第 46 卷 第 12 期 西南师范大学学报(自然科学版) 2021 年 12 月
Vol. 46 No. 12 Journal of Southwest China Normal University (Natural Science Edition) Dec. 2021

DOI:10.13718/j.cnki.xsxb.2021.12.002

闭模糊拟阵中模糊秩的计算[①]

吴德垠

重庆大学 数学与统计学院,重庆 401331

摘要:本文利用普通拟阵的秩函数理论讨论闭模糊拟阵的模糊秩函数的性质,设计从普通拟阵的秩函数来计算模糊拟阵的模糊秩的方法.首先定义了 2 个概念:模糊集合的下截短模糊集和针对某闭模糊拟阵的模糊集的非空导出独立集界.通过讨论这些概念的性质,得到模糊秩计算简化定理和最大模糊独立子集的模糊隶属度定理.然后,利用这两个结论,得到了模糊秩函数的导出秩函数表示定理.由此,将模糊拟阵模糊秩的计算转换为对导出拟阵秩的计算.最后,构造并证明了通过导出拟阵秩来计算模糊拟阵模糊秩的算法.

关 键 词:拟阵;模糊拟阵;导出拟阵;秩函数;模糊秩函数;模糊秩的计算

中图分类号:O157;O159 **文献标志码**:A **文章编号**:1000-5471(2021)12-0005-08

On Calculations of Fuzzy Ranks in Closed Fuzzy Matroids

WU Deyin

School of Mathematics and Statistics, Chongqing University, Chongqing 401331, China

Abstract: With help rank funtions of crisp matroids, in the article, properties of fuzzy rank functions of closed fuzzy matroids have been discussed and the calculating method of fuzzy ranks been designed by crisp matroid ranks. First, two concepts are defined in the paper. They are lower truncated fuzzy sets and non-empty induced independent set bounds of fuzzy sets. By discussing the properties of these two concepts, two important conclusions are obtained: the simplified theorem of fuzzy rank calculations and the fuzzy membership theorem of maximum fuzzy independent subsets. Then the article gets the representation theorem of fuzzy rank functions through induced matroid rank function, and converts the calculation of fuzzy ranks into the calculation of induced matroid ranks by using above two conclusions. Last, using the representation theorem, the paper designs and proves the algorithm for calculating fuzzy ranks by induced matroid ranks.

Key words: matroids; fuzzy matroids; induced matroids; rank functions; fuzzy rank functions; calculating of fuzzy ranks

文献[1]将模糊集合引入拟阵[2],定义了模糊拟阵,同时,类似于拟阵的秩函数[2]概念定义了模糊拟阵的模糊秩函数,证明了这种模糊秩函数也满足类似于拟阵秩公理的 3 个性质.文献[3]增加了 2 个性质,证明了一组模糊集合函数如果满足这 5 个性质时,将确定一个模糊拟阵.随后,文献[3]证明了一个模糊拟

① 收稿日期:2020-09-15
基金项目:国家自然科学基金项目(61374078).
作者简介:吴德垠,教授,主要从事模糊拟阵的研究.

阵的模糊秩函数可以分解为一组初等模糊拟阵的模糊秩函数的和.文献[3]的关键思路是将模糊拟阵分解为一组初等模糊拟阵来进行处理.受此思路的启发,结合初等模糊拟阵本质上等价于普通拟阵,再结合文献[1]的观察2.2,自然地想到模糊拟阵的模糊秩函数是否可以由其普通拟阵的秩函数来确定?能否将模糊拟阵的模糊秩的计算转换为其普通拟阵的秩的计算?这些就是本文所要讨论的问题.

1 预备知识

由于模糊拟阵研究的习惯,模糊数学的概念和符号主要采用文献[1]的记法.设 $E=\{x_1, x_2, \cdots, x_N\}$ 是一个有限非空集合,则 E 上的模糊集 μ 是一个映射:$\mu: E \longrightarrow [0, 1]$. E 上模糊子集的全体记为 $F(E)$. E 上子集的全体记为 $P(E)$(即 E 的幂集).

关于普通拟阵的概念和记号,主要参见文献[2].

定义 1[2] 设 E 是非空有限集,取 $I \subseteq P(E)$.若 I 满足下列条件:

(a) $\varnothing \in I$;

(b) 若 $X \in I$, $Y \subseteq X$,则 $Y \in I$;

(c) 若 $X, Y \in I$, $|X| < |Y|$,则有 $W \in I$,使得 $X \subset W \subseteq X \cup Y$.

则称偶对(E, I)为 E 上的一个拟阵,记为 $\boldsymbol{M}=(E, I)$. $\forall X \subseteq E$,如果 $X \in I$,则称 X 为 $\boldsymbol{M}$ 的独立集,否则称为 $\boldsymbol{M}$ 的相关集.

定义 $\boldsymbol{M}=(E, I)$ 的秩函数[2]为

$$R(A)=\max\{|X|: X \subseteq A, X \in I\} \qquad \forall A \in P(E) \tag{1}$$

文献[1]的定义1.2提出了模糊拟阵的概念.我们涉及的模糊拟阵的概念和记号来源于文献[1,3].模糊拟阵的一些最新结论可参见文献[4-12].

定义 2[1] 设 E 是一个非空有限集,$\ell \subseteq F(E)$ 是一个满足下列条件的非空模糊集族:

(a)(继承性)若 $\mu \in \ell$, $\nu \in F(E)$, $\nu \leqslant \mu$,则 $\nu \in \ell$;

(b)(交换性)若 $\mu, \nu \in \ell$, $|\operatorname{supp} \mu| < |\operatorname{supp} \nu|$,则存在 $\omega \in \ell$,使得

(b_1) $\mu < \omega \leqslant \mu \vee \nu$,

(b_2) $m(\omega) \geqslant \min\{m(\mu), m(\nu)\}$($m(\mu)$ 表示模糊集 μ 的最小的非零模糊隶属度[1]).

则称偶对 $\boldsymbol{M}=(E, \ell)$ 是 E 上的模糊拟阵,ℓ 称为 $\boldsymbol{M}$ 的独立模糊集族. $\forall \mu \in F(E)$,若 $\mu \in \ell$,则称 μ 为 $\boldsymbol{M}$ 的模糊独立集.

根据文献[1]的(7)式,定义 $\boldsymbol{M}=(E, \ell)$ 的模糊秩函数[1]为

$$\rho(\mu)=\sup\{|\nu|: \nu \leqslant \mu, \nu \in \ell\} \qquad \forall \mu \in F(E) \tag{2}$$

由文献[1]的观察2.2,一个模糊拟阵可以被分解为一组普通拟阵和一组数.为了使用方便,我们将其改述为如下定理:

定理 1[1](模糊拟阵分解定理) 设 $\boldsymbol{M}=(E, \ell)$ 是模糊拟阵,$\forall r \in (0, 1]$,令 $I_r=\{C_r(\mu): \forall \mu \in \ell\}$,则 $\boldsymbol{M}_r=(E, I_r)$ 是 E 上的拟阵.而且有有限实数列 $r_0 < r_1 < \cdots < r_n$,使得:

(i) $r_0=0$, $r_n \leqslant 1$;

(ii) 当 $0 < r \leqslant r_n$ 时,$I_r \neq \varnothing$;当 $r > r_n$ 时,$I_r=\varnothing$;

(iii) $\forall s, t \in (r_i, r_{i+1})$, $I_s=I_t (i=0, \cdots, n-1)$;

(iv) 若 $r_i < s < r_{i+1} < t < r_{i+2}$,则 $I_s \supset I_t (i=0, \cdots, n-2)$.

我们称序列 $0=r_0 < r_1 < \cdots < r_n \leqslant 1$ 为 $\boldsymbol{M}$ 的基本序列.对 $1 \leqslant i \leqslant n$,令 $\overline{r_i}=\dfrac{1}{2}(r_{i-1}+r_i)$,称拟阵序列 $\boldsymbol{M}_{\overline{r_1}}=(E, I_{\overline{r_1}}) \supset \cdots \supset \boldsymbol{M}_{\overline{r_n}}=(E, I_{\overline{r_n}})$ 为 $\boldsymbol{M}$ 的导出拟阵序列.若 $\boldsymbol{M}_{\overline{r_i}}=\boldsymbol{M}_{r_i} (i=1, 2, \cdots, n)$,则称 $\boldsymbol{M}$ 是闭模糊拟阵.

我们一般称拟阵 $\boldsymbol{M}_r$ 是模糊拟阵 $\boldsymbol{M}$ 的 r-导出拟阵,简称导出拟阵.

由定理1易知,$\forall \mu \in \ell$, $M(\mu) \leqslant r_n$. $M(\mu)$ 表示 μ 的最大模糊隶属度[1].

根据文献[1]的定理2.4,$\mu \in F(E)$, $\mu \in \ell$ 当且当 $\forall r \in (0, 1]$, $C_r(\mu) \in I_r$.

命题 1　如果 $\boldsymbol{M}=(E,\ell)$ 是闭模糊拟阵，其基本序列是 $0=r_0<r_1<\cdots<r_n\leqslant 1$，导出拟阵序列为 $\boldsymbol{M}_{r_1}=(E,I_{r_1})\supset\cdots\supset\boldsymbol{M}_{r_n}=(E,I_{r_n})$. 取 $\mu\in F(E)$，若 $R^+(\mu)=\{\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_s\}$，则 $\mu\in\ell$ 当且当 $\forall\lambda_i\in R^+(\mu)$，$C_{\lambda_i}(\mu)\in I_{\lambda_i}$.

命题 1 的必要性是显然的. 由定理 1 易得充分性.

与定理 1 相对应地，文献[10] 的定理 2.8 部分地(即只对闭模糊拟阵) 解决了逆问题，即从一个数列和一个拟阵列可以得到唯一一个闭模糊拟阵.

定理 2　设 $\mu\in F(E)$，$R^+(\mu)=\{\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_t\}(0<\lambda_1<\lambda_2<\cdots<\lambda_t\leqslant 1)$，则

$$|\mu|=\sum_{i=1}^{t-1}[|C_{\lambda_i}(\mu)|-|C_{\lambda_{i+1}}(\mu)|]\cdot\lambda_i+|C_{\lambda_t}(\mu)|\cdot\lambda_t$$

根据模糊集合的分解定理即可证明定理 2. 同时推广定理 2，可得到如下更广泛的结论：

定理 3　设有子集套[11] $E\supseteq A_1\supseteq A_2\supseteq\cdots\supseteq A_p$，数列 $0<\lambda_1<\cdots<\lambda_p\leqslant 1$. 构造模糊集合

$$\mu=\omega(A_1,\lambda_1)\vee\omega(A_2,\lambda_2)\vee\cdots\vee\omega(A_p,\lambda_p)$$

则

$$|\mu|=\sum_{i=1}^{p-1}|A_i-A_{i+1}|\cdot\lambda_i+|A_p|\cdot\lambda_p=\sum_{i=1}^{p-1}[|A_i|-|A_{i+1}|]\cdot\lambda_i+|A_p|\cdot\lambda_p$$

证　显然，$C_{\lambda_i}(\mu)=A_i$. 如果 $A_1\supset A_2\supset\cdots\supset A_p$，则利用定理 2，结论成立.

如果这些包含关系出现等式，则在每个等式段中，保留下标最大者(也即该等式段的最后一项)，得到 $A_{i_1}\supset A_{i_2}\supset\cdots\supset A_{i_q}$. 必有 $i_q=p$，也即 $A_{i_q}=A_p$. 由下标对应，得到 $\lambda_{i_1}<\lambda_{i_2}<\cdots<\lambda_{i_q}=\lambda_p$. 此时，显然有

$$\mu=\omega(A_{i_1},\lambda_{i_1})\vee\omega(A_{i_2},\lambda_{i_2})\vee\cdots\vee\omega(A_{i_q},\lambda_{i_q})\tag{3}$$

同时，根据定理 2，有

$$|\mu|=\sum_{k=1}^{q-1}[|A_{i_k}|-|A_{i_{k+1}}|]\cdot\lambda_{i_k}+|A_{i_p}|\cdot\lambda_{i_p}\tag{4}$$

不妨设 A_{i_j} 所在等式段有 $\kappa_j(\geqslant 1)$ 个 A_{i_j}，即有连续下标的 κ_j 个相同集合($A_{i_j-\kappa_j}=\cdots=A_{i_j-1}=A_{i_j}$).

由(3) 式的构造易证：$\lambda_i\notin\{\lambda_{i_1},\lambda_{i_2},\cdots,\lambda_{i_q}\}$ 的充要条件是 $A_i=A_{i+1}$.

再证明：$\lambda_{i_{j+1}}\neq\lambda_{i_j+1}$(即下标不连续) 的充要条件是对应的集合 $A_{i_{j+1}}$ 所在等式段中至少有两个及其以上相同集合(即 $\kappa_{j+1}>1$).

必要性　此时，$i_{j+1}\neq i_j+1$，但应该有 $i_{j+1}=i_j+(\kappa_{j+1}-1)$. 所以 $\kappa_{j+1}=i_{j+1}-i_j+1$. 从 $i_{j+1}-i_j\geqslant 1$ 知 $\kappa_{j+1}\geqslant 2$.

充分性　从 $\kappa_{j+1}\geqslant 2$ 知，连续下标的 $A_{i_j}\supset\cdots\supseteq A_{i_{j+1}-1}=A_{i_{j+1}}\supset\cdots\supseteq A_{i_{j+2}}$ 必定出现在已知的子集套中，对应地会有 $\lambda_{i_j},\lambda_{i_{j+1}},\lambda_{i_{j+2}}$ 出现在(3) 式中. 而按照保留等式段中最后一项的原则，$\lambda_{i_{j+1}-1}$ 不会出现在(3) 式中. 因此 $\lambda_{i_j+1}\leqslant\lambda_{i_{j+1}-1}<\lambda_{i_{j+1}}$. 所以 $\lambda_{i_{j+1}}\neq\lambda_{i_j+1}$(注意此处有 $i_{j+1}\geqslant i_1+1>1$).

在(4) 式中，补充全部没有出现的 λ_i 所对应的项 $[|A_i|-|A_{i+1}|]\cdot\lambda_i$. 由于 $A_i=A_{i+1}$，因此 $[|A_i|-|A_{i+1}|]\cdot\lambda_i=0$.

补充方式为：从 κ_1 开始，检查是否 $\kappa_1=1$? 如果是，则不作补充；如果不是(即 $\kappa_1>1$)，则已有的项为 $[|A_{i_1}|-|A_{i_2}|]\cdot\lambda_{i_1}$. 需在此项前补充连续的 κ_1-1 项，变为

$$[|A_1|-|A_2|]\cdot\lambda_1+\cdots+[|A_{i_1-1}|-|A_{i_1}|]\cdot\lambda_{i_1-1}+[|A_{i_1}|-|A_{i_2}|]\cdot\lambda_{i_1}$$

再检查 κ_2，是否 $\kappa_2=1$? 如果是，则不作补充；如果不是(即 $\kappa_2>1$)，则已有的项为 $[|A_{i_2}|-|A_{i_3}|]\cdot\lambda_{i_2}$. 需在此项前补充连续的 κ_2-1 项，变为

$$[|A_{i_1+1}|-|A_{i_1+2}|]\cdot\lambda_{i_1+1}+\cdots+[|A_{i_2-1}|-|A_{i_2}|]\cdot\lambda_{i_2-1}+[|A_{i_2}|-|A_{i_3}|]\cdot\lambda_{i_2}$$

依次下去，最后检查 κ_q，是否 $\kappa_q=1$? 如果是，则不作补充；如果不是(即 $\kappa_q>1$)，则已有的项为 $|A_{i_q}|\cdot\lambda_{i_q}$. 需在此项前补充连续的 κ_q-1 项，变为

$$[|A_{i_{q-1}+1}|-|A_{i_{q-1}+2}|]\cdot\lambda_{i_{q-1}+1}+\cdots+[|A_{i_q-1}|-|A_{i_q}|]\cdot\lambda_{i_q-1}+|A_{i_q}|\cdot\lambda_{i_q}$$

由于补充的项全为 0，所以

$$
\begin{aligned}
|\mu| = & [|A_1|-|A_2|]\cdot\lambda_1+\cdots+[|A_{i_1-1}|-|A_{i_1}|]\cdot\lambda_{i_1-1}+[|A_{i_1}|-|A_{i_2}|]\cdot\lambda_{i_1}+ \\
& [|A_{i_1+1}|-|A_{i_1+2}|]\cdot\lambda_{i_1+1}+\cdots+[|A_{i_2-1}|-|A_{i_2}|]\cdot\lambda_{i_2-1}+[|A_{i_2}|-|A_{i_3}|]\cdot\lambda_{i_2}+ \\
& [|A_{i_{q-1}+1}|-|A_{i_{q-1}+2}|]\cdot\lambda_{i_{q-1}+1}+\cdots+[|A_{i_q-1}|-|A_{i_q}|]\cdot\lambda_{i_q-1}+|A_{i_q}|\cdot\lambda_{i_q} \qquad (5)
\end{aligned}
$$

当然(5)式具有 p 项.

再将(5)式中的部分项的下标改变，使之下标连续. 根据前面的证明，只要有补充项 $\lambda_i(i\geqslant 2)$，(5)式中就一定有下标不连续的情况发生.

改变方法：除 $A_{i_q}(=A_p)$ 外，检查每个 $A_{i_j}(j=1,2,\cdots,q-1)$(对应地就是 λ_{i_j}). 如果 $\lambda_{i_{j+1}}\neq\lambda_{i_j+1}$，则将对应项 $[|A_{i_j}|-|A_{i_{j+1}}|]\cdot\lambda_{i_j}$ 改为 $[|A_{i_j}|-|A_{i_j+1}|]\cdot\lambda_{i_j}$. 由于 $A_{i_{j+1}}$ 是 A_{i_j+1} 所在的等式段中的最后一项(即下标最大者)，因此，虽 $\lambda_{i_{j+1}}\neq\lambda_{i_j+1}$，但 $A_{i_{j+1}}=A_{i_j+1}$. 这样改变下标后，有

$$
|\mu|=\sum_{i=1}^{p-1}[|A_i|-|A_{i+1}|]\cdot\lambda_i+|A_p|\cdot\lambda_p
$$

下面的定理可以看作是模糊集合的分解定理的一种推广：

定理 4 如果 $\mu\in F(E)$，$R^+(\mu)=\{\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_p\}$ 并形成数列 $0<\lambda_1<\cdots<\lambda_p\leqslant 1$，取另一数列 $0<\delta_1<\delta_2<\cdots<\delta_q\leqslant 1$. 将这两个数列合并统一编号，相同的数只保留一个，得到 $0<\alpha_1<\alpha_2<\cdots<\alpha_s\leqslant 1$(这个数列相对前面两个数列来说更细密，因此，常称为前面两个数列的加细数列). 显然，$s\geqslant\max\{p,q\}$. 则有

$$
\mu=\omega(C_{\alpha_1}(\mu),\alpha_1)\vee\omega(C_{\alpha_2}(\mu),\alpha_2)\vee\cdots\vee\omega(C_{\alpha_s}(\mu),\alpha_s)
$$

根据模糊集合相等的充要条件是各水平割集相等即可证明.

利用模糊集合的性质，可以得到一个模糊集合的包含与普通集合的包含之间的关系：

定理 5 如果 $\mu,\nu\in F(E)$，$R^+(\mu)=\{\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_p\}(0<\lambda_1<\cdots<\lambda_p\leqslant 1)$，$R^+(\nu)=\{\delta_1,\delta_2,\cdots,\delta_q\}(0<\delta_1<\delta_2<\cdots<\delta_q\leqslant 1)$. 则 $\mu\leqslant\nu$ 的充要条件是 $\forall\lambda_i\in\{\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_p\}$，$C_{\lambda_i}(\mu)\subseteq C_{\lambda_i}(v)$.

利用定理 2、定理 3 和定理 4，可以得到如下定理：

定理 6 任取 $\mu,\nu\in F(E)$，如果 $R^+(\mu)=\{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s\}(0<\alpha_1<\alpha_2<\cdots<\alpha_s\leqslant 1)$，而且 $\forall\alpha_i\in\{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s\}$，$|C_{\alpha_i}(\mu)|\leqslant|C_{\alpha_i}(\nu)|$，则 $|\mu|\leqslant|\nu|$.

定理 6 通过普通集合的势的比较来讨论模糊集合的模糊势的比较.

2 模糊秩函数的性质

文献[1,3]有许多关于模糊秩函数的性质. 本段从另外的角度(即导出秩函数的角度)来讨论闭模糊拟阵模糊秩函数的一些性质.

定义 3 设 $\boldsymbol{M}=(E,\mathit{l})$ 是闭模糊拟阵，模糊秩函数为 ρ: $F(E)\longrightarrow[0,+\infty)$，其基本序列为 $0=r_0<r_1<r_2<\cdots<r_n\leqslant 1$，导出拟阵序列 $\boldsymbol{M}_{r_1}=(E,I_{r_1})\supset\boldsymbol{M}_{r_2}=(E,I_{r_2})\supset\cdots\supset\boldsymbol{M}_{r_n}=(E,I_{r_n})$，其对应的秩函数为 $R_{r_1},R_{r_2},\cdots,R_{r_n}$. 我们称 $R_{r_1},R_{r_2},\cdots,R_{r_n}$ 为模糊拟阵 $\boldsymbol{M}$ 的导出秩函数. 一般地，$\forall r\in(0,1]$，令 R_r 表示 r-导出拟阵 $\boldsymbol{M}_r=(E,I_r)$ 的秩函数，也称为 $\boldsymbol{M}$ 的导出秩函数.

首先讨论模糊拟阵的导出秩函数的两个性质，以方便后面的讨论.

定理 7 设 $\boldsymbol{M}=(E,\mathit{l})$ 是定义 3 所设的闭模糊拟阵，任取 $\mu\in F(E)$，设 $R^+(\mu)=\{\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_t\}(0<\lambda_1<\lambda_2<\cdots<\lambda_t\leqslant 1)$，$\forall r\in(0,1]$，则有：

(i) $R_r(C_r(\mu))>0$ 的充要条件是存在 $X\subseteq C_r(\mu)$，$X\neq\varnothing$，使得 $X\in I_r$；

(ii) 若 $\lambda_t<1$，则 $\forall r\in(\lambda_t,1]$，$R_r(C_r(\mu))=0$.

证 $M_r=(E,I_r)$ 和 R_r 的定义如同定义 3 中所示.

(i) $R_r(C_r(\mu))>0$ 当且当 $\max\{|A|: A\subseteq C_r(\mu), A\in I_r\}>0$ 当且当存在 $A\subseteq C_r(\mu)$，$|A|>0$(即 $A\neq\varnothing$)，使得 $A\in I_r$.

(ii) 若 $\lambda_t<1$，则 $\forall r\in(\lambda_t,1]$，$C_r(\mu)=\varnothing$. 所以 $R_r(C_r(\mu))=0$.

文献[12]讨论了独立模糊壳，所有模糊独立集都被限制在这个独立模糊壳内. 因此，自然地想到，可以将任何模糊集的模糊秩的计算限制在某些特殊模糊集合内.

定义 4　$\forall \mu \in F(E)$，取 $r \in [0, 1]$，定义 μ 的 r -下截短模糊集(简称为下截短)为

$$\mu_r(x) = \begin{cases} \mu(x) & \mu(x) \leqslant r \\ r & \mu(x) > r \end{cases}$$

特别地，注意到：总有 $\mu_0 = 0$ 或 $\mu_0 = \varnothing$(即模糊空集).

定理 8　设 $\boldsymbol{M}$ 是如定义 3 所设的闭模糊拟阵，ρ 为其模糊秩函数. 取 $\mu \in F(E)$，则 $\rho(\mu) = \rho(\mu_{r_n})$. 即 μ 的模糊秩等于 μ 的 r_n -下截短的模糊秩.

用文献[3] 的定理 1.10 和模糊集的性质，可得定理 8 的证明.

定理 9(模糊拟阵模糊秩的简化计算定理)　设 $\boldsymbol{M}$ 是如定义 3 所设的闭模糊拟阵，ρ 为其模糊秩函数. 取 $\mu \in F(E)$，$R^+(\mu) = \{\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_t\}(0 < \lambda_1 < \cdots < \lambda_t \leqslant r_n)$，$\rho(\mu) > 0$，则存在 $\varepsilon_\mu \in R^+(\mu) \cup \{r_1, r_2, \cdots, r_n\}$，使得：

(i) $\forall r \in (0, \varepsilon_\mu]$，$R_r(C_r(\mu)) > 0$；而 $\forall r \in (\varepsilon_\mu, 1]$，$R_r(C_r(\mu)) = 0$；

(ii) $\rho(\mu) = \rho(\mu_{\varepsilon_\mu})$.

如果 $\rho(\mu) = 0$，则定义 $\varepsilon_\mu = 0$. 此时，$\varepsilon_\mu \in R^+(\mu) \cup \{r_0, r_1, \cdots, r_n\}$.

