DOI:10.13718/j.cnki.xsxb.2021.12.003

一般超线性项的 Klein-Gordon-Maxwell 系统解的多重性①

段　誉，　孙　歆，　安育成

贵州工程应用技术学院 理学院，贵州 毕节 551700

摘要：研究了一类具有凹凸非线性项的 Klein-Gordon-Maxwell 系统解的多重性．当凸项在无穷远处满足更弱的超线性增长条件且在位势函数是变号的情形下，利用变分方法获得了系统解的多重性结果．推广和完善了相关问题的已有结果．

关　键　词：Klein-Gordon-Maxwell 系统；变分法；对偶喷泉定理；对称山路定理；多重性

中图分类号：O176.3　　**文献标志码**：A　　**文章编号**：1000－5471(2021)12－0013－07

Multiplicity of Solutions for Klein-Gordon-Maxwell Systems with General Superlinear Nonlinearity

DUAN Yu，　SUN Xin，　AN Yucheng

College of Science, Guizhou University of Engineering Science, Bijie Guizhou 551700, China

Abstract: In this paper, the multiplicity of solutions for a class of Klein-Gordon-Maxwell system has been established with concave-convex nonlinearