

一类阶为 $2pqr$ 的 CA-群^①

陈佳琪, 周 伟

西南大学 数学与统计学院, 重庆 400715

摘要: 如果对任意 $x \in G \setminus Z(G)$, 有 $C_G(x)$ 交换, 则称群 G 为 CA-群. 通过反证法, 证明了阶为 $2pqr$ 的群是 CA-群,

其中 p, q, r 均为素数, 且 $2 < p < q < r$, $\frac{r-1}{2} < p$.

关 键 词: 中心化子; 正规化子; Sylow 子群; 直积

中图分类号: O152.1

文献标志码: A

文章编号: 1000-5471(2021)12-0001-04

A Kind of CA-Groups of Order $2pqr$

CHEN Jiaqi, ZHOU Wei

School of Mathematics and Statistics, Southwest University, Chongqing 400715, China

Abstract: If $C_G(x)$ is commutative for any $x \in G \setminus Z(G)$, then the group G is called CA-group. It is proved in this paper that a group of order $2pqr$ is a CA-group by using reduction to absurdity, where p, q, r are all primes, $2 < p < q < r$ and $\frac{r-1}{2} < p$.

Key words: centralier; normalizer; Sylow subgroup; direct product

子群在群论的研究中起着重要的作用, 例如文献[1-3] 都通过研究特殊子群来得到群的性质和结构. 元素的中心化子亦为一类特殊的子群, 若对群中元素的中心化子的个数进行限制, 则可以确定群的结构. 文献[4] 证明了: 若群 G 与其商群 $G/Z(G)$ 中元素的中心化子的个数均为 6, 则 $G/Z(G) \cong A_4$. 文献[5] 证明了: 不存在群 G 与其商群 $G/Z(G)$ 中元素的中心化子的个数均为 8 的情况. 文献[6] 证明了: 若奇阶群 G 中元素的中心化子的个数为 9, 则 $G/Z(G) \cong C_7 \rtimes C_4, C_7 \times C_7$.

如果对任意 $x \in G \setminus Z(G)$, 有 $C_G(x)$ 交换, 则称群 G 为 CA-群. 文献[7] 证明了: CA-群是单群或者可解群. 文献[8] 证明了: 偶数阶 CA-群是 Frobenius-群、交换群或者特殊射影线性群 $PSL(2, 2^m)$, 其中 $m > 2$. 文献[9] 构造出了偶数阶 CA-单群. 此类研究对文献[10] 中关于奇数阶群可解性的 Feit-Thompson 理论具有重大贡献.

由于 CA-群在群的研究中起着重要的作用, 因此给出 CA-群的判定成为了一项有意义的工作. 文献[11] 根据群的阶去判定 CA-群, 证明了: 若 $|G : Z(G)| = pqr$, 则群 G 是 CA-群, 其中 p, q, r 为素数.

① 收稿日期: 2020-12-09

基金项目: 国家自然科学基金项目(11971391).

作者简介: 陈佳琪, 硕士研究生, 主要从事群论的研究.

通信作者: 周 伟, 副教授.

本文将继续这方面的研究,我们得出了:若 $|G| = 2pqr$, 则群 G 是 CA-群, 其中 p, q, r 是素数, 且 $2 < p < q < r$, $\frac{r-1}{2} < p$. 并由此推论出: 若 $|G : Z(G)| = 2pqr$, $Z(G/Z(G)) = 1$ 且 p, q, r 仍满足上述条件, 则群 G 是 CA-群.

引理 1^[12] 若 $H \leq Z(G)$, 则 $H \trianglelefteq G$. 又若 G/H 是循环群, 则群 G 是交换群.

引理 2^[13] 设 $H \leq G$, 则 $N_G(H)/C_G(H)$ 同构于 $\text{Aut}(H)$ 的一个子群, 记作 $N_G(H)/C_G(H) \leq \text{Aut}(H)$.

引理 3^[14] 有限循环群 Z_n 有 $\varphi(n)$ 个自同构(这里 φ 是 Euler 函数).

引理 4^[15] 设 G 是 np 阶群(p 是素数), 若 $n < p$, 则 G 有 p 阶正规子群.

引理 5 若群 $|H| = kl$, 其中 k, l 均为素数, 且 $\frac{k-1}{2} < l < k$, 则 H 是二循环群直积.

