第 46 卷　第 11 期　　西南师范大学学报(自然科学版)　　2021 年 11 月
Vol. 46　No. 11　　Journal of Southwest China Normal University (Natural Science Edition)　　Nov.　2021

DOI: 10.13718/j.cnki.xsxb.2021.11.002

四元数矩阵方程 $AX=B$ 的共轭次辛解及其逼近[①]

蓝家新[1]，　黄敬频[2]，　黄　丹[1]，　吴发乾[1]

1. 百色学院 数学与统计学院，广西 百色 533000；2. 广西民族大学 数学与物理学院，南宁 530006

摘要： 研究了四元数矩阵方程 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{B}$ 的共轭次辛解及其逼近问题. 利用共轭转置矩阵与共轭次转置矩阵的联系、四元数矩阵的实分解及矩阵 Kronecker 积，将约束方程转化为实数域上无约束方程组，从而得到四元数矩阵方程 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{B}$ 具有共轭次辛矩阵解的充要条件及其通解表达式. 同时在共轭次辛解集中找到与给定共轭次辛矩阵有极小 Frobenius 范数的最佳逼近解. 最后给出 2 个数值算例表明该算法的可行性.

关　键　词： 四元数体；矩阵方程；共轭次转置；共轭次辛矩阵；最佳逼近

中图分类号： O151.21　　**文献标志码：** A　　**文章编号：** 1000-5471(2021)11-0008-07

On Conjugate Sub-symplectic Matrix Solutions of the Quaternion Equation $AX=B$ and Its Optimal Approximation

LAN Jiaxin[1]，　HUANG Jingpin[2]，　HUANG Dan[1]，　WU Faqian[1]

1. School of Mathematics and Statistics, Baise University, Baise Guangxi 533000, China;

2. College of Mathematics and Physics, Guangxi University for Nationalities, Nanning 530006, China

Abstract: In this paper, we discuss the conjugate sub-symplectic matrix solutions of the quaternion equation $AX=B$ and its optimal approximation. With the relationship between conjugate transpose matrix and conjugate secondary transpose matrix, the real decomposition of a quaternion matrix, and the Kronecker product of matrices, the quaternion equation with constraints can be converted to unconstrained equations. Then the necessary and sufficient condition for the existence of the quaternion matrix equation $AX=B$ with conjugate sub-symplectic matrix and its general solution expression is obtained. Meanwhile under the condition of the solution set of the conjugate sub-symplectic matrix is not empty, and the expression of the optimal approximation solution to the given quaternion matrix is derived. Finally, numerical examples are presented to show the effectiveness of our algorithm.

Key words: quaternion field; matrix equation; conjugate secondary transpose; conjugate sub-symplectic matrix; optimal approximation

---

① 收稿日期：2020-10-25

基金项目：广西高校中青年教师科研基础能力提升项目(2020KY19014).

作者简介：蓝家新，助教，硕士，主要从事矩阵计算及应用研究.

通信作者：黄敬频，教授.

20 世纪 60 年代，华罗庚和万哲先提出辛群和辛矩阵的概念[1]．之后，文献[2-4]利用次转置提出了次辛矩阵和共轭次辛矩阵的概念．目前，辛矩阵广泛应用在电感电路理论、热声分布参数网络模型、现代几何学等方面，例如：文献[5]结合全参数辛矩阵构建了饲料物流企业竞争力评价模型；文献[6]在李群机器学习的基础上，研究其中的辛群分类器设计方法；文献[7]提出小参数摄动法保辛的问题；文献[8]对热声分布参数网络模型的传输矩阵进行了辛对称分析，提出了降低最小网络损耗的方法．

矩阵方程 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{B}$ 具有广泛的实际应用背景，它在图像修复与系统控制等领域有着广泛应用，在实数域和复数域上对该方程的各种求解方法也存在较多的研究成果[9-14]．本文在四元数体上研究矩阵方程

$$\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{B} \tag{1}$$

的共轭次辛逼近解问题，其中 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}\in\mathbb{Q}^{l\times 2n}$ 是已知矩阵，$\boldsymbol{X}\in\mathbb{Q}^{2n\times 2n}$ 是未知矩阵．

记 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}},\boldsymbol{A}^{\mathrm{ST}},\overline{\boldsymbol{A}},\boldsymbol{A}^{*},\boldsymbol{A}^{(*)},\boldsymbol{A}^{+}$ 分别表示 $\boldsymbol{A}$ 的转置、次转置、共轭、共轭转置、共轭次转置矩阵和 Moore-Penrose 广义逆．$\boldsymbol{A}\otimes\boldsymbol{B}$ 表示矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 的 Kronecker 积．$\mathrm{vec}(\boldsymbol{A})$，$\|\boldsymbol{A}\|=\sqrt{\mathrm{tr}(\boldsymbol{A}^{*}\boldsymbol{A})}$ 分别表示矩阵 $\boldsymbol{A}$ 按列顺序拉直向量及其 Frobenius 范数．记标准辛矩阵为[1]

$$\boldsymbol{K}=\begin{bmatrix}0 & \boldsymbol{I}_n\\ -\boldsymbol{I}_n & 0\end{bmatrix}$$

