第 46 卷 第 11 期　　西南师范大学学报(自然科学版)　　2021 年 11 月
Vol. 46 No. 11　　Journal of Southwest China Normal University (Natural Science Edition)　　Nov. 2021

DOI:10.13718/j.cnki.xsxb.2021.11.001

广义凸多目标规划的最优性①

苏紫洋，　王荣波

延安大学 数学与计算机科学学院，陕西 延安 716000

摘要： 借助 Clarke 广义梯度以及凸泛函的相关性质，给出了一些新的广义凸函数：广义$(C, \alpha)-I$型凸函数、广义严格拟$(C, \alpha)-I$型凸函数以及广义严格拟伪$(C, \alpha)-I$型凸函数. 在新的广义凸性下，得到了一类多目标规划问题的若干最优性充分条件.

关 键 词： 广义$(C, \alpha)-I$型凸函数；Clarke 广义梯度；最优性充分条件；多目标规划

中图分类号：O221.2　　**文献标志码：A**　　**文章编号：** 1000-5471(2021)11-0001-07

On Optimality of Generalized Convex Multi-objective Programming

SU Ziyang,　WANG Rongbo

Yan'an University School of Mathematics and Computer Science, Yan'an Shaanxi 716000, China

Abstract: With the help of the Clarke generalized gradient and the related properties of convexfunctionals, some generalized convex functions have been given: generalized (C,α)-type I convex functions, generalized strict quasi-(C,α)-type I convex functions, and generalized strict quasi-pseudo-(C,α)-type I convex functions. Under these new generalized convexities, some sufficient condition of optimality for a class of multi-objective programming problems have been obtained.

Key words: generalized (C,α)-type I convex function; Clarke generalized gradient; optimal sufficient conditions; multi-objective programming

对于最优化领域中的多目标最优化问题的研究近些年来是一个焦点，且取得了很大成果，许多学者将凸函数进行了推广，得到了广义凸函数类. 文献[1-3]先提出了(C, α, ρ, d)-凸函数，接着定义了广义(C, α, ρ, d)型广义凸函数；文献[4]给出了$B-(C, \alpha)-I$型广义凸函数，并给出了$B-(C, \alpha)-I$型一系列广义凸函数的定义和最优性条件；文献[5]定义了$(V, \eta)-I$型对称不变凸函数.

本文在文献[4-5]的基础上引入了一类带有支撑函数的广义$(C, \alpha)-I$型凸函数，利用Clarke广义梯度并在新广义凸性的情况下，对一类多目标规划问题进行了讨论和研究，并得出了若干个最优性结果.

---

① 收稿日期：2020-10-21
基金项目：国家自然科学基金项目(61861044)；延安大学校级科研项目(YDY2019-17)；延安大学校级创新项目(YCX2020102).
作者简介：苏紫洋，硕士研究生，主要从事最优化理论、方法与应用.
通信作者：王荣波，副教授.

1 基本概念

考虑下面多目标优化问题

$$\text{MVP}\begin{cases}\min F(\boldsymbol{x})=(f_1(\boldsymbol{x})+s(\boldsymbol{x}\mid C_1),\ f_2(\boldsymbol{x})+s(\boldsymbol{x}\mid C_2),\ \cdots,\ f_k(\boldsymbol{x})+s(\boldsymbol{x}\mid C_k))\\ s.t.\ g_j(\boldsymbol{x})+s(\boldsymbol{x}\mid D_j)\leqq 0,\ j=1,2,\cdots,m\\ \boldsymbol{x}\in X\subset\mathbb{R}^n\end{cases}$$

其中：X 为 $\mathbb{R}^n$ 上的非空开集；令 $K=\{1,2,\cdots,k\}$，$M=\{1,2,\cdots,m\}$，$f_i(\boldsymbol{x})$：$X\longrightarrow\mathbb{R}$，$i\in K$，$g_j(\boldsymbol{x})$：$X\longrightarrow\mathbb{R}$，$j\in M$，$f_i(x)$ 和 $g_j(x)$ 皆为 $\boldsymbol{x}^0\in X$ 处局部 Lipschitz 函数；C_i，D_j 是 $\mathbb{R}^n$ 中对于每一个 $i\in K$ 和 $j\in M$ 的紧凸集.

对于 $\forall\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in\mathbb{R}^n$，$\boldsymbol{x}\leqq\boldsymbol{y}\Leftrightarrow\boldsymbol{x}_i\leqq\boldsymbol{y}_i$；$\boldsymbol{x}\leqslant\boldsymbol{y}\Leftrightarrow\boldsymbol{x}_i\leqq\boldsymbol{y}_i$，但 $\boldsymbol{x}\neq\boldsymbol{y}$；$\boldsymbol{x}<\boldsymbol{y}\Leftrightarrow\boldsymbol{x}_i<\boldsymbol{y}_i$，$i=1,\cdots,n$.

令 $X^0=\{\boldsymbol{x}\in X\mid g_j(\boldsymbol{x})+s(\boldsymbol{x}\mid D_j)\leqq 0,\ j\in M\}$ 为 MVP 的可行解集.