我们称数 ε_μ 为模糊集 μ 在模糊拟阵 $\boldsymbol{M}$ 下的非空导出独立集界.

利用定理 7 和文献[3] 的定理 1.10 可以证明定理 9.

同时，定理 9 的证明过程给出了 ε_μ 的计算方法：

$$\varepsilon_\mu = \max\{r: \forall r \in R^+(\mu) \cup \{r_1, r_2, \cdots, r_n\}, R_r(C_r(\mu)) > 0\}$$

由于 $|R^+(\mu) \cup \{r_1, r_2, \cdots, r_n\}|$ 有限，因此，ε_μ 必定存在.

接下来讨论一个更深入的结论，这个结论比较精准地解决了在计算模糊秩中的模糊隶属度限制问题.

定理 10(最大模糊独立子集的隶属度定理)　设 $\boldsymbol{M} = (E, \ell)$ 是闭模糊拟阵，其基本序列为 $0 = r_0 < r_1 < r_2 < \cdots < r_n \leqslant 1$，导出拟阵序列 $\boldsymbol{M}_{r_1} = (E, I_{r_1}) \supset \cdots \supset \boldsymbol{M}_{r_n} = (E, I_{r_n})$，$\rho$ 为其模糊秩函数. 任取 $\mu \in F(E)$，$R^+(\mu) = \{\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_t\}(0 < \lambda_1 < \cdots < \lambda_t \leqslant 1)$. 则有 $\nu \in \ell$，使得：

(i) $\rho(\mu) = |\nu|$；

(ii) $R^+(\nu) \subseteq R^+(\mu) \cup \{r_0, r_1, \cdots, r_n\}$.

证　因为 $\boldsymbol{M}$ 是闭模糊拟阵，由文献[3] 的定理 1.10(ii)，存在 $\nu \in \ell$，使得 $\rho(\mu) = |\nu|$ 且 $\nu \leqslant \mu$. 不妨设 $R^+(\nu) = \{\delta_1, \delta_2, \cdots, \delta_p\}(0 < \delta_1 < \delta_2 < \cdots < \delta_p \leqslant 1)$. 则

$$\nu = \omega(C_{\delta_1}(\nu), \delta_1) \vee \omega(C_{\delta_2}(\nu), \delta_2) \vee \cdots \vee \omega(C_{\delta_p}(\nu), \delta_p) \tag{6}$$

根据文献[11] 的定理 2.1，$C_{\delta_1}(\nu) \supset C_{\delta_2}(\nu) \supset \cdots \supset C_{\delta_p}(\nu) \supset \varnothing$ 是独立集子集套，$C_{\delta_i}(\nu) \in I_{\delta_i}(i = 1, 2, \cdots, p)$. 利用定理 9、命题 1、定理 5 和(6) 式即可证明

$$R^+(\nu) = \{\delta_1, \delta_2, \cdots, \delta_p\} \subseteq R^+(\mu) \cup \{r_0, r_1, \cdots, r_n\} \tag{7}$$

定理 10 的作用在于，任何模糊集合的最大(指势) 模糊独立集的隶属度可以被限制在 $R^+(\mu) \cup \{r_0, r_1, \cdots, r_n\}$ 内.

3　模糊集合模糊秩的计算

下面进一步讨论怎么使用导出秩函数来表示模糊秩函数. 然后，利用这种表示来找出计算模糊集合模糊秩的算法.

定义 5　设 $\boldsymbol{M} = (E, I)$ 是拟阵. $\forall r \in (0, 1]$，以 $0 = r_0 < r_1 = r \leqslant 1$ 为基本序列，$\boldsymbol{M}$ 为导出拟阵列，由文献[10] 的定理 2.8 得到一个闭模糊拟阵 $\boldsymbol{M}^r = (E, \ell^r)$.

当 $r < 1$ 时，$\ell^r = \{\mu \in F(E): \forall \lambda \in (0, r], C_\lambda(\mu) \in I; \forall \lambda \in (r, 1], C_\lambda(\mu) = \varnothing\}$；

当 $r = 1$ 时，$\ell^r = \{\mu \in F(E): \forall \lambda \in (0, 1], C_\lambda(\mu) \in I\}$.

则称闭模糊拟阵 $\boldsymbol{M}^r$ 为由拟阵 $\boldsymbol{M}$ 产生的 r -初等模糊拟阵. 此时，$\boldsymbol{M}^r$ 的基本序列为 $0 = r_0 < r \leqslant 1$，导出拟阵列为 $\boldsymbol{M} = (E, I)$.

定理 11　设 $\boldsymbol{M} = (E, I)$ 是拟阵，R 为其秩函数. 取 $r \in (0, 1]$，设 $\boldsymbol{M}^r$ 为由拟阵 $\boldsymbol{M}$ 产生的 r -初等模糊拟阵，其模糊秩函数为 ρ^r. 则有：

(i) $\ell^r = \{\mu \in F(E)$：存在 $A \in I$，使得 $\mu \leqslant \omega(A, r)\}$；

(ii) 若 $\boldsymbol{M}$ 的基集[2] 为 $\{B_1, B_2, \cdots, B_s\}$，则 $\ell^r = \{\mu \in F(E)$：存在 $B_i \in \{B_1, B_2, \cdots, B_s\}$，使得 $\mu \leqslant \omega(B_i, r)\}$；

(iii) $\forall A \in P(E)$，$R(A) = \dfrac{\rho^r(\omega(A, r))}{r}$；

(iv) $\forall \mu \in F(E)$，若 $R^+(\mu) = \{\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_t\}(0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \cdots < \lambda_t \leqslant r$ 且 $R(C_{\lambda_t}(\mu)) > 0)$，则有

$$\rho^r(\mu) = \sum_{i=1}^{t-1}[R(C_{\lambda_i}(\mu)) - R(C_{\lambda_{i+1}}(\mu))] \cdot \lambda_i + R(C_{\lambda_t}(\mu)) \cdot \lambda_t \tag{8}$$

证　根据定理 1 知，$\forall \mu \in \ell^r$，都必有 $M(\mu) \leqslant r$.

(i) 令 $\ell' = \{\mu \in F(E)$：存在 $A \in I$，使得 $\mu \leqslant \omega(A, r)\}$. 由 $\boldsymbol{M}(\mu) \leqslant r$ 和定义 2(a) 即可证明 $\ell' = \ell^r$.