其中 $\boldsymbol{I}_n$ 表示 n 阶单位矩阵．易知 $\boldsymbol{K}^2=-\boldsymbol{I}_{2n}$，$\boldsymbol{K}^{-1}=\boldsymbol{K}^{\mathrm{T}}=-\boldsymbol{K}$．下面给出有关定义和引理．

定义 1[15]　设 $\boldsymbol{A}=[a_{ij}]\in\mathbb{Q}^{m\times n}$，则称

$$\boldsymbol{A}^{\mathrm{ST}}=\begin{bmatrix}a_{mn} & a_{m-1,n} & \cdots & a_{2n} & a_{1n}\\ a_{m,n-1} & a_{m-1,n-1} & \cdots & a_{2,n-1} & a_{1,n-1}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ a_{m2} & a_{m-1,2} & \cdots & a_{22} & a_{12}\\ a_{m1} & a_{m-1,1} & \cdots & a_{21} & a_{11}\end{bmatrix}\in\mathbb{Q}^{n\times m}$$

是 $\boldsymbol{A}$ 的次转置，即 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{ST}}=[a_{n-j+1,m-i+1}]\in\mathbb{Q}^{n\times m}$，$i=1,2,\cdots,m$，$j=1,2,\cdots,n$．因此，$\boldsymbol{A}^{(*)}=\overline{\boldsymbol{A}}^{\mathrm{ST}}$．

定义 2　设 $\boldsymbol{S}\in\mathbb{Q}^{2n\times 2n}$，$\boldsymbol{K}$ 是 $2n$ 阶标准辛矩阵，如果 $\boldsymbol{S}$ 满足 $\boldsymbol{S}^{(*)}\boldsymbol{KS}=\boldsymbol{K}$，则称 $\boldsymbol{S}$ 为四元数共轭次辛矩阵．$\mathbb{Q}$ 上全体 $2n$ 阶共轭次辛矩阵表示为 SQ_{2n}．

显然，四元数共轭次辛矩阵的概念是文献[2-4]中实数域上次辛矩阵和复数域上共轭次辛矩阵定义的推广．例如

$$\boldsymbol{S}_1=\begin{bmatrix}1 & i-j & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & k & 1\end{bmatrix}\in\mathbb{Q}^{4\times 4},\Rightarrow\boldsymbol{S}_1^{(*)}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ -k & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & -i+j\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

满足 $\boldsymbol{S}_1^{(*)}\boldsymbol{KS}_1=\boldsymbol{K}$，因此，$\boldsymbol{S}_1\in SQ_4$．

引理 1[16]　四元数矩阵方程 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{B}$ 有解等价于 $\boldsymbol{AA}^{+}\boldsymbol{B}=\boldsymbol{B}$．在此情况下，矩阵方程 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{B}$ 的一般解和最小二乘解集均为

$$\boldsymbol{X}=\boldsymbol{A}^{+}\boldsymbol{B}+(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}^{+}\boldsymbol{A})\boldsymbol{Y}$$

其中 $\boldsymbol{Y}$ 是相应阶数的任意矩阵，且 $\widetilde{\boldsymbol{X}}=\boldsymbol{A}^{+}\boldsymbol{B}$ 是唯一的极小范数最小二乘解．

引理 2　设 $\boldsymbol{A}=[a_{ij}]_{m\times n}\in\mathbb{Q}^{m\times n}$，则

$$\boldsymbol{A}^{*}=\boldsymbol{J}_n\boldsymbol{A}^{(*)}\boldsymbol{J}_m$$

其中 $\boldsymbol{J}_n$ 和 $\boldsymbol{J}_m$ 是次对角线元全为 1，其余元全为 0 的方阵，且 $\boldsymbol{J}_n^{-1}=\boldsymbol{J}_n$，$\boldsymbol{J}_m^{-1}=\boldsymbol{J}_m$．

证　由定义 1 可得

$$\boldsymbol{A}^{(*)}=\overline{\boldsymbol{A}}^{\mathrm{ST}}=\begin{bmatrix}\bar{a}_{mn} & \bar{a}_{m-1,n} & \cdots & \bar{a}_{2n} & \bar{a}_{1n}\\ \bar{a}_{m,n-1} & \bar{a}_{m-1,n-1} & \cdots & \bar{a}_{2,n-1} & \bar{a}_{1,n-1}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ \bar{a}_{m2} & \bar{a}_{m-1,2} & \cdots & \bar{a}_{22} & \bar{a}_{12}\\ \bar{a}_{m1} & \bar{a}_{m-1,1} & \cdots & \bar{a}_{21} & \bar{a}_{11}\end{bmatrix}\in\mathbb{Q}^{n\times m}$$