令 $J(\boldsymbol{x}_0)=\{j\mid g_j(\boldsymbol{x}_0)+s(\boldsymbol{x}_0\mid D_j)=0\}$，其中 $s(\boldsymbol{x}\mid C_i)$ 和 $s(\boldsymbol{x}\mid D_j)$ 表示在 X 上的支撑函数，其定义如下：

$$s(\boldsymbol{x}\mid C_i)=\max\{\langle\boldsymbol{\omega}_i,\boldsymbol{x}\rangle\mid\boldsymbol{\omega}_i\in C_i,\ i\in K\}$$

$$s(\boldsymbol{x}\mid D_j)=\max\{\langle\boldsymbol{\upsilon}_j,\boldsymbol{x}\rangle\mid\boldsymbol{\upsilon}_j\in D_j,\ j\in M\}$$

本文采用如下符号：

$$a_i:X\times X\longrightarrow\mathbb{R}_+$$

$$b_j:X\times X\longrightarrow\mathbb{R}_+$$

$$\alpha:X\times X\longrightarrow\mathbb{R}_+\setminus\{0\}$$

$$\sigma\in\mathbb{R}_+$$

$$\rho_i,\ \tau_j\in\mathbb{R}_+\setminus\{0\}$$

$$i\in K,\ j\in M$$

定义 1[6] 设 X 是 $\mathbb{R}^n$ 中的开集，函数 f：$X\longrightarrow\mathbb{R}^n$ 在 $\boldsymbol{x}\in X$ 上是局部 Lipschitz 的，若

$$\limsup_{\substack{\boldsymbol{y}\to\boldsymbol{x}\\ t\downarrow 0}}\frac{f(\boldsymbol{y}+t\boldsymbol{d})-f(\boldsymbol{y})}{t}$$

存在，则称此极限为函数 f 在 $\boldsymbol{x}$ 处沿方向 $\boldsymbol{d}$ 的 Clarke 广义方向导数，记作

$$f^0(\boldsymbol{x};\boldsymbol{d})=\limsup_{\substack{\boldsymbol{y}\to\boldsymbol{x}\\ t\downarrow 0}}\frac{f(\boldsymbol{y}+t\boldsymbol{d})-f(\boldsymbol{y})}{t}$$

并记 f 在 $\boldsymbol{x}$ 处沿方向 $\boldsymbol{d}$ 的 Clarke 广义次梯度为

$$\partial f(\boldsymbol{x})=\{\boldsymbol{\eta}\in\mathbb{R}^n\mid f^0(\boldsymbol{x};\boldsymbol{d})\geqslant\langle\boldsymbol{\eta},\boldsymbol{d}\rangle,\ \boldsymbol{d}\in\mathbb{R}^n\}$$

定义 2[7] (弱有效解) 设 $\boldsymbol{x}^*\in X^0$，如果不存在 $\boldsymbol{x}\in X^0$，使得

$$f(\boldsymbol{x})+s(\boldsymbol{x}\mid C_i)<f(\boldsymbol{x}^*)+s(\boldsymbol{x}^*\mid C_i)$$

则称 $\boldsymbol{x}^*$ 是 MVP 的弱有效解.

定义 3[4] (凸泛函线性定义) 设 X 是 $\mathbb{R}^n$ 中的开集，若对任意固定的 $(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\in\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n$，$\forall\lambda\in(0,1)$，$\forall\boldsymbol{z}_1,\boldsymbol{z}_2\in\mathbb{R}^n$，有

$$C(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y};\lambda\boldsymbol{z}_1+(1-\lambda)\boldsymbol{z}_2)\leqslant\lambda C(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y};\boldsymbol{z}_1)+(1-\lambda)C(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y};\boldsymbol{z}_2)$$

则称函数 C：$X\times X\times\mathbb{R}^n\longrightarrow\mathbb{R}$ 在 $\mathbb{R}^n$ 上是关于第 3 个变量的凸泛函.

性质 1[4] C：$X\times X\times\mathbb{R}^n\longrightarrow\mathbb{R}$ 在 $\mathbb{R}^n$ 上是关于第 3 个变量的凸泛函，则对 $\forall\lambda_i\in(0,1)$，$\sum\limits_{i=1}^{n}\lambda_i=1$，$\forall z_i\in\mathbb{R}^n$，有 $C\left(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y};\sum\limits_{i=1}^{n}\lambda_i\boldsymbol{z}_i\right)\leqslant\sum\limits_{i=1}^{n}\lambda_i C(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y};\boldsymbol{z}_i)$.

注 1 特殊地，若 $\lambda=0$，则 $C(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y};\lambda\boldsymbol{z})=0$，$\boldsymbol{z}\in\mathbb{R}^n$.

定义 4　如果存在 a_i，b_j，α，使得

$$a_i(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u})[(f_i(\boldsymbol{x})+\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\omega}_i)-(f_i(\boldsymbol{u})+\boldsymbol{u}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\omega}_i)]\geqq C[\boldsymbol{x},\boldsymbol{u};\alpha(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u})(\xi_i+\boldsymbol{\omega}_i)]+\rho_i\|\theta(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u})\|^{\sigma},\ \xi_i\in\partial f_i(\boldsymbol{u}),\ i\in K \tag{1}$$

$$-b_j(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u})(g_j(\boldsymbol{u})+\boldsymbol{u}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\upsilon}_j)\geqq C[\boldsymbol{x},\boldsymbol{u};\alpha(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u})(\zeta_j+\boldsymbol{\upsilon}_j)]+\tau_j\|\theta(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u})\|^{\sigma}\ \ \zeta_j\in\partial g_j(\boldsymbol{u}),\ j\in M \tag{2}$$

成立，则称$(f_i(\boldsymbol{x})+\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\omega}_i,\ g_j(\boldsymbol{x})+\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\upsilon}_j)$ 在 $\boldsymbol{x}\in X$ 处是广义$(C,\alpha)-I$ 型凸函数.

注 2　上述定义中，如果 $\alpha(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u})=1$，$C[\boldsymbol{x},\boldsymbol{u};\boldsymbol{y}]=\boldsymbol{y}\eta(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u})$，$\xi_i$ 换成 $f_i^s(\boldsymbol{u})$，ζ_j 换成 $g_j^s(\boldsymbol{u})$ 就能够得到文献[5]中相应的不变凸函数.