(ii) 令 $\ell' = \{\mu \in F(E)$：存在 $B_i \in \{B_1, B_2, \cdots, B_s\}$，使得 $\mu \leqslant \omega(B_i, r)\}$. 根据(1)式和增广定理[2]，也可证明 $\ell^r = \ell'$.

(iii) 由文献[3]的定理 1.10 和(1)式可证 $R(A) = |X| = \dfrac{r \cdot |X|}{r} = \dfrac{\rho^r(\omega(A, r))}{r}$.

(iv) 由增广定理，对 $\forall A \subseteq E$，在拟阵 $\boldsymbol{M}$ 中的最大独立子集可能不唯一，但其所含元素个数唯一，都为 $R(A)$. 由定理 1，$\forall \beta \in (0, 1]$，用 $\boldsymbol{M}_\beta^r = (E, I_\beta^r)$ 表示 $\boldsymbol{M}^r$ 的 β-导出拟阵. 这些导出拟阵全部为 $\boldsymbol{M}$. 它们的秩函数都是 R.

1) 计算 $\rho^r(\mu)$.

由 $\boldsymbol{M}^r$ 是闭模糊拟阵以及文献[3]的定理 1.10、文献[11]的定理 2.1 和定理 2，可得出

$$|\nu| = \sum_{i=1}^{p-1}[|C_{\delta_i}(\nu)| - |C_{\delta_{i+1}}(\nu)|] \cdot \delta_i + |C_{\delta_p}(\nu)| \cdot \delta_p$$

2) 构造 μ 的一个模糊独立子集 ν'. 由 $R^+(\mu) = \{\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_t\}(0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \cdots < \lambda_t \leqslant r)$，有

$$\mu = \omega(C_{\lambda_1}(\mu), \lambda_1) \vee \omega(C_{\lambda_2}(\mu), \lambda_2) \vee \cdots \vee \omega(C_{\lambda_t}(\mu), \lambda_t)$$

$$C_{\lambda_1}(\mu) \supset C_{\lambda_2}(\mu) \supset \cdots \supset C_{\lambda_t}(\mu) \supset \varnothing$$

由 $R(C_{\lambda_t}(\mu)) > 0$ 知，$C_{\lambda_t}(\mu)$ 包含 $\boldsymbol{M}$ 的非空独立集. 找出 $C_{\lambda_t}(\mu)$ 在 $\boldsymbol{M}$ 中的一个最大独立子集 A_t. 再将 A_t 增广为 $C_{\lambda_{t-1}}(\mu)$ 在 $\boldsymbol{M}$ 中的一个最大独立子集 A_{t-1}. 由 $C_{\lambda_{t-1}}(\mu) \supset C_{\lambda_t}(\mu)$ 和增广定理[2] 知，$|A_{t-1}| = R(C_{\lambda_{t-1}}(\mu))$；…；将 A_2 增广为 $C_{\lambda_1}(\mu)$ 在 $\boldsymbol{M}$ 中的最大独立子集 A_1，会有 $|A_1| = R(C_{\lambda_1}(\mu))$. 得到子集套[11] $A_1 \supseteq A_2 \supseteq \cdots \supseteq A_t$.

注意到 $0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \cdots < \lambda_t \leqslant r$. 构造模糊集合

$$\nu' = \omega(A_1, \lambda_1) \vee \omega(A_2, \lambda_2) \vee \cdots \vee \omega(A_t, \lambda_t)$$

由 $A_i \subseteq C_{\lambda_i}(\mu)$ 和定理 5 知 $\nu' \leqslant \mu$. $\forall \alpha \in (0, 1]$，当 $\alpha > \lambda_t$ 时，$C_\alpha(\nu') = \varnothing \in I$. 当 $\alpha \in (0, \lambda_t]$ 时，存在 λ_i，使得 $\alpha \in (\lambda_{i-1}, \lambda_i](\lambda_0 = 0)$. $C_\alpha(\nu') = A_i \in I$. 所以由(4)式知 $\nu' \in \ell^r$.

显然，由 $\rho^r(\nu') = |\nu'| \leqslant \rho^r(\mu) = \rho^r(\nu) = |\nu|$ 知，$|\nu'| \leqslant |\nu|$.

3) 利用定理 6，可以证明 $|\nu'| = |\nu|$.

4) 利用定理 3，根据前面的 1) 和 3)，有

$$\begin{aligned}\rho^r(\mu) = |\nu| = |\nu'| = &\\ &\sum_{i=1}^{t-1}[|A_i| - A_{i+1}|] \cdot \lambda_i + |A_t| \cdot \lambda_t = \\ &\sum_{i=1}^{t-1}[R(C_{\lambda_i}(\mu)) - R(C_{\lambda_{i+1}}(\mu))] \cdot \lambda_i + R(C_{\lambda_t}(\mu)) \cdot \lambda_t\end{aligned}$$

故(8)式成立.

下面，我们将定理 11(iv) 推广到一般闭模糊拟阵.

定理 12(模糊拟阵模糊秩函数的导出拟阵秩函数的表示定理)　设 $\boldsymbol{M} = (E, \ell)$ 是闭模糊拟阵，ρ 为其模糊秩函数，其基本序列为 $0 = r_0 < r_1 < r_2 < \cdots < r_n \leqslant 1$，导出拟阵序列 $\boldsymbol{M}_{r_1} = (E, I_{r_1}) \supset \cdots \supset \boldsymbol{M}_{r_n} = (E, I_{r_n})$，$R_r(r \in (0, 1])$ 为导出拟阵 $\boldsymbol{M}_r$ 的秩函数. $\forall \mu \in F(E)$，设 $R^+(\mu) = \{\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_t\}(0 < \lambda_1 <$

$\lambda_2 < \cdots < \lambda_t \leqslant 1$)，$R_{\lambda_t}(C_{\lambda_t}(\mu)) > 0$，则存在 $r_i > 0$，使得 $\lambda_t \in (r_{i-1}, r_i]$. 将 $r_0 < r_1 < \cdots < r_{i-1}$ 和 $\lambda_1 < \cdots < \lambda_t$ 合并得加细数列 $0 = \delta_0 < \delta_1 < \delta_2 < \cdots < \delta_p = \lambda_t$. 那么

$$\rho(\mu) = \sum_{i=1}^{p-1} [R_{\delta_i}(C_{\delta_i}(\mu)) - R_{\delta_{i+1}}(C_{\delta_{i+1}}(\mu))] \cdot \delta_i + R_{\delta_p}(C_{\delta_p}(\mu)) \cdot \delta_p \tag{9}$$