因此

$$\boldsymbol{J}_n\boldsymbol{A}^{(*)}\boldsymbol{J}_m=\begin{bmatrix} & & & 1\\ & & 1 & \\ & \iddots & & \\ 1 & & & \end{bmatrix}_{n\times n}\begin{bmatrix}\bar{a}_{mn} & \bar{a}_{m-1,n} & \cdots & \bar{a}_{2n} & \bar{a}_{1n}\\ \bar{a}_{m,n-1} & \bar{a}_{m-1,n-1} & \cdots & \bar{a}_{2,n-1} & \bar{a}_{1,n-1}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ \bar{a}_{m2} & \bar{a}_{m-1,2} & \cdots & \bar{a}_{22} & \bar{a}_{12}\\ \bar{a}_{m1} & \bar{a}_{m-1,1} & \cdots & \bar{a}_{21} & \bar{a}_{11}\end{bmatrix}\begin{bmatrix} & & & 1\\ & & 1 & \\ & \iddots & & \\ 1 & & & \end{bmatrix}_{m\times m}=$$

$$\begin{bmatrix}\bar{a}_{11} & \bar{a}_{21} & \cdots & \bar{a}_{m-1,1} & \bar{a}_{m1}\\ \bar{a}_{12} & \bar{a}_{22} & \cdots & \bar{a}_{m-1,2} & \bar{a}_{m2}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ \bar{a}_{1,n-1} & \bar{a}_{2,n-1} & \cdots & \bar{a}_{m-1,n-1} & \bar{a}_{m,n-1}\\ \bar{a}_{1n} & \bar{a}_{2n} & \cdots & \bar{a}_{m-1,n} & \bar{a}_{mn}\end{bmatrix}=\boldsymbol{A}^*$$

证毕.

具体地，讨论如下 2 个问题：

问题 1 给定 $\boldsymbol{A}\in\mathbb{Q}^{l\times 2n}$，$\boldsymbol{B}\in\mathbb{Q}^{l\times 2n}$，求共轭次辛矩阵 $\boldsymbol{X}\in\mathbb{Q}^{2n\times 2n}$，使得 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{B}$.

问题 2 设问题 1 中共轭次辛矩阵的解集 $S_E\neq\varnothing$，$\boldsymbol{N}\in\mathbb{Q}^{2n\times 2n}$ 是已知四元数共轭次辛矩阵，求矩阵 $\tilde{\boldsymbol{X}}\in S_E$，满足 $\min\limits_{X\in S_E}\|\boldsymbol{X}-\boldsymbol{N}\|=\|\tilde{\boldsymbol{X}}-\boldsymbol{N}\|$.

1 问题 1 的解

设 $\boldsymbol{X}\in SQ_{2n}$，由于 $\boldsymbol{X}^{(*)}\boldsymbol{KX}=\boldsymbol{K}$，因此有

$$\boldsymbol{X}^{(*)}=\boldsymbol{KX}^{-1}\boldsymbol{K}^{-1}\tag{2}$$

又由引理 2，可知

$$\boldsymbol{X}^*=\boldsymbol{J}_{2n}\boldsymbol{X}^{(*)}\boldsymbol{J}_{2n}\tag{3}$$

其中 $\boldsymbol{J}_{2n}$ 是次对角线元全为 1，其余元全为 0 的 $2n\times 2n$ 的方阵.

对(1) 式两边同时取共轭转置，得

$$\boldsymbol{X}^*\boldsymbol{A}^*=\boldsymbol{B}^*\tag{4}$$

将(3) 式代入(4) 式中，得

$$\boldsymbol{J}_{2n}\boldsymbol{X}^{(*)}\boldsymbol{J}_{2n}\boldsymbol{A}^*=\boldsymbol{B}^*\tag{5}$$

再将(2) 式代入(5) 式中，得

$$\boldsymbol{J}_{2n}\boldsymbol{KX}^{-1}\boldsymbol{K}^{-1}\boldsymbol{J}_{2n}\boldsymbol{A}^*=\boldsymbol{B}^*$$

移项整理并化简，并由 $\boldsymbol{J}_{2n}^{-1}=\boldsymbol{J}_{2n}$，$\boldsymbol{K}^{-1}=-\boldsymbol{K}$，得

$$\boldsymbol{KJ}_{2n}\boldsymbol{A}^*=\boldsymbol{XKJ}_{2n}\boldsymbol{B}^*\tag{6}$$

记

$$\boldsymbol{C}=\boldsymbol{KJ}_{2n}\boldsymbol{B}^*,\ \boldsymbol{D}=\boldsymbol{KJ}_{2n}\boldsymbol{A}^*\tag{7}$$

则(6) 式等价于 $\boldsymbol{XC}=\boldsymbol{D}$. 因此，四元数矩阵方程(1) 存在共轭次辛矩阵解等价于下列四元数矩阵方程组有

解

$$\begin{cases}\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{B}\\ \boldsymbol{XC}=\boldsymbol{D}\end{cases}\tag{8}$$