定义 5　如果存在 a_i,b_j,α，使得

$$a_i(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u})[(f_i(\boldsymbol{x})+\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\omega}_i)-(f_i(\boldsymbol{u})+\boldsymbol{u}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\omega}_i)]\leqq 0\Rightarrow C[\boldsymbol{x},\boldsymbol{u};\alpha(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u})(\xi_i+\boldsymbol{\omega}_i)]+\rho_i\|\theta(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u})\|^{\sigma}<0,\ \xi_i\in\partial f_i(\boldsymbol{u}),\ i\in K \tag{3}$$

$$b_j(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u})(g_j(\boldsymbol{u})+\boldsymbol{u}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\upsilon}_j)\geqq 0\Rightarrow C[\boldsymbol{x},\boldsymbol{u};\alpha(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u})(\zeta_j+\boldsymbol{\upsilon}_j)]+\tau_j\|\theta(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u})\|^{\sigma}<0\ \ \zeta_j\in\partial g_j(\boldsymbol{u}),\ j\in M \tag{4}$$

成立，则称$(f_i(\boldsymbol{x})+\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\omega}_i,\ g_j(\boldsymbol{x})+\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\upsilon}_j)$ 在 $\boldsymbol{u}\in X$ 处是广义严格拟$(C,\alpha)-I$ 型凸函数.

定义 6　如果存在 a_i,b_j,α，使得

$$C[\boldsymbol{x},\boldsymbol{u};\alpha(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u})(\xi_i+\boldsymbol{\omega}_i)]+\rho_i\|\theta(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u})\|^{\sigma}\geqq 0\Rightarrow a_i(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u})[(f_i(\boldsymbol{x})+\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\omega}_i)-(f_i(\boldsymbol{u})+\boldsymbol{u}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\omega}_i)]>0,\ \xi_i\in\partial f_i(\boldsymbol{u}),\ i\in K \tag{5}$$

$$b_j(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u})(g_j(\boldsymbol{u})+\boldsymbol{u}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\upsilon}_j)\geqq 0\Rightarrow C[\boldsymbol{x},\boldsymbol{u};\alpha(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u})(\zeta_j+\boldsymbol{\upsilon}_j)]+\tau_j\|\theta(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u})\|^{\sigma}\leqq 0,\ \zeta_j\in\partial g_j(\boldsymbol{u}),\ j\in M \tag{6}$$

称$(f_i(\boldsymbol{x})+\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\omega}_i,\ g_j(\boldsymbol{x})+\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\upsilon}_j)$ 在 $\boldsymbol{u}\in X$ 处是广义严格伪拟$(C,\alpha)-I$ 型凸函数.

2　最优性条件

定理 1　假设 $\boldsymbol{x}_0\in X$，如果满足下列条件

(I) $(f_i(\boldsymbol{x})+\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\omega}_i,\ g_j(\boldsymbol{x})+\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\upsilon}_j)$ 在 $\boldsymbol{x}_0\in X$ 处是广义$(C,\alpha)-I$ 型凸函数.

(II) 存在 $\boldsymbol{\lambda}=(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_k)\geqslant 0$，$\boldsymbol{\mu}=(\mu_1,\mu_2,\cdots\mu_m)\geqq 0$，使得

a) $0=\sum_{i=1}^{k}\lambda_i(\xi_i+\boldsymbol{\omega}_i)+\sum_{j=1}^{m}\mu_j(\zeta_j+\boldsymbol{\upsilon}_i)$，$\exists\,\xi_i\in\partial f_i(\boldsymbol{x}_0)$，$\exists\,\zeta_j\in\partial g_j(\boldsymbol{x}_0)$，

b) $\sum_{j=1}^{m}\mu_j(g_j(\boldsymbol{x})+\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\upsilon}_j)=0$，

c) $s(\boldsymbol{x}\mid C_i)=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\omega}_i$，$\boldsymbol{\omega}_i\in C_i$，$i\in K$　(7)

$s(\boldsymbol{x}\mid D_j)=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\upsilon}_j$，$\boldsymbol{\upsilon}_j\in D_j$，$j\in M$　(8)

(III) $a_i(\bar{\boldsymbol{x}},\boldsymbol{x}_0)>0$，$b_j(\bar{\boldsymbol{x}},\boldsymbol{x}_0)>0$，

(IV) $\left(\sum_{i=1}^{k}\lambda_i\rho_i+\sum_{j=1}^{m}\mu_j\tau_j\right)\|\theta(\bar{\boldsymbol{x}},\boldsymbol{x}_0)\|^{\sigma}\geqq 0$.

则 $\boldsymbol{x}_0$ 是 MVP 的弱有效解.

证　假设 $\boldsymbol{x}_0$ 不是 MVP 的弱有效解，则存在$\bar{\boldsymbol{x}}\in X^0$ 使得

$$f_i(\boldsymbol{x}_0)+s(\boldsymbol{x}_0\mid C_i)>f_i(\bar{\boldsymbol{x}})+s(\bar{\boldsymbol{x}}\mid C_i)$$

由(7)式得

$$f_i(\boldsymbol{x}_0)+\boldsymbol{x}_0^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\omega}_i=f_i(\boldsymbol{x}_0)+s(\boldsymbol{x}_0\mid C_i)>f_i(\bar{\boldsymbol{x}})+s(\bar{\boldsymbol{x}}\mid C_i)=f_i(\bar{\boldsymbol{x}})+\bar{\boldsymbol{x}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\omega}_i$$

则有

$$f_i(\bar{\boldsymbol{x}})+\bar{\boldsymbol{x}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\omega}_i-(f_i(\boldsymbol{x}_0)+\boldsymbol{x}_0^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\omega}_i)<0$$

由条件(III)可知

$$a_i(\bar{\boldsymbol{x}}, \boldsymbol{x}_0)[(f_i(\bar{\boldsymbol{x}}) + \bar{\boldsymbol{x}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\omega}_i) - (f_i(\boldsymbol{x}_0) + \boldsymbol{x}_0^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\omega}_i)] < 0 \tag{9}$$