证 设 $y, z \in H$, 且 $|y| = k$, $|z| = l$. 由 $l < k$ 以及引理 4 可得 $\langle y \rangle \trianglelefteq \langle y, z \rangle$. 下面考虑 $\langle z \rangle$ 在 $\langle y \rangle$ 上的作用. 令 $\varphi : z \mapsto \tau$, 其中 $\tau \in \text{Aut}(\langle y \rangle)$. 由

$$\varphi(1) = \varphi(z^l) = \varphi(z)^l = \tau^l = \epsilon$$

可得 $o(\tau) \mid l$. 又由引理 3 知

$$|\text{Aut}(\langle y \rangle)| = k - 1$$

则 $o(\tau) \mid (k - 1)$. 根据条件 $l < k$, $\frac{k-1}{2} < l$, 可得 $(l, k - 1) = 1$, 从而 $o(\tau) = 1$, 即 $\tau = \epsilon$, 故 $\langle z \rangle$ 在 $\langle y \rangle$ 上的作用平凡, 则 $y^z = y$, 即 $[y, z] = 1$, 从而 $\langle y, z \rangle = \langle y \rangle \times \langle z \rangle$.

定理 1 设 $|G| = 2pqr$, 其中 p, q, r 是素数, 且 $2 < p < q < r$, $\frac{r-1}{2} < p$, 则群 G 是 CA-群.

证 若不然, 则存在 $x \in G \setminus Z(G)$, 使得 $C_G(x)$ 不交换. 由 $x \in G \setminus Z(G)$, 可得 $Z(G) \subset \langle x, Z(G) \rangle$. 又由 $C_G(x)$ 不交换, 可得 $Z(C_G(x)) \subset C_G(x)$, 从而得到一个子群链, 即

$$\{1\} \subseteq Z(G) \subset \langle x, Z(G) \rangle \subseteq Z(C_G(x)) \subset C_G(x) \subset G \quad (1)$$

当 $|Z(G)| > 1$ 时, 由(1)式知 $C_G(x)/Z(C_G(x))$ 的阶为一个素数, 则它必为循环群. 又由引理 1 知 $C_G(x)$ 交换, 矛盾. 当 $|Z(G)| = 1$ 时, (1)式变为

$$\{1\} \subset \langle x \rangle = \langle x, Z(G) \rangle \subseteq Z(C_G(x)) \subset C_G(x) \subset G \quad (2)$$

令

$$|G : C_G(x)| = n \quad |Z(C_G(x)) : \langle x \rangle| = m \quad m, n \in \{2, p, q, r\}$$

接下来考虑 x 的阶. 当 x 的阶为合数时, 由(2)式知 $C_G(x)/Z(C_G(x))$ 的阶为一个素数, 则它必为循环群. 又由引理 1 知 $C_G(x)$ 交换, 矛盾. 当 x 的阶为一个素数时, 进一步考虑 m, n 的情况. 若 m, n 中至少有一个数为合数, 由(2)式知 $C_G(x)/Z(C_G(x))$ 的阶为一个素数, 由上面的讨论可知 $C_G(x)$ 交换, 矛盾. 因此我们只需考虑 m, n 以及 $|x|$ 均为素数的情况, 其中 $m, n, |x| \in \{2, p, q, r\}$.

下面对 $|x|$ 的值进行具体讨论. 注意到, 由于 n 为素数, 故 $C_G(x)$ 为 G 的极大子群. 从而 $N_G(\langle x \rangle)$ 只有两种情况, 即 $N_G(\langle x \rangle) = C_G(x)$ 或 $N_G(\langle x \rangle) = G$.

情形 1 $|x| = 2$.

若 $N_G(\langle x \rangle) = C_G(x)$, 则 $|G : N_G(\langle x \rangle)| = n$, 从而 G 中 $\text{Syl}_2(G)$ 子群的个数为 n . 由 Sylow 定理知 $n \neq 2$, 即 $n \in \{p, q, r\}$. 因为 $|G : C_G(x)| = n$, 故可设 $|C_G(x)| = 2kl$, 其中 $l, k \in \{p, q, r\}$, 从而存在子群 H , 有 $C_G(x) = \langle x \rangle H$, 其中 $|H| = kl$. 又因为 $\langle x \rangle \leq Z(C_G(x))$, 则 $C_G(x) = \langle x \rangle \times H$. 不妨设 y, z 分别为 $C_G(x)$ 的 k, l 阶元. 由引理 5 可知 $H = \langle y \rangle \times \langle z \rangle$, 则

$$C_G(x) = \langle x \rangle \times \langle y \rangle \times \langle z \rangle$$

从而 $C_G(x)$ 交换, 矛盾.

若 $N_G(\langle x \rangle) = G$, 则 $\langle x \rangle \trianglelefteq G$. 因为 $|x| = 2$, 所以 $\langle x \rangle = \{1, x\}$. 又因为 $\langle x \rangle \trianglelefteq G$, 故 $xg = gx$, 从而 $\langle x \rangle \leq Z(G)$, 与 $|Z(G)| = 1$ 矛盾.

情形 2 $|x| = p$.

若 $N_G(\langle x \rangle) = C_G(x)$, 则 $|G : N_G(\langle x \rangle)| = n$, 从而 G 中 $\text{Syl}_p(G)$ 子群的个数为 n . 由 Sylow 定理知 $n = q, r$. 当 $n = q$ 时, 有 $p \mid (q-1)$, 由 $p < q < r$, $\frac{r-1}{2} < p$, 可得 $\frac{q-1}{2} < p$, 从而 $p = q-1$, 与 p, q 均为奇数矛盾. 当 $n = r$ 时, 有 $p \mid (r-1)$, 由 $\frac{r-1}{2} < p < r$ 可得 $p = r-1$, 与 p, r 均为奇数矛盾.

若 $N_G(\langle x \rangle) = G$. 由 $|G : C_G(x)| = n$, 得 $|N_G(\langle x \rangle) : C_G(x)| = n$. 又由引理 2 及引理 3 可得 $n \mid (p-1)$, 则 $n = 2$, 从而 $|C_G(x) : \langle x \rangle| = qr$. 因此存在子群 H , 有 $C_G(x) = \langle x \rangle H$, 其中 $|H| = qr$. 又因为 $\langle x \rangle \leq Z(C_G(x))$, 所以 $C_G(x) = \langle x \rangle \times H$. 不妨设 y, z 分别为 $C_G(x)$ 的 q, r 阶元. 由引理 5 可得 $H = \langle y \rangle \times \langle z \rangle$, 从而

$$C_G(x) = \langle x \rangle \times \langle y \rangle \times \langle z \rangle$$

则 $C_G(x)$ 交换, 矛盾.

情形 3 $|x| = q$.

若 $N_G(\langle x \rangle) = C_G(x)$, 则 $|G : N_G(\langle x \rangle)| = n$, 从而 G 中 $\text{Syl}_q(G)$ 子群的个数为 n . 由 Sylow 定理知 $n = r$, 即 $q \mid (r-1)$. 又由 $\frac{r-1}{2} < p < q < r$, 可得 $q = r-1$, 与 q, r 均为奇数矛盾.

若 $N_G(\langle x \rangle) = G$, 由 $|G : C_G(x)| = n$, 有 $|N_G(\langle x \rangle) : C_G(x)| = n$. 又由引理 2 及引理 3 可得 $n \mid (q-1)$, 从而 $n = 2$ 或 $n = p$.

当 $n = p$ 时, 则 $p \mid (q-1)$. 由 $\frac{r-1}{2} < p, q < r$, 可得 $\frac{q-1}{2} < p$, 从而 $p = q-1$, 与 p, q 均为奇数矛盾.

当 $n = 2$ 时, 有 $|C_G(x) : \langle x \rangle| = pr$, 则存在子群 H , 有 $C_G(x) = \langle x \rangle H$, 其中 $|H| = pr$. 又因为 $\langle x \rangle \leq Z(C_G(x))$, 所以 $C_G(x) = \langle x \rangle \times H$. 不妨设 y, z 分别为 $C_G(x)$ 的 p, r 阶元, 由引理 5 知 $H = \langle y \rangle \times \langle z \rangle$, 从而

$$C_G(x) = \langle x \rangle \times \langle y \rangle \times \langle z \rangle$$

则 $C_G(x)$ 交换, 矛盾.

情形 4 $|x| = r$.

若 $N_G(\langle x \rangle) = C_G(x)$, 则 $|G : N_G(\langle x \rangle)| = n$, 从而 G 中 $\text{Syl}_r(G)$ 子群的个数为 n . 由 Sylow 定理知 $n = 1$, 即 G 中 $\text{Syl}_r(G)$ 子群唯一, 则 $\langle x \rangle \trianglelefteq G$, 则 $N_G(\langle x \rangle) = G$, 从而

$$G = N_G(\langle x \rangle) = C_G(x)$$

与 $|G : C_G(x)| = n$ 矛盾.

若 $N_G(\langle x \rangle) = G$, 由 $|G : C_G(x)| = n$, 有 $|N_G(\langle x \rangle) : C_G(x)| = n, n \in \{2, p, q\}$. 又由引理 2 及引理 3 知 $n \mid (r-1)$.

当 $n = p$ 时, 由 $p \mid (r-1)$, $\frac{r-1}{2} < p$, 有 $p = r-1$, 与 p, r 均为奇数矛盾.

当 $n = q$ 时, 由 $q \mid (r-1)$, $\frac{r-1}{2} < p < q$, 有 $q = r-1$, 与 q, r 均为奇数矛盾.