设 $\boldsymbol{X}\in SQ_{2n}$，它在实数域 $\mathbb{R}$ 上的分解式为

$$\boldsymbol{X}=\boldsymbol{X}_0+\boldsymbol{X}_1 i+\boldsymbol{X}_2 j+\boldsymbol{X}_3 k$$

其中 $\boldsymbol{X}_m\in\mathbb{R}^{2n\times 2n}(m=0,1,2,3)$. 又设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}\in\mathbb{Q}^{l\times 2n}$，$\boldsymbol{C},\boldsymbol{D}\in\mathbb{Q}^{2n\times l}$ 的实分解式为

$$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}_0+\boldsymbol{A}_1 i+\boldsymbol{A}_2 j+\boldsymbol{A}_3 k,\ \boldsymbol{B}=\boldsymbol{B}_0+\boldsymbol{B}_1 i+\boldsymbol{B}_2 j+\boldsymbol{B}_3 k$$

$$\boldsymbol{C}=\boldsymbol{C}_0+\boldsymbol{C}_1 i+\boldsymbol{C}_2 j+\boldsymbol{C}_3 k,\ \boldsymbol{D}=\boldsymbol{D}_0+\boldsymbol{D}_1 i+\boldsymbol{D}_2 j+\boldsymbol{D}_3 k$$

这里 $\boldsymbol{A}_i,\boldsymbol{B}_i\in\mathbb{R}^{l\times 2n},\boldsymbol{C}_i,\boldsymbol{D}_i\in\mathbb{R}^{2n\times l}(i=0,1,2,3)$，则四元数矩阵方程组(8) 等价于

$$\begin{cases}(\boldsymbol{A}_0+\boldsymbol{A}_1 i+\boldsymbol{A}_2 j+\boldsymbol{A}_3 k)(\boldsymbol{X}_0+\boldsymbol{X}_1 i+\boldsymbol{X}_2 j+\boldsymbol{X}_3 k)=\boldsymbol{B}_0+\boldsymbol{B}_1 i+\boldsymbol{B}_2 j+\boldsymbol{B}_3 k\\ (\boldsymbol{X}_0+\boldsymbol{X}_1 i+\boldsymbol{X}_2 j+\boldsymbol{X}_3 k)(\boldsymbol{C}_0+\boldsymbol{C}_1 i+\boldsymbol{C}_2 j+\boldsymbol{C}_3 k)=\boldsymbol{D}_0+\boldsymbol{D}_1 i+\boldsymbol{D}_2 j+\boldsymbol{D}_3 k\end{cases}\tag{9}$$

将(9) 式左边展开，并根据四元数矩阵实分解的唯一性，可得

$$\begin{cases}\boldsymbol{A}_0\boldsymbol{X}_0-\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{X}_1-\boldsymbol{A}_2\boldsymbol{X}_2-\boldsymbol{A}_3\boldsymbol{X}_3=\boldsymbol{B}_0\\ \boldsymbol{A}_1\boldsymbol{X}_0+\boldsymbol{A}_0\boldsymbol{X}_1-\boldsymbol{A}_3\boldsymbol{X}_2+\boldsymbol{A}_2\boldsymbol{X}_3=\boldsymbol{B}_1\\ \boldsymbol{A}_2\boldsymbol{X}_0+\boldsymbol{A}_3\boldsymbol{X}_1+\boldsymbol{A}_0\boldsymbol{X}_2-\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{X}_3=\boldsymbol{B}_2\\ \boldsymbol{A}_3\boldsymbol{X}_0-\boldsymbol{A}_2\boldsymbol{X}_1+\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{X}_2+\boldsymbol{A}_0\boldsymbol{X}_3=\boldsymbol{B}_3\\ \boldsymbol{X}_0\boldsymbol{C}_0-\boldsymbol{X}_1\boldsymbol{C}_1-\boldsymbol{X}_2\boldsymbol{C}_2-\boldsymbol{X}_3\boldsymbol{C}_3=\boldsymbol{D}_0\\ \boldsymbol{X}_0\boldsymbol{C}_1+\boldsymbol{X}_1\boldsymbol{C}_0+\boldsymbol{X}_2\boldsymbol{C}_3-\boldsymbol{X}_3\boldsymbol{C}_2=\boldsymbol{D}_1\\ \boldsymbol{X}_0\boldsymbol{C}_2-\boldsymbol{X}_1\boldsymbol{C}_3+\boldsymbol{X}_2\boldsymbol{C}_0+\boldsymbol{X}_3\boldsymbol{C}_1=\boldsymbol{D}_2\\ \boldsymbol{X}_0\boldsymbol{C}_3+\boldsymbol{X}_1\boldsymbol{C}_2-\boldsymbol{X}_2\boldsymbol{C}_1+\boldsymbol{X}_3\boldsymbol{C}_0=\boldsymbol{D}_3\end{cases}$$

