概率等有着千丝万缕的联系.我们应当改变数学分析教学独立封闭的现状,积极尝试其向外发展延伸,与其他课程交叉融合.例如,数学分析将非线性问题线性化的思想,是近现代复杂科学的一大利器,有必要把它和高等代数联系起来,让学生找到课程间的思想共性.建构立体的、多元的知识体系,达到融会贯通的目的.

许多教材都设置了应用章节,介绍微积分在几何学、牛顿力学、运筹学中的广泛应用.但是我们在教学实践中往往淡化了这些章节的内容,侧重教授理论推导、计算技巧.需改变长久以来纯理论化的现状,回归微积分的应用本质是未来课程建设的大势所趋.不仅让学生深入理解微分、积分、梯度、散度、旋度等概念的几何、物理意义,而且能将生活中的常见现象与之建立丰富的联系,提高学生知识迁移、举一反三的能力.教学方法可采用问题驱动的模式,以实际案例为背景,再现问题的起源、抽象、建立、求解过程,有利于生动准确地展示数学思想,提高学生的学习兴趣,激发应用意识.北京大学和复旦大学在这方面进行了大胆的探索,编撰了理论与实用兼顾的示范性教材<sup>[6-7]</sup>,他们的成功经验值得借鉴.需要指出:即便强调应用,数学分析与数学建模两门课程是分工明确的.数学建模中包含的连续型模型,可以用微积分的方法,借助计算机的手段进行求解.本科数学建模课的重心主要放在现成模型的归纳、算法的学习与使用上.而模型的建立一直是薄弱环节.数学分析的课程改革目的之一就是培养学生数学建模的基础能力,弥补这方面的不足,提高学生的数学核心素养.

### 2.3 教学资源的可视化、互动化

为了解决传统课堂教学形式单一、效率低下、交互性差的缺点,笔者建议要推进多媒体教学手段的升级与创新.从外部大环境的发展来看,在线教育产业兴起,互联网上涌现出海量的学习资源.许多资源内容丰富、制作精良.学生接受知识的特点已逐渐从文字符号往图片、声音、视频等方式过渡.YouTube、B站、知乎等网站成为大学生自主学习的主要平台.从大学教育自身来看,老师们经历了2020年的线上教学,体验了新技术的优势与便利,汲取了宝贵的实战经验,已为教学手段的革新奠定了基础.

新时代的课堂教学应与多媒体技术深度融合,向专业化、可视化、趣味化转变.西南大学部分专业课程教学已经开展了这方面的实践,参见文献[8-12].充分利用网络资源素材,丰富课堂内容,提高课堂效率.内容呈现方式要突破静态板书和幻灯片,更多植入动画、小程序、短视频,生动地呈现数学思想和原理,并持续地吸引学生的课堂关注.例如在定积分版块,黎曼积分的定义、达布可积准则知识信息量大,逻辑推理缜密,一直是教学的重难点.传统板书速度慢,与讲授结合度差,对学生的几何想象力要求较高.通常需要耗费一个课时才能完成概念教学.战线过长、概念繁复、思想艰深,都使学生注意力下降、迅速遗忘,达不到预期的教学效果.如果借助动画程序辅助概念教学,可使内容之间衔接紧密,讲授流畅连贯,迅速地到达核心内容.动态的图像代替静态的符号,能够牢牢抓住学生的注意力,刺激学生思考联想,使其易于领悟数学思想的精髓.此外,在多元微积分的版块,多维度的动图程序可全方位地展示对象的几何特征,利于学生观察理解偏导数、梯度、线面积分、重积分等概念的几何与物理意义,掌握一元与多元函数的区别与联系.这些优势都是传统平面视图所无法比拟的.

正如前文所述,知识内容的可视化不仅能更好地实现教学目标,而且能极大地提高课堂效率.这样可节约出大量的课时来完成我们规划的前两大课程目标,即衔接知识的补充与完善、内容的立体建构与应用化.丰富的多媒体资源和程序,也有利于开展课堂的探索性学习、课后的研究性学习,增强数学分析的互动性,让学生参与并喜爱这门课程.

### 3 结 语

数学分析是一门历经数百年的经典科学. 时至今日它的深刻理论仍是现代数学的思想源泉. 它在本科教学中的核心地位不可动摇. 教育信息技术的进步、新兴科学的迅猛发展给这门课程带来了新的机遇和挑战. 前有中学数学课程改革的引领, 后有国家强基战略的驱动, 数学分析课程变革势在必行. 笔者提出了整合资源、创新手段、交叉融合、面向应用的建设思路. 意在实现高中到大学知识的平稳过渡, 力求数学分析与后续专业课程的融会贯通, 顺应理论与实用并重的发展趋势, 打造优质的本科课程.

#### 参考文献:

- [1] 中华人民共和国教育部制定. 普通高中数学课程标准(2017年版) [M]. 北京: 人民教育出版社, 2018.
- [2] 吕世虎, 江 静, 李俊彦. 《普通高中数学课程标准(2017年版)》课程结构与内容的变化 [J]. 数学教学研究, 2018, 37(2): 2-7, 17.
- [3] LAX P D. The Flowering of Applied Mathematics in America [J]. SIAM Review, 1989, 31(4): 533-541.
- [4] 中学数学课程教材研究开发中心编著. 普通高中教科书, 数学 [M]. 北京: 人民教育出版社, 2019.
- [5] 徐森林, 金亚东, 薛春华. 数学分析 [M]. 北京: 清华大学出版社, 2005.
- [6] 张筑生. 数学分析新讲 [M]. 北京: 北京大学出版社, 1990.
- [7] 陈纪修, 於崇华, 金 路. 数学分析 [M]. 3 版. 北京: 高等教育出版社, 2019.
- [8] 徐文学, 姚纯青. 空间解析几何课程改革的探索 [J]. 西南师范大学学报(自然科学版), 2021, 46(4): 167-171.
- [9] 李雪珊. 兴趣教学法在组合数学课程中的应用 [J]. 西南师范大学学报(自然科学版), 2016, 41(12): 167-170.
- [10] 裴 俊, 乔 丽. 高等代数课程中问题驱动式教学法 [J]. 西南师范大学学报(自然科学版), 2016, 41(12): 171-175.
- [11] 杨新荣, 林 明, 马 林. 中学生数学学习投入结构探索——基于结构方程模型的分析 [J]. 西南大学学报(自然科学版), 2021, 43(4): 1-9.
- [12] 屠西茜, 杨新荣. 成就目标定向与中学生数学学习投入的关系——数学焦虑的中介作用 [J]. 西南大学学报(自然科学版), 2021, 43(4): 27-35.

责任编辑 廖 坤