当 $n = 2$ 时, 有 $|C_G(x) : \langle x \rangle| = pq$, 则存在子群 H , 有 $C_G(x) = \langle x \rangle H$, 其中 $|H| = pq$. 又因为 $\langle x \rangle \leq Z(C_G(x))$, 所以 $C_G(x) = \langle x \rangle \times H$. 不妨设 y, z 分别为 G 中的 p, q 阶元, 由引理 5 可得 $H = \langle y \rangle \times \langle z \rangle$, 则 $C_G(x) = \langle x \rangle \times \langle y \rangle \times \langle z \rangle$, 从而 $C_G(x)$ 交换, 矛盾.

综上所述, G 是 CA-群.

由定理 1 可得到如下群例:

例 1 因为 $\frac{13-1}{2} < 7$, 所以若 $|G| = 2 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13$, 则群 G 是 CA-群.

注意到, 若群 A 是有限交换群, 且 $|A| = p_1 p_2 \cdots p_s (i, j \in \{1, 2, \dots, s\}, \text{对 } i \neq j, \text{有 } p_i \neq p_j)$, 则群 A 是循环群. 由此, 我们可以得到如下结论:

推论 1 若 $|G| = 2pqr$, 其中 p, q, r 是素数, 且 $2 < p < q < r, \frac{r-1}{2} < p$, 则对任意 $x \in G \setminus Z(G)$,

有 $C_G(x)$ 是循环群.

应用推论 1, 我们可以得到如下结论:

推论 2 设 $|G : Z(G)| = 2pqr$, 其中 p, q, r 是素数, 且 $2 < p < q < r$, $\frac{r-1}{2} < p$. 若 $Z(G/Z(G)) = 1$, 则群 G 是 CA-群.

证 任取 $x \in G \setminus Z(G)$. 记

$$\bar{G} = G/Z(G) \quad \bar{x} = xZ(G)$$

因为 $Z(G/Z(G)) = 1$, 所以 $\bar{x} \in \bar{G} \setminus Z(\bar{G})$. 由推论 1 知 $C_{\bar{G}}(\bar{x})$ 为循环群. 又因为

$$C_G(x)/Z(G) \lesssim C_{\bar{G}}(\bar{x})$$

所以 $C_G(x)/Z(G)$ 亦为循环群, 从而由引理 1 知 $C_G(x)$ 交换, 则群 G 是 CA-群.

参考文献:

- [1] 陈瑞芳, 陈贵云. 一些特殊子群与有限群的性质 [J]. 西南师范大学学报(自然科学版), 2010, 35(5): 5-8.
- [2] 陈瑞芳, 曹洪平, 陈贵云. 一些特殊子群对有限群可解性的影响 [J]. 西南师范大学学报(自然科学版), 2011, 36(1): 6-9.
- [3] 姜富铭, 周 伟. 具有特殊循环子群个数的有限群 [J]. 西南师范大学学报(自然科学版), 2019, 44(2): 14-17.
- [4] ASHRAFI A R. On Finite Groups with a Given Number of Centralizers [J]. Algebra Colloquium, 2000, 7(2): 139-146.
- [5] ABDOLLAHI A, AMIRI S M J, HASSANABADI A M. Groups with Specific Number of Centralizers [J]. Houston Journal of Mathematics, 2007, 33(1): 43-57.
- [6] BAISHYA S J. On Finite Groups with Nine Centralizers [J]. Bollettino Dell'Unione Matematica Italiana, 2016, 9(4): 527-531.
- [7] WEISNER L. Groups in Which the Normaliser of Every Element Except Identity is Abelian [J]. Bulletin of the American Mathematical Society, 1925, 31(8): 413-417.
- [8] BRAUER R, SUZUKI M, WALL G E. A Characterization of the One-Dimensional Unimodular Projective Groups Over Finite Fields [J]. Illinois Journal of Mathematics, 1958, 2(4B): 718-745.
- [9] SUZUKI M. The Nonexistence of a Certain Type of Simple Groups of Odd Order [J]. Proceedings of the American Mathematical Society, 1957, 8(4): 686-695.
- [10] FEIT W, THOMPSON J G. Solvability of Groups of Odd Order [J]. Pacific Journal of Mathematics, 1963, 13(3): 779-1029.
- [11] BAISHYA S J. On Finite Groups with Specific Number of Centralizers [J]. International Electronic Journal of Algebra, 2013, 13(13): 53-62.
- [12] 徐明曜. 有限群导引(上册) [M]. 北京: 科学出版社, 1987.
- [13] 陈重穆. 有限群论基础 [M]. 重庆: 重庆出版社, 1983: 26-28.
- [14] 杨子胥. 近世代数 [M]. 2 版. 北京: 高等教育出版社, 2003: 48-53.
- [15] 赵适红. Sylow 定理的证明及其应用 [J]. 长治学院学报, 2008, 25(5): 50-52.

责任编辑 廖 坤