记

$$\boldsymbol{v}=\begin{bmatrix}\mathrm{vec}(\boldsymbol{X}_0)\\ \mathrm{vec}(\boldsymbol{X}_1)\\ \mathrm{vec}(\boldsymbol{X}_2)\\ \mathrm{vec}(\boldsymbol{X}_3)\end{bmatrix},\ \boldsymbol{G}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{I}\otimes\boldsymbol{A}_0 & -\boldsymbol{I}\otimes\boldsymbol{A}_1 & -\boldsymbol{I}\otimes\boldsymbol{A}_2 & -\boldsymbol{I}\otimes\boldsymbol{A}_3\\ \boldsymbol{I}\otimes\boldsymbol{A}_1 & \boldsymbol{I}\otimes\boldsymbol{A}_0 & -\boldsymbol{I}\otimes\boldsymbol{A}_3 & \boldsymbol{I}\otimes\boldsymbol{A}_2\\ \boldsymbol{I}\otimes\boldsymbol{A}_2 & \boldsymbol{I}\otimes\boldsymbol{A}_3 & \boldsymbol{I}\otimes\boldsymbol{A}_0 & -\boldsymbol{I}\otimes\boldsymbol{A}_1\\ \boldsymbol{I}\otimes\boldsymbol{A}_3 & -\boldsymbol{I}\otimes\boldsymbol{A}_2 & \boldsymbol{I}\otimes\boldsymbol{A}_1 & \boldsymbol{I}\otimes\boldsymbol{A}_0\\ \boldsymbol{C}_0^T\otimes\boldsymbol{I} & -\boldsymbol{C}_1^T\otimes\boldsymbol{I} & -\boldsymbol{C}_2^T\otimes\boldsymbol{I} & -\boldsymbol{C}_3^T\otimes\boldsymbol{I}\\ \boldsymbol{C}_1^T\otimes\boldsymbol{I} & \boldsymbol{C}_0^T\otimes\boldsymbol{I} & \boldsymbol{C}_3^T\otimes\boldsymbol{I} & -\boldsymbol{C}_2^T\otimes\boldsymbol{I}\\ \boldsymbol{C}_2^T\otimes\boldsymbol{I} & -\boldsymbol{C}_3^T\otimes\boldsymbol{I} & \boldsymbol{C}_0^T\otimes\boldsymbol{I} & \boldsymbol{C}_1^T\otimes\boldsymbol{I}\\ \boldsymbol{C}_3^T\otimes\boldsymbol{I} & \boldsymbol{C}_2^T\otimes\boldsymbol{I} & -\boldsymbol{C}_1^T\otimes\boldsymbol{I} & \boldsymbol{C}_0^T\otimes\boldsymbol{I}\end{bmatrix},\ \boldsymbol{L}=\begin{bmatrix}\mathrm{vec}(\boldsymbol{B}_0)\\ \mathrm{vec}(\boldsymbol{B}_1)\\ \mathrm{vec}(\boldsymbol{B}_2)\\ \mathrm{vec}(\boldsymbol{B}_3)\\ \mathrm{vec}(\boldsymbol{D}_0)\\ \mathrm{vec}(\boldsymbol{D}_1)\\ \mathrm{vec}(\boldsymbol{D}_2)\\ \mathrm{vec}(\boldsymbol{D}_3)\end{bmatrix}\tag{10}$$

于是方程组(8) 可写成

$$\boldsymbol{Gv}=\boldsymbol{L}$$

其中 $\boldsymbol{v}\in\mathbb{R}^{16n^2\times 1}$. 基于以上讨论，对于问题 1 的解有如下结果.

定理 1　已知四元数矩阵 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}\in\mathbb{Q}^{l\times 2n}$，则四元数矩阵方程(1) 存在四元数共轭次辛矩阵解的充要条件是

$$\boldsymbol{GG}^{+}\boldsymbol{L}=\boldsymbol{L}$$

有解时，它的共轭次辛矩阵解为

$$\boldsymbol{X}=\boldsymbol{X}_0+\boldsymbol{X}_1 i+\boldsymbol{X}_2 j+\boldsymbol{X}_3 k\tag{11}$$

其中

$$\boldsymbol{v}=\boldsymbol{G}^{+}\boldsymbol{L}+(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{G}^{+}\boldsymbol{G})\boldsymbol{Y},\ \forall\boldsymbol{Y}\in\mathbb{R}^{(12n-8)\times 1}$$

$$\mathrm{vec}(\boldsymbol{X}_0)=\boldsymbol{v}(1:4n^2),\ \mathrm{vec}(\boldsymbol{X}_1)=\boldsymbol{v}(4n^2+1:8n^2)$$

$$\mathrm{vec}(\boldsymbol{X}_2)=\boldsymbol{v}(8n^2+1:12n^2),\ \mathrm{vec}(\boldsymbol{X}_3)=\boldsymbol{v}(12n^2+1:16n^2)$$

这里 $\boldsymbol{G} \in \mathbb{R}^{16nl \times 16n^2}$，$\boldsymbol{L} \in \mathbb{R}^{16nl \times 1}$ 如(10)式所示，$\boldsymbol{v}(1:4n^2)$ 表示由向量的第1至 $4n^2$ 个元素组成的 $4n^2$ 维列向量.