证　首先证明：当 $R_{\lambda_t}(C_{\lambda_t}(\mu)) > 0$ 时，必存在 $r_i \in \{r_1, r_2, \cdots, r_n\}$，使得 $\lambda_t \in (r_{i-1}, r_i]$. 这是因为 $R_{\lambda_t}(C_{\lambda_t}(\mu)) > 0$，由定理 7(i)，有 $X \subseteq C_{\lambda_t}(\mu))$，$X \neq \varnothing$，使得 $X \in I_{\lambda_t}$. 因此，$I_{\lambda_t} \neq \{\varnothing\}$. 所以$\lambda_t \leqslant r_n$. 则存在 $r_i \in \{r_1, r_2, \cdots, r_n\}$，使得 $\lambda_t \in (r_{i-1}, r_i]$.

根据定理 4，有

$$\mu = \omega(C_{\delta_1}(\mu), \delta_1) \vee \omega(C_{\delta_2}(\mu), \delta_2) \vee \cdots \vee \omega(C_{\delta_p}(\mu), \delta_p) \tag{10}$$

步骤 1　计算 $\rho(\mu)$.

根据 $\boldsymbol{M}$ 是闭模糊拟阵和文献[3] 的定理 1.10(ii)，存在 $\nu \in \ell$，使得 $\rho(\mu) = |\nu|$ 且 $\nu \leqslant \mu$. 不妨设 $R^+(\nu) = \{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s\}(0 < \alpha_1 < \alpha_2 < \cdots < \alpha_s \leqslant \lambda_t)$. 则

$$\nu = \omega(C_{\alpha_1}(\nu), \alpha_1) \vee \omega(C_{\alpha_2}(\nu), \alpha_2) \vee \cdots \vee \omega(C_{\alpha_s}(\nu), \alpha_s)$$

根据文献[11] 的定理 2.1，$C_{\delta_1}(\nu) \supset C_{\delta_2}(\nu) \supset \cdots \supset C_{\delta_p}(\nu) \supset \varnothing$ 是独立集子集套，$C_{\delta_i}(\nu) \in I_{\delta_i}(i = 1,2,\cdots,p)$.

步骤 2　构造 μ 的独立模糊子集 ν'.

由 $R_{\lambda_t}(C_{\lambda_t}(\mu)) > 0$，可找到 $C_{\delta_p}(\mu)$ 在 $\boldsymbol{M}_{\delta_p}$ 中的非空最大独立子集 A_p，满足

$$|A_p| = R_{\delta_p}(C_{\delta_p}(\mu)) = R_{\lambda_t}(C_{\lambda_t}(\mu))$$

由 $C_{\delta_p}(\mu) \subseteq C_{\delta_{p-1}}(\mu)$ 知，可将 A_p 增广为 $C_{\delta_{p-1}}(\mu)$ 在 $\boldsymbol{M}_{\delta_{p-1}}$ 中的最大独立子集 A_{p-1}，满足

$$A_p \subseteq A_{p-1} \qquad |A_{p-1}| = R_{\delta_{p-1}}(C_{\delta_{p-1}}(\mu))$$

…

由 $C_{\delta_2}(\mu) \subseteq C_{\delta_1}(\mu)$ 知，可将 A_2 增广为 $C_{\delta_1}(\mu)$ 在 $\boldsymbol{M}_{\delta_1}$ 中的最大独立子集 A_1，满足

$$A_2 \subseteq A_1 \qquad |A_1| = R_{\delta_1}(C_{\delta_1}(\mu))$$

构造模糊集合

$$\nu' = \omega(A_1, \delta_1) \vee \omega(A_2, \delta_2) \vee \cdots \vee \omega(A_p, \delta_p)$$

由 $C_{\delta_i}(\nu') = A_i \subseteq C_{\delta_i}(\mu)$ 知，$\nu' \leqslant \mu$. 任取 δ_i，都有 $C_{\delta_i}(\nu') = A_i \in I_{\delta_i}$，因此由命题 1 知 $\nu' \in \ell$.

步骤 3　计算 $\rho(\nu')$.

显然 $\rho(\nu') = |\nu'|$. 根据定理 3，有

$$|\nu'| = \sum_{i=1}^{p-1} [|A_i| - |A_{i+1}|] \cdot \delta_i + |A_p| \cdot \delta_p =$$

$$\sum_{i=1}^{p-1} [R_{\delta_i}(C_{\delta_i}(\mu)) - R_{\delta_{i+1}}(C_{\delta_{i+1}}(\mu))] \cdot \delta_i + R_{\delta_p}(C_{\delta_p}(\mu)) \cdot \delta_p \tag{11}$$

由从 $\nu' \leqslant \mu$ 知，$|\nu'| = \rho(\nu') \leqslant \rho(\mu) = |\nu|$.

步骤 4　证明 $|\nu'| = |\nu|$.

由定理 10，$R^+(\nu) \subseteq R^+(\mu) \cup \{r_0, r_1, \cdots, r_n\}$. 由 $\nu \leqslant \mu$ 和(10) 式，得出 $R^+(\nu) \subseteq \{\delta_1, \delta_2, \cdots, \delta_p\}$.

任取 α_i，都有某 δ_j，使得 $\alpha_i = \delta_j$. 由 $\nu \in \ell$ 知，$C_{\alpha_i}(\nu) = C_{\delta_j}(\nu) \in I_{\alpha_i} = I_{\delta_j}$. 由 $\nu \leqslant \mu$ 知，$C_{\alpha_i}(\nu) \subseteq C_{\alpha_i}(\mu) = C_{\delta_j}(\mu)$. 说明 $C_{\alpha_i}(\nu)$ 是 $C_{\delta_j}(\mu)$ 在 $\boldsymbol{M}_{\delta_j}$ 中的独立子集. 而 $A_j = C_{\delta_j}(\nu')$ 是 $C_{\delta_j}(\mu)$ 在 $\boldsymbol{M}_{\delta_j}$ 中的最大独立子集，即 $|C_{\alpha_i}(\nu)| \leqslant |A_j| = |C_{\delta_j}(\nu')| = |C_{\alpha_i}(\nu')|$. 再利用定理 6 知 $|\nu| \leqslant |\nu'|$. 故 $|\nu'| = |\nu|$. 由(11) 式即知(9) 式成立.