由条件(I)可知

$$a_i(\bar{\boldsymbol{x}}, \boldsymbol{x}_0)[(f_i(\bar{\boldsymbol{x}}) + \bar{\boldsymbol{x}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\omega}_i) - (f_i(\boldsymbol{x}_0) + \boldsymbol{x}_0^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\omega}_i)] \geqq C[\bar{\boldsymbol{x}}, \boldsymbol{x}_0; \alpha(\bar{\boldsymbol{x}}, \boldsymbol{x}_0)(\xi_i + \boldsymbol{\omega}_i)] + \rho_i \| \theta(\bar{\boldsymbol{x}}, \boldsymbol{x}_0) \|^{\sigma}$$

由(9)式知

$$C[\bar{\boldsymbol{x}}, \boldsymbol{x}_0; \alpha(\bar{\boldsymbol{x}}, \boldsymbol{x}_0)(\xi_i + \boldsymbol{\omega}_i)] + \rho_i \| \theta(\bar{\boldsymbol{x}}, \boldsymbol{x}_0) \|^{\sigma} < 0$$

也即

$$\sum_{i=1}^{k} \lambda_i C[\bar{\boldsymbol{x}}, \boldsymbol{x}_0; \alpha(\bar{\boldsymbol{x}}, \boldsymbol{x}_0)(\xi_i + \boldsymbol{\omega}_i)] < -\sum_{i=1}^{k} \lambda_i \rho_i \| \theta(\bar{\boldsymbol{x}}, \boldsymbol{x}_0) \|^{\sigma} \tag{10}$$

当 $j \in J(\boldsymbol{x}_0)$ 时

$$g_j(\boldsymbol{x}_0) + \boldsymbol{x}_0^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\upsilon}_j = g_j(\boldsymbol{x}_0) + s(\boldsymbol{x}_0 \mid D_j) = 0$$

也即

$$-(g_j(\boldsymbol{x}_0) + \boldsymbol{x}_0^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\upsilon}_j) = 0, \ j \in J(\boldsymbol{x}_0)$$

$$-b_j(\bar{\boldsymbol{x}}, \boldsymbol{x}_0)[g_j(\boldsymbol{x}_0) + \boldsymbol{x}_0^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\upsilon}_j] = 0, \ j \in J(\boldsymbol{x}_0)$$

由条件(I)知

$$0 \geqq C[\bar{\boldsymbol{x}}, \boldsymbol{x}_0; \alpha(\bar{\boldsymbol{x}}, \boldsymbol{x}_0)(\zeta_j + \boldsymbol{\upsilon}_j)] + \tau_j \| \theta(\bar{\boldsymbol{x}}, \boldsymbol{x}_0) \|^{\sigma}, \ j \in J(\boldsymbol{x}_0) \tag{11}$$

当 $j \notin J(\boldsymbol{x}_0)$ 时，由 b)知 $\mu_j = 0$，根据(11)式得

$$\sum_{j=1}^{m} \mu_j C[\bar{\boldsymbol{x}}, \boldsymbol{x}_0; \alpha(\bar{\boldsymbol{x}}, \boldsymbol{x}_0)(\zeta_j + \boldsymbol{\upsilon}_j)] + \sum_{j=1}^{m} \mu_j \tau_j \| \theta(\bar{\boldsymbol{x}}, \boldsymbol{x}_0) \|^{\sigma} \leqq 0$$

等价于

$$\sum_{j=1}^{m} \mu_j C[\bar{\boldsymbol{x}}, \boldsymbol{x}_0; \alpha(\bar{\boldsymbol{x}}, \boldsymbol{x}_0)(\zeta_j + \boldsymbol{\upsilon}_j)] \leqq -\sum_{j=1}^{m} \mu_j \tau_j \| \theta(\bar{\boldsymbol{x}}, \boldsymbol{x}_0) \|^{\sigma} \tag{12}$$

将(10)式和(12)式相加并结合条件(IV)得

$$\sum_{i=1}^{k} \lambda_i C[\bar{\boldsymbol{x}}, \boldsymbol{x}_0; \alpha(\bar{\boldsymbol{x}}, \boldsymbol{x}_0)(\xi_i + \boldsymbol{\omega}_i)] + \sum_{j=1}^{m} \mu_j C[\bar{\boldsymbol{x}}, \boldsymbol{x}_0; \alpha(\bar{\boldsymbol{x}}, \boldsymbol{x}_0)(\zeta_j + \boldsymbol{\upsilon}_j)] <$$
$$-\left(\sum_{i=1}^{k} \lambda_i \rho_i + \sum_{j=1}^{m} \mu_j \tau_j\right) \| \theta(\bar{\boldsymbol{x}}, \boldsymbol{x}_0) \|^{\sigma} < 0$$

令 $\Gamma = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i + \sum_{j=1}^{m} \mu_j$，由定义 3 以及性质 1 得

$$\begin{aligned} & C\left[\bar{\boldsymbol{x}}, \boldsymbol{x}_0; \frac{1}{\Gamma}\sum_{i=1}^{k} \lambda_i \alpha(\bar{\boldsymbol{x}}, \boldsymbol{x}_0)(\xi_i + \boldsymbol{\omega}_i) + \frac{1}{\Gamma}\sum_{j=1}^{m} \mu_j \alpha(\bar{\boldsymbol{x}}, \boldsymbol{x}_0)(\zeta_j + \boldsymbol{\upsilon}_j)\right] \leqslant \\ & \sum_{i=1}^{k} \frac{\lambda_i}{\Gamma} C[\bar{\boldsymbol{x}}, \boldsymbol{x}_0; \alpha(\bar{\boldsymbol{x}}, \boldsymbol{x}_0)(\xi_i + \boldsymbol{\omega}_i)] + \sum_{j=1}^{m} \frac{\mu_j}{\Gamma} C[\bar{\boldsymbol{x}}, \boldsymbol{x}_0; \alpha(\bar{\boldsymbol{x}}, \boldsymbol{x}_0)(\zeta_j + \boldsymbol{\upsilon}_j)] < 0 \end{aligned} \tag{13}$$