证 由方程组(8)及引理1可得，(1)式存在四元数共轭次辛矩阵解等价于方程组(8)有解也等价于 $\boldsymbol{G}\boldsymbol{G}^{+}\boldsymbol{L} = \boldsymbol{L}$ 有解，(1)式的共轭次辛矩阵解显然由(11)式给出. 证毕.

2 问题2的解

设问题1的解集 $S_E \neq \varnothing$，$\boldsymbol{N} \in \mathbb{Q}^{2n \times 2n}$ 是已知的共轭次辛矩阵，现将 $\boldsymbol{N}$ 作实分解

$$\boldsymbol{N} = \boldsymbol{N}_0 + \boldsymbol{N}_1 i + \boldsymbol{N}_2 j + \boldsymbol{N}_3 k$$

其中 $\boldsymbol{N}_i \in \mathbb{R}^{2n \times 2n} (i = 0,1,2,3)$. 记

$$\boldsymbol{v}_N = \begin{bmatrix} \mathrm{vec}(\boldsymbol{N}_0) \\ \mathrm{vec}(\boldsymbol{N}_1) \\ \mathrm{vec}(\boldsymbol{N}_2) \\ \mathrm{vec}(\boldsymbol{N}_3) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{16n^2 \times 1} \tag{12}$$

则当 $\boldsymbol{X} \in S_E$ 时，由定理1有

$$\begin{aligned} \| \boldsymbol{X} - \boldsymbol{N} \|^2 &= \sum_{i=0}^{3} \| \boldsymbol{X}_i - \boldsymbol{N}_i \|^2 = \sum_{i=0}^{3} \| \mathrm{vec}(\boldsymbol{X}_i) - \mathrm{vec}(\boldsymbol{N}_i) \|^2 = \\ \| \boldsymbol{v} - \boldsymbol{v}_N \|^2 &= \| \boldsymbol{G}^{+}\boldsymbol{L} + (\boldsymbol{I} - \boldsymbol{G}^{+}\boldsymbol{G})\boldsymbol{Y} - \boldsymbol{v}_N \|^2 \end{aligned} \tag{13}$$

于是，关于问题2的解，我们有如下结果：

定理2 设问题1的解集 $S_E \neq \varnothing$，给定四元数共轭次辛矩阵 $\boldsymbol{N} \in \mathbb{Q}^{2n \times 2n}$，则在 S_E 中使得 $\| \boldsymbol{X} - \boldsymbol{N} \|$ 取最小值的解 $\widetilde{\boldsymbol{X}}$ 存在，且表示为

$$\widetilde{\boldsymbol{X}} = \boldsymbol{X}_0 + \boldsymbol{X}_1 i + \boldsymbol{X}_2 j + \boldsymbol{X}_3 k \tag{14}$$

其中

$$\widetilde{\boldsymbol{v}} = \boldsymbol{G}^{+}\boldsymbol{L} + (\boldsymbol{I} - \boldsymbol{G}^{+}\boldsymbol{G})(\boldsymbol{I} - \boldsymbol{G}^{+}\boldsymbol{G})^{+}(\boldsymbol{v}_N - \boldsymbol{G}^{+}\boldsymbol{L})$$

$$\mathrm{vec}(\boldsymbol{X}_0) = \widetilde{\boldsymbol{v}}(1:4n^2),\ \mathrm{vec}(\boldsymbol{X}_1) = \widetilde{\boldsymbol{v}}(4n^2+1:8n^2)$$

$$\mathrm{vec}(\boldsymbol{X}_2) = \widetilde{\boldsymbol{v}}(8n^2+1:12n^2),\ \mathrm{vec}(\boldsymbol{X}_3) = \widetilde{\boldsymbol{v}}(12n^2+1:16n^2)$$

这里的符号意义与定理1所示相同.

证 当 $\boldsymbol{X} \in S_E$ 时，根据定理1及(13)式可知

$$\| \boldsymbol{X} - \boldsymbol{N} \|^2 \text{ 取最小值} \Leftrightarrow \| \boldsymbol{G}^{+}\boldsymbol{L} + (\boldsymbol{I} - \boldsymbol{G}^{+}\boldsymbol{G})\boldsymbol{Y} - \boldsymbol{v}_N \|^2 \text{ 取最小值}$$

当 $\boldsymbol{G}^{+}\boldsymbol{G} \neq \boldsymbol{I}$ 时，由引理1，上式关于 $\boldsymbol{Y}$ 的最小二乘解为

$$\widetilde{\boldsymbol{Y}} = (\boldsymbol{I} - \boldsymbol{G}^{+}\boldsymbol{G})^{+}(\boldsymbol{v}_N - \boldsymbol{G}^{+}\boldsymbol{L})$$