算法 1　计算模糊集合模糊秩的算法.

目的：通过导出拟阵秩函数计算模糊集合的模糊秩.

条件：设 $\boldsymbol{M} = (E, \ell)$ 是闭模糊拟阵，ρ 为其模糊秩函数，其基本序列为 $0 = r_0 < r_1 < r_2 < \cdots < r_n \leqslant 1$，导出拟阵序列 $\boldsymbol{M}_{r_1} = (E, I_{r_1}) \supset \cdots \supset \boldsymbol{M}_{r_n} = (E, I_{r_n})$，$R_i(i = 1,2,\cdots,n)$ 为导出拟阵 $\boldsymbol{M}_{r_i}$ 的秩函数. 取 $\mu \in F(E)$，设 $R^+(\mu) = \{\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_t\}(0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \cdots < \lambda_t \leqslant 1)$.

第一步：对数列进行规范处理.

将数列$\{r_1, r_2, \cdots, r_n\}$和$\{\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_t\}$合并，得到加细数列，然后去掉大于$\min\{r_n, \lambda_t\}$的部分，最终得数列$0 < \delta_1 < \delta_2 < \cdots < \delta_p \leqslant \min\{r_n, \lambda_t\}$，令$X = \{\delta_1, \delta_2, \cdots, \delta_p\}$. 将此数列放入区间：$(r_0, r_1]$，$(r_1, r_2]$，$\cdots$，$(r_{n-1}, r_n]$. 得出：$\{\delta_1, \delta_2, \cdots, \delta_{k_1}\} = X_1$进入区间$(r_{i_1-1}, r_{i_1}]$；$\{\delta_{k_1+1}, \delta_{k_1+2}, \cdots, \delta_{k_1+k_2}\} = X_2$进入区间$(r_{i_2-1}, r_{i_2}]$；$\cdots$；$\{\delta_{k_1+k_2+\cdots+k_{h-1}+1}, \delta_{k_1+k_2+\cdots+k_{h-1}+2}, \cdots, \delta_{k_1+k_2+\cdots+k_h}\} = X_h$进入区间$(r_{i_h-1}, r_{i_h}]$. 易知$k_1 + k_2 + \cdots + k_h = p$.

第二步：计算μ的非空导出独立集界ε_μ.

1）从下标最大者开始，取$\delta_j \in X_h$，计算$R_{i_h}(C_{\delta_j}(\mu))$. 如果$X_h$中的全部元都满足$R_{i_h}(C_{\delta_j}(\mu)) = 0$，则令$k = h$，转入2). 如果有$R_{i_h}(C_{\delta_j}(\mu)) > 0$，则取这些$\delta_j$中下标最大者为$\varepsilon_\mu$，转入第三步.

2）令$k = k - 1$，如果$k = 0$，则$\varepsilon_\mu = 0$，转入第三步. 如果$k > 0$，则从下标最大者开始，取$\delta_j \in X_k$，计算$R_{i_h}(C_{\delta_j}(\mu))$. 如果$X_k$中的全部元都满足$R_{i_h}(C_{\delta_j}(\mu)) = 0$，则从头继续2). 如果有$R_{i_h}(C_{\delta_j}(\mu)) > 0$，则取这些$\delta_j$中下标最大者为$\varepsilon_\mu$，转入第三步.

第三步：计算$\rho(\mu)$.

如果$\varepsilon_\mu = 0$，则$\rho(\mu) = 0$. 算法终止.

如果$\varepsilon_\mu > 0$，则有$\varepsilon_\mu = \delta_q \in X$(由定理9，$\forall r \in (0, \varepsilon_\mu]$，$R_r(C_r(\mu)) > 0$；而$\forall r \in (\varepsilon_\mu, 1]$，$R_r(C_r(\mu)) = 0$).

假设$\delta_l \in X_{j_l}(l = 1, 2, \cdots, q;\ j_l = 1, 2, \cdots, n)$，则有

$$\rho(\mu) = \sum_{l=1}^{q-1} [R_{j_l}(C_{\delta_l}(\mu)) - R_{j_{l+1}}(C_{\delta_{l+1}}(\mu))] \cdot \delta_l + R_{j_q}(C_{\delta_q}(\mu)) \cdot \delta_q \tag{12}$$

算法终止.

利用定理9和定理12即可证明算法1的有效性.

可以预见定理12可以用来研究闭模糊拟阵更深入的性质.

参考文献：

[1] GOETSCHEL R, VOXMAN W. Fuzzy Matroids [J]. Fuzzy Sets and Systems, 1988, 27(3): 291-302.

[2] 刘桂真, 陈庆华. 拟阵 [M]. 长沙: 国防科技大学出版社, 1994.

[3] GOETSCHEL R, VOXMAN W. Fuzzy Rank Functions [J]. Fuzzy Sets And Systems, 1991, 42(2): 245-258.

[4] WU D Y, LI Y H. The Induced Basis Axioms for a Closed G-V Fuzzy Matroid [J]. Journal of Intelligent & Fuzzy Systems, 2021, 40(1): 1037-1049.

[5] 吴德垠, 杨高进. 闭G-V模糊拟阵的模糊圈公理 [J]. 吉林大学学报(理学版), 2020, 58(2): 239-250.

[6] 吴德垠. 闭模糊拟阵模糊圈的极值问题 [J]. 模糊系统与数学, 2020, 34(2): 1-14.

[7] 吴德垠. G-V模糊拟阵模糊圈的极值问题 [J]. 东北师大学报(自然科学版), 2020, 52(2): 9-18.

[8] 吴德垠, 杨高进. 闭模糊拟阵圈函数和圈区间的推广 [J]. 西南大学学报(自然科学版), 2020, 42(2): 36-40.

[9] 吴德垠. 闭G-V模糊拟阵的导出圈公理 [J]. 西南师范大学学报(自然科学版), 2021, 46(8): 10-17.

[10] 吴德垠. 模糊横贯拟阵的再研究 [J]. 模糊系统与数学, 2019, 33(3): 1-18.

[11] 吴德垠. 关于模糊拟阵的独立子集套和独立集函数 [J]. 模糊系统与数学, 2020, 34(1): 1-8.

[12] 吴德垠. 模糊拟阵的独立模糊壳 [J]. 西南大学学报(自然科学版), 2018, 40(8): 89-94.

责任编辑 廖 坤