由 a)得

$$C\left[\bar{\boldsymbol{x}}, \boldsymbol{x}_0; \frac{1}{\Gamma}\sum_{i=1}^{k} \lambda_i \alpha(\bar{\boldsymbol{x}}, \boldsymbol{x}_0)(\xi_i + \boldsymbol{\omega}_i) + \frac{1}{\Gamma}\sum_{j=1}^{m} \mu_j \alpha(\bar{\boldsymbol{x}}, \boldsymbol{x}_0)(\zeta_j + \boldsymbol{\upsilon}_j)\right] =$$
$$C\left[\bar{\boldsymbol{x}}, \boldsymbol{x}_0; \alpha(\bar{\boldsymbol{x}}, \boldsymbol{x}_0)\frac{1}{\Gamma}\left(\sum_{i=1}^{k} \lambda_i (\xi_i + \boldsymbol{\omega}_i) + \sum_{j=1}^{m} \mu_j (\zeta_j + \boldsymbol{\upsilon}_j)\right)\right] = 0$$

这与(13)式矛盾.

故 $\boldsymbol{x}_0$ 是 MVP 的弱有效解.

定理 2 假设 $\boldsymbol{x}_0 \in X$，如果满足下列条件

(I) $(f_i(\boldsymbol{x}) + \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\omega}_i, g_j(\boldsymbol{x}) + \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\upsilon}_j)$ 在 $\boldsymbol{x}_0 \in X$ 处是广义严格拟$(C, \alpha) - I$ 型凸函数.

(II) 存在 $\boldsymbol{\lambda} = (\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_k) \geqslant 0$，$\boldsymbol{\mu} = (\mu_1, \mu_2, \cdots \mu_m) \geqq 0$，使得下列条件成立：

a) $0=\sum_{i=1}^{k}\lambda_i(\xi_i+\boldsymbol{\omega}_i)+\sum_{j=1}^{m}\mu_j(\zeta_j+\boldsymbol{\upsilon}_i)$，$\exists\,\xi_i\in\partial f_i(\boldsymbol{x}_0)$，$\exists\,\zeta_j\in\partial g_j(\boldsymbol{x}_0)$，

b) $\sum_{j=1}^{m}\mu_j(g_j(\boldsymbol{x})+\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\upsilon}_j)=0$，

c) $s(\boldsymbol{x}\mid C_i)=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\omega}_i$，$\boldsymbol{\omega}_i\in C_i$，$i\in K$ (14)

$s(\boldsymbol{x}\mid D_j)=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\upsilon}_j$，$\boldsymbol{\upsilon}_j\in D_j$，$j\in M$ (15)

(III) $a_i(\bar{\boldsymbol{x}},\boldsymbol{x}_0)>0$，$b_j(\bar{\boldsymbol{x}},\boldsymbol{x}_0)>0$，

(IV) $\left(\sum_{i=1}^{k}\lambda_i\rho_i+\sum_{j=1}^{m}\mu_j\tau_j\right)\|\theta(\bar{\boldsymbol{x}},\boldsymbol{x}_0)\|^{\sigma}\geqq 0$.

则 $\boldsymbol{x}_0$ 是 MVP 的弱有效解.

证 假设 $\boldsymbol{x}_0$ 不是 MVP 的弱有效解，则存在 $\bar{\boldsymbol{x}}\in X^0$ 使得

$$f_i(\boldsymbol{x}_0)+s(\boldsymbol{x}_0\mid C_i)>f_i(\bar{\boldsymbol{x}})+s(\bar{\boldsymbol{x}}\mid C_i)$$

由(14)式得

$$f_i(\boldsymbol{x}_0)+\boldsymbol{x}_0^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\omega}_i=f_i(\boldsymbol{x}_0)+s(\boldsymbol{x}_0\mid C_i)>f_i(\bar{\boldsymbol{x}})+s(\bar{\boldsymbol{x}}\mid C_i)=f_i(\bar{\boldsymbol{x}})+\bar{\boldsymbol{x}}^{\mathrm{T}}\omega_i$$

则有

$$f_i(\bar{\boldsymbol{x}})+\bar{\boldsymbol{x}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\omega}_i-(f_i(\boldsymbol{x}_0)+\boldsymbol{x}_0^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\omega}_i)<0$$

由条件(III) 可知

$$a_i(\bar{\boldsymbol{x}},\boldsymbol{x}_0)[(f_i(\bar{\boldsymbol{x}})+\bar{\boldsymbol{x}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\omega}_i)-(f_i(\boldsymbol{x}_0)+\boldsymbol{x}_0^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\omega}_i)]<0 \tag{16}$$

由(16)式和条件(I) 可得

$$C[\bar{\boldsymbol{x}},\boldsymbol{x}_0;\alpha(\bar{\boldsymbol{x}},\boldsymbol{x}_0)(\xi_i+\boldsymbol{\omega}_i)]+\rho_i\|\theta(\bar{\boldsymbol{x}},\boldsymbol{x}_0)\|^{\sigma}<0$$

也即

$$\sum_{i=1}^{k}\lambda_iC[\bar{\boldsymbol{x}},\boldsymbol{x}_0;\alpha(\bar{\boldsymbol{x}},\boldsymbol{x}_0)(\xi_i+\boldsymbol{\omega}_i)]<-\sum_{i=1}^{k}\lambda_i\rho_i\|\theta(\bar{\boldsymbol{x}},\boldsymbol{x}_0)\|^{\sigma} \tag{17}$$