当 $\boldsymbol{G}^{+}\boldsymbol{G} = \boldsymbol{I}$ 时，(1)式存在唯一解 $\widetilde{\boldsymbol{v}} = \boldsymbol{G}^{+}\boldsymbol{L}$，因此不论哪种情况均有

$$\widetilde{\boldsymbol{v}} = \boldsymbol{G}^{+}\boldsymbol{L} + (\boldsymbol{I} - \boldsymbol{G}^{+}\boldsymbol{G})\widetilde{\boldsymbol{Y}} = \boldsymbol{G}^{+}\boldsymbol{L} + (\boldsymbol{I} - \boldsymbol{G}^{+}\boldsymbol{G})(\boldsymbol{I} - \boldsymbol{G}^{+}\boldsymbol{G})^{+}(\boldsymbol{v}_N - \boldsymbol{G}^{+}\boldsymbol{L})$$

因此，存在 $\widetilde{\boldsymbol{X}} \in S_E$ 使得 $\| \boldsymbol{X} - \boldsymbol{N} \|$ 取最小值成立，且 $\widetilde{\boldsymbol{X}}$ 表示为(14)式. 证明完毕.

3 数值算例

算例1 给定下列四元数矩阵

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} i & 1 & -j & 0 \\ -1 & 1 & 0 & j \\ 0 & k & 1 & i \\ 1 & 0 & i+k & 1 \end{bmatrix},\ \boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} i & 1+k & -j & 0 \\ -1 & 1-j & i-k & j \\ 0 & k & -j & i \\ 1 & j & 2i+2k & 1 \end{bmatrix}$$

试讨论四元数矩阵方程 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{B}$ 的共轭次辛矩阵解的存在性.

解　四元数矩阵 $\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$ 的实分解矩阵分别为

$$\boldsymbol{A}_1=\begin{bmatrix}0&1&0&0\\-1&1&0&0\\0&0&1&0\\1&0&0&1\end{bmatrix},\ \boldsymbol{A}_2=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&1\\0&0&1&0\end{bmatrix},\ \boldsymbol{A}_3=\begin{bmatrix}0&0&-1&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix},\ \boldsymbol{A}_4=\begin{bmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{B}_1=\begin{bmatrix}0&1&0&0\\-1&1&0&0\\0&0&0&0\\1&0&0&1\end{bmatrix},\ \boldsymbol{B}_2=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\\0&0&2&0\end{bmatrix},\ \boldsymbol{B}_3=\begin{bmatrix}0&0&-1&0\\0&-1&0&1\\0&0&-1&0\\0&1&0&0\end{bmatrix},\ \boldsymbol{B}_4=\begin{bmatrix}0&1&0&0\\0&0&-1&0\\0&1&0&0\\0&0&2&0\end{bmatrix}$$

由 $\boldsymbol{KJ}_4\boldsymbol{B}^*=\boldsymbol{C}$，$\boldsymbol{KJ}_4\boldsymbol{A}^*=\boldsymbol{D}$，得

$$\boldsymbol{C}=\begin{bmatrix}1-k&1+j&-k&-j\\-i&-1&0&1\\0&j&i&-1\\-j&i-k&-j&2i+2k\end{bmatrix},\ \boldsymbol{D}=\begin{bmatrix}1&1&-k&0\\-i&-1&0&1\\0&j&i&-1\\-j&0&-1&i+k\end{bmatrix}$$

则四元数矩阵 $\boldsymbol{C}$，$\boldsymbol{D}$ 的实分解式为

$$\boldsymbol{C}_1=\begin{bmatrix}1&1&0&0\\0&-1&0&1\\0&0&0&-1\\0&0&0&0\end{bmatrix},\ \boldsymbol{C}_2=\begin{bmatrix}0&0&0&0\\-1&0&0&0\\0&0&1&0\\0&1&0&2\end{bmatrix},\ \boldsymbol{C}_3=\begin{bmatrix}0&1&0&-1\\0&0&0&0\\0&1&0&0\\-1&0&-1&0\end{bmatrix},\ \boldsymbol{C}_4=\begin{bmatrix}-1&0&-1&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&-1&0&2\end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{D}_1=\begin{bmatrix}1&1&0&0\\0&-1&0&1\\0&0&0&-1\\0&0&-1&0\end{bmatrix},\ \boldsymbol{D}_2=\begin{bmatrix}0&0&0&0\\-1&0&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{bmatrix},\ \boldsymbol{D}_3=\begin{bmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&1&0&0\\-1&0&0&0\end{bmatrix},\ \boldsymbol{D}_4=\begin{bmatrix}0&0&-1&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}$$