当 $j\in J(\boldsymbol{x}_0)$ 时，$g_j(\boldsymbol{x}_0)+\boldsymbol{x}_0^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\upsilon}_j=g_j(\boldsymbol{x}_0)+s(\boldsymbol{x}_0\mid D_j)=0$，即

$$-(g_j(\boldsymbol{x}_0)+\boldsymbol{x}_0^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\upsilon}_j)=0,\ j\in J(\boldsymbol{x}_0)$$

$$-b_j(\bar{\boldsymbol{x}},\boldsymbol{x}_0)[g_j(\boldsymbol{x}_0)+\boldsymbol{x}_0^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\upsilon}_j]=0,\ j\in J(\boldsymbol{x}_0)$$

由条件(I) 知

$$0>C[\bar{\boldsymbol{x}},\boldsymbol{x}_0;\alpha(\bar{\boldsymbol{x}},\boldsymbol{x}_0)(\zeta_j+\boldsymbol{\upsilon}_j)]+\tau_j\|\theta(\bar{\boldsymbol{x}},\boldsymbol{x}_0)\|^{\sigma},\ j\in J(\boldsymbol{x}_0) \tag{18}$$

当 $j\notin J(\boldsymbol{x}_0)$ 时，由 b) 知 $\mu_j=0$，根据(18) 式得

$$\sum_{j=1}^{m}\mu_jC[\bar{\boldsymbol{x}},\boldsymbol{x}_0;\alpha(\bar{\boldsymbol{x}},\boldsymbol{x}_0)(\zeta_j+\boldsymbol{\upsilon}_j)]+\sum_{j=1}^{m}\mu_j\tau_j\|\theta(\bar{\boldsymbol{x}},\boldsymbol{x}_0)\|^{\sigma}\leqq 0$$

等价于

$$\sum_{j=1}^{m}\mu_jC[\bar{\boldsymbol{x}},\boldsymbol{x}_0;\alpha(\bar{\boldsymbol{x}},\boldsymbol{x}_0)(\zeta_j+\boldsymbol{\upsilon}_j)]\leqq-\sum_{j=1}^{m}\mu_j\tau_j\|\theta(\bar{\boldsymbol{x}},\boldsymbol{x}_0)\|^{\sigma} \tag{19}$$

将(17) 式和(19) 式相加并结合(IV) 得

$$\sum_{i=1}^{k}\lambda_iC[\bar{\boldsymbol{x}},\boldsymbol{x}_0;\alpha(\bar{\boldsymbol{x}},\boldsymbol{x}_0)(\xi_i+\boldsymbol{\omega}_i)]+\sum_{j=1}^{m}\mu_jC[\bar{\boldsymbol{x}},\boldsymbol{x}_0;\alpha(\bar{\boldsymbol{x}},\boldsymbol{x}_0)(\zeta_j+\boldsymbol{\upsilon}_j)]<$$
$$-\left(\sum_{i=1}^{k}\lambda_i\rho_i+\sum_{j=1}^{m}\mu_j\tau_j\right)\|\theta(\bar{\boldsymbol{x}},\boldsymbol{x}_0)\|^{\sigma}<0$$

令 $\Gamma=\sum_{i=1}^{k}\lambda_i+\sum_{j=1}^{m}\mu_j$，由定义 3 以及性质 1 得

$$C\left[\bar{\boldsymbol{x}},\boldsymbol{x}_0;\frac{1}{\Gamma}\sum_{i=1}^{k}\lambda_i\alpha(\bar{\boldsymbol{x}},\boldsymbol{x}_0)(\xi_i+\boldsymbol{\omega}_i)+\frac{1}{\Gamma}\sum_{j=1}^{m}\mu_j\alpha(\bar{\boldsymbol{x}},\boldsymbol{x}_0)(\zeta_j+\boldsymbol{\upsilon}_j)\right]\leqslant$$

$$\sum_{i=1}^{k}\frac{\lambda_i}{\Gamma}C[\bar{\boldsymbol{x}},\boldsymbol{x}_0;\alpha(\bar{\boldsymbol{x}},\boldsymbol{x}_0)(\xi_i+\boldsymbol{\omega}_i)]+\sum_{j=1}^{m}\frac{\mu_j}{\Gamma}C[\bar{\boldsymbol{x}},\boldsymbol{x}_0;\alpha(\bar{\boldsymbol{x}},\boldsymbol{x}_0)(\zeta_j+\boldsymbol{\upsilon}_j)]<0 \tag{20}$$

由 a) 得

$$C\left[\bar{\boldsymbol{x}},\boldsymbol{x}_0;\frac{1}{\Gamma}\sum_{i=1}^{k}\lambda_i\alpha(\bar{\boldsymbol{x}},\boldsymbol{x}_0)(\xi_i+\boldsymbol{\omega}_i)+\frac{1}{\Gamma}\sum_{j=1}^{m}\mu_j\alpha(\bar{\boldsymbol{x}},\boldsymbol{x}_0)(\zeta_j+\boldsymbol{\upsilon}_j)\right]=$$

$$C\left[\bar{\boldsymbol{x}},\boldsymbol{x}_0;\frac{1}{\Gamma}\left(\sum_{i=1}^{k}\lambda_i\alpha(\bar{\boldsymbol{x}},\boldsymbol{x}_0)(\xi_i+\boldsymbol{\omega}_i)+\sum_{j=1}^{m}\mu_j\alpha(\bar{\boldsymbol{x}},\boldsymbol{x}_0)(\zeta_j+\boldsymbol{\upsilon}_j)\right)\right]=0$$

这与(20)式矛盾，则 $\boldsymbol{x}_0$ 是 MVP 的弱有效解.

定理 3 假设 $\boldsymbol{x}_0\in X$，如果满足下列条件

(I) $(f_i(\boldsymbol{x})+\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\omega}_i,\ g_j(\boldsymbol{x})+\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\upsilon}_j)$ 在 $\boldsymbol{x}_0\in X$ 处是广义严格伪拟$(C,\alpha)-I$ 型凸函数.