按(10)式写出实矩阵 $\boldsymbol{G}$ 和实向量 $\boldsymbol{L}$，并直接计算可知 $\boldsymbol{GG}^+\boldsymbol{L}=\boldsymbol{L}$，因此，根据定理 1，所给的四元数矩阵方程 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{B}$ 存在共轭次辛矩阵解 $\boldsymbol{X}$，且由公式(11)可得它的一般解为

$$\boldsymbol{X}=\begin{bmatrix}1&j&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&i+k&1\end{bmatrix}$$

算例 2　在辛矩阵和四阶微分算子自共轭边界条件的基本型中[17]，已知

$$\boldsymbol{A}_1=\begin{bmatrix}r_1&\bar{a}&0&-1\\a&r_2&1&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix},\ \boldsymbol{A}_2=\begin{bmatrix}r_1&\bar{a}&-k&-1\\a&r_2&1&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}$$

其中 $r_1,r_2\in\mathbb{R}$，$a\in\mathbb{Q}$，则存在共轭次辛矩阵 $\boldsymbol{K}_1$，使得

$$\boldsymbol{A}_2=\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{K}_1$$

其中

$$\boldsymbol{K}_1=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&k&1\end{bmatrix}$$

4 结语

本文提出四元数矩阵方程 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{B}$ 何时存在共轭次辛结构解的判定与求解问题. 主要利用共轭转置矩阵和共轭次转置矩阵的关联性，以及四元数矩阵的实分解和矩阵的 Kronecker 积，克服了四元数乘法非交换所带来的困难，同时将结构方程转化为无约束方程，从而得到原方程具有共轭次辛结构解的充要条件以及解的表达式. 在该方程的解集 $S_E \neq \varnothing$ 条件下，利用矩阵 Frobenius 范数性质，在 S_E 中找到与给定共轭次辛矩阵 $\boldsymbol{N}$ 的最佳逼近解. 所得结果拓广了四元数矩阵方程新结构解的处理技巧与方法.

参考文献:

[1] 华罗庚，万哲先. 典型群[M]. 上海：科学技术出版社，1963.
[2] 刘 玉，许滋燕. 实数域上的次辛矩阵[J]. 中北大学学报(自然科学版)，2011，32(5)：534-539.
[3] 刘 玉，徐曼曼. 复数域上的共轭次辛矩阵[J]. 科技通报，2011，27(3)：317-320.
[4] 袁晖坪. 关于次酉矩阵与次镜象矩阵[J]. 数学杂志，2002，22(3)：314-318.
[5] 夏 林. 融合全参数辛矩阵的饲料物流企业竞争力评价[J]. 饲料研究，2019，42(3)：105-108.
[6] 付会欣. 李群机器学习中的辛群分类器研究[D]. 苏州：苏州大学，2008.
[7] 钟万勰，孙 雁. 小参数摄动法与保辛[J]. 动力学与控制学报，2005，3(1)：1-6.
[8] 吴 锋，汪 拓，费锦华，等. 热声网络的辛矩阵分析[J]. 热科学与技术，2013，12(4)：283-289.
[9] KÖSAL H H. Least-Squares Solutions of the Reduced Biquaternion Matrix Equation $AX=B$ and Their Applications in Colour Image Restoration[J]. Journal of Modern Optics，2019，66(18)：1802-1810.
[10] ZHANG F X，MU W S，LI Y，et al. Special Least Squares Solutions of the Quaternion Matrix Equation $AXB+CXD=E$[J]. Computers & Mathematics With Applications，2016，72(5)：1426-1435.
[11] ŞIMŞEK S，SARDUVAN M，ÖZDEMIR H. Centrohermitian and Skew-Centrohermitian Solutions to the Minimum Residual and Matrix Nearness Problems of the Quaternion Matrix Equation $(AXB, DXE)=(C, F)$[J]. Advances in Applied Clifford Algebras，2017，27(3)：2201-2214.
[12] YUAN S F，LIAO A P. Least Squares Hermitian Solution of the Complex Matrix Equation $AXB+CXD=E$ with the Least Norm[J]. Journal of the Franklin Institute，2014，351(11)：4978-4997.
[13] SONG G J，YU S W. The Solution of a Generalized Sylvester Quaternion Matrix Equation and Its Application[J]. Advances in Applied Clifford Algebras，2017，27(3)：2473-2492.
[14] YUAN S F，WANG Q W. Two Special Kinds of Least Squares Solutions for the Quaternion Matrix Equation $AXB+CXD=E$[J]. The Electronic Journal of Linear Algebra，2012(23)：18. DOI：10.13001/1081-3810.1519.
[15] 袁晖坪. 次正交矩阵与次对称矩阵[J]. 西南师范大学学报(自然科学版)，1998，23(2)：147-151.
[16] 蓝家新，黄敬频，毛利影，等. 四元数矩阵方程 $AXB+CXD=E$ 的广义延拓解[J]. 计算数学，2020，42(4)：497-507.
[17] 吴佼佼，孙 炯，于佳晖. 辛矩阵和四阶微分算子自共轭边界条件的基本型[J]. 数学学报(中文版)，2016，59(1)：47-56.

责任编辑 张 枸