(II) 存在 $\boldsymbol{\lambda}=(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_k)\geqslant 0$，$\boldsymbol{\mu}=(\mu_1,\mu_2,\cdots\mu_m)\geqq 0$，使得下列条件成立：

a) $0=\sum_{i=1}^{k}\lambda_i(\xi_i+\boldsymbol{\omega}_i)+\sum_{j=1}^{m}\mu_j(\zeta_j+\boldsymbol{\upsilon}_i)$，$\exists\,\xi_i\in\partial f_i(\boldsymbol{x}_0)$，$\exists\,\zeta_j\in\partial g_j(\boldsymbol{x}_0)$，

b) $\sum_{j=1}^{m}\mu_j(g_j(\boldsymbol{x})+\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\upsilon}_j)=0$，

c) $s(\boldsymbol{x}\mid C_i)=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\omega}_i$，$\boldsymbol{\omega}_i\in C_i$，$i\in K$ (21)

$s(\boldsymbol{x}\mid D_j)=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\upsilon}_j$，$\boldsymbol{\upsilon}_j\in D_j$，$j\in M$ (22)

(III) $a_i(\bar{\boldsymbol{x}},\boldsymbol{x}_0)>0$，$b_j(\bar{\boldsymbol{x}},\boldsymbol{x}_0)>0$，

(IV) $\left(\sum_{i=1}^{k}\lambda_i\rho_i+\sum_{j=1}^{m}\mu_j\tau_j\right)\|\theta(\bar{\boldsymbol{x}},\boldsymbol{x}_0)\|^{\sigma}\geqq 0$.

则 $\boldsymbol{x}_0$ 是 MVP 的弱有效解.

证 假设 $\boldsymbol{x}_0$ 不是 MVP 的弱有效解，则存在 $\bar{\boldsymbol{x}}\in X^0$ 使得，

$$f_i(\boldsymbol{x}_0)+s(\boldsymbol{x}_0\mid C_i)>f_i(\bar{\boldsymbol{x}})+s(\bar{\boldsymbol{x}}\mid C_i)$$

由(21)式得 $f_i(\boldsymbol{x}_0)+\boldsymbol{x}_0^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\omega}_i=f_i(\boldsymbol{x}_0)+s(\boldsymbol{x}_0\mid C_i)>f_i(\bar{\boldsymbol{x}})+s(\bar{\boldsymbol{x}}\mid C_i)=f_i(\bar{\boldsymbol{x}})+\bar{\boldsymbol{x}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\omega}_i$，则 $f_i(\bar{\boldsymbol{x}})+\bar{\boldsymbol{x}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\omega}_i-(f_i(\boldsymbol{x}_0)+\boldsymbol{x}_0^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\omega}_i)<0$.

由条件(III) 可知

$$a_i(\bar{\boldsymbol{x}},\boldsymbol{x}_0)[(f_i(\bar{\boldsymbol{x}})+\bar{\boldsymbol{x}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\omega}_i)-(f_i(\boldsymbol{x}_0)+\boldsymbol{x}_0^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\omega}_i)]<0 \tag{23}$$

由(23)式和条件(I) 可得 $C[\bar{\boldsymbol{x}},\boldsymbol{x}_0;\alpha(\bar{\boldsymbol{x}},\boldsymbol{x}_0)(\xi_i+\boldsymbol{\omega}_i)]+\rho_i\|\theta(\bar{\boldsymbol{x}},\boldsymbol{x}_0)\|^{\sigma}<0$，即

$$\sum_{i=1}^{k}\lambda_iC[\bar{\boldsymbol{x}},\boldsymbol{x}_0;\alpha(\bar{\boldsymbol{x}},\boldsymbol{x}_0)(\xi_i+\boldsymbol{\omega}_i)]<-\sum_{i=1}^{k}\lambda_i\rho_i\|\theta(\bar{\boldsymbol{x}},\boldsymbol{x}_0)\|^{\sigma} \tag{24}$$

当 $j\in J(\boldsymbol{x}_0)$ 时，$g_j(\boldsymbol{x}_0)+\boldsymbol{x}_0^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\upsilon}_j=g_j(\boldsymbol{x}_0)+s(\boldsymbol{x}_0\mid D_j)=0$，即 $-(g_j(\boldsymbol{x}_0)+\boldsymbol{x}_0^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\upsilon}_j)=0$，$j\in J(\boldsymbol{x}_0)$，$-b_j(\bar{\boldsymbol{x}},\boldsymbol{x}_0)[g_j(\boldsymbol{x}_0)+\boldsymbol{x}_0^{\mathrm{T}}\upsilon_j]=0$，$j\in J(\boldsymbol{x}_0)$.

由条件(I) 知

$$C[\bar{\boldsymbol{x}},\boldsymbol{x}_0;\alpha(\bar{\boldsymbol{x}},\boldsymbol{x}_0)(\zeta_j+\boldsymbol{\upsilon}_j)]+\tau_j\|\theta(\bar{\boldsymbol{x}},\boldsymbol{x}_0)\|^{\sigma}\leqq 0,\ j\in J(\boldsymbol{x}_0) \tag{25}$$

当 $j\notin J(\boldsymbol{x}_0)$ 时，由 b) 知 $\mu_j=0$，根据(25)式得，

$$\sum_{j=1}^{m}\mu_jC[\bar{\boldsymbol{x}},\boldsymbol{x}_0;\alpha(\bar{\boldsymbol{x}},\boldsymbol{x}_0)(\zeta_j+\boldsymbol{\upsilon}_j)]+\sum_{j=1}^{m}\mu_j\tau_j\|\theta(\bar{\boldsymbol{x}},\boldsymbol{x}_0)\|^{\sigma}\leqq 0$$

等价于

$$\sum_{j=1}^{m}\mu_jC[\bar{\boldsymbol{x}},\boldsymbol{x}_0;\alpha(\bar{\boldsymbol{x}},\boldsymbol{x}_0)(\zeta_j+\boldsymbol{\upsilon}_j)]\leqq-\sum_{j=1}^{m}\mu_j\tau_j\|\theta(\bar{\boldsymbol{x}},\boldsymbol{x}_0)\|^{\sigma} \tag{26}$$

将(24)式和(26)式相加并结合条件(IV)得

$$\sum_{i=1}^{k}\lambda_iC[\bar{\boldsymbol{x}},\boldsymbol{x}_0;\alpha(\bar{\boldsymbol{x}},\boldsymbol{x}_0)(\xi_i+\boldsymbol{\omega}_i)]+\sum_{j=1}^{m}\mu_jC[\bar{\boldsymbol{x}},\boldsymbol{x}_0;\alpha(\bar{\boldsymbol{x}},\boldsymbol{x}_0)(\zeta_j+\boldsymbol{\upsilon}_j)]<$$

$$-\left(\sum_{i=1}^{k}\lambda_i\rho_i+\sum_{j=1}^{m}\mu_j\tau_j\right)\|\theta(\bar{\boldsymbol{x}},\boldsymbol{x}_0)\|^{\sigma}<0$$

令 $\Gamma=\sum_{i=1}^{k}\lambda_i+\sum_{j=1}^{m}\mu_j$，由定义 3 以及性质 1 得

$$\begin{aligned}&C\left[\bar{\boldsymbol{x}},\boldsymbol{x}_0;\frac{1}{\Gamma}\sum_{i=1}^{k}\lambda_i\alpha(\bar{\boldsymbol{x}},\boldsymbol{x}_0)(\xi_i+\boldsymbol{\omega}_i)+\frac{1}{\Gamma}\sum_{j=1}^{m}\mu_j\alpha(\bar{\boldsymbol{x}},\boldsymbol{x}_0)(\zeta_j+\boldsymbol{v}_j)\right]\leqslant\\&\sum_{i=1}^{k}\frac{\lambda_i}{\Gamma}C[\bar{\boldsymbol{x}},\boldsymbol{x}_0;\alpha(\bar{\boldsymbol{x}},\boldsymbol{x}_0)(\xi_i+\boldsymbol{\omega}_i)]+\sum_{j=1}^{m}\frac{\mu_j}{\Gamma}C[\bar{\boldsymbol{x}},\boldsymbol{x}_0;\alpha(\bar{\boldsymbol{x}},\boldsymbol{x}_0)(\zeta_j+\boldsymbol{v}_j)]<0\end{aligned}\tag{27}$$

由 a) 得

$$\begin{aligned}&C\left[\bar{\boldsymbol{x}},\boldsymbol{x}_0;\frac{1}{\Gamma}\sum_{i=1}^{k}\lambda_i\alpha(\bar{\boldsymbol{x}},\boldsymbol{x}_0)(\xi_i+\boldsymbol{\omega}_i)+\frac{1}{\Gamma}\sum_{j=1}^{m}\mu_j\alpha(\bar{\boldsymbol{x}},\boldsymbol{x}_0)(\zeta_j+\boldsymbol{v}_j)\right]=\\&C\left[\bar{\boldsymbol{x}},\boldsymbol{x}_0;\frac{1}{\Gamma}\left(\sum_{i=1}^{k}\lambda_i\alpha(\bar{\boldsymbol{x}},\boldsymbol{x}_0)(\xi_i+\boldsymbol{\omega}_i)+\sum_{j=1}^{m}\mu_j\alpha(\bar{\boldsymbol{x}},\boldsymbol{x}_0)(\zeta_j+\boldsymbol{v}_j)\right)\right]=0\end{aligned}$$

这与(27) 式矛盾，则 $\boldsymbol{x}_0$ 是 MVP 的弱有效解.

参考文献：

[1] YUAN D H，LIU X L，CHINCHULUUN A，etal. Nondifferentiable Minimax Fractional Programming Problems with (C，A，P，D)-Convexity [J]. Journal of Optimization Theory and Applications，2006，129(1)：185-199.

[2] LONG X J. Optimality Conditions and Duality for Nondifferentiable Multiobjective Fractional Programming Problems with (C，A，P，D)-Convexity [J]. Journal of Optimization Theory and Applications，2011，148(1)：197-208.

[3] MISHRA S K，JAISWAL M，HOAI AN L T. Optimality Conditions and Duality for Nondifferentiable Multiobjective Semi-Infinite Programming Problems with Generalized (C，α，ρ，d)-Convexity [J]. Journal of Systems Science and Complexity，2015，28(1)：47-59.

[4] 李　娜，贺　莉. 基于 B－(C，α)－I型广义凸多目标优化问题的充分条件 [J]. 长春师范大学学报，2015，34(4)：1-4.

[5] 王雪峰，王芮婕，高晓艳. (V，η)－I 型对称不变凸多目标规划的对偶性 [J]. 山东大学学报(理学版)，2019，54(4)：116-126.

[6] CLARKE F H. Optimization and Nonsmooth Analysis [M]. New York：John Wiley，1983.

[7] 林锉云，董加礼. 多目标优化的方法与理论 [M]. 长春：吉林教育出版社，1992.

[8] 杨　勇，连铁艳，穆瑞金. (F，b，α，ε)-G 凸分式半无限规划问题的 ε-最优性 [J]. 西南师范大学学报(自然科学版)，2008，33(6)：1-4.

[9] 王荣波，冯　强，刘　瑞. 一类多目标半无限规划的最优性与对偶性 [J]. 西南大学学报(自然科学版)，2017，39(3)：55-61.

[10] 严建军，李　钰，杨　帆，等. 关于一类多目标半无限规划的最优性条件 [J]. 贵州大学学报(自然科学版)，2019，36(2)：16-21.

责任编辑　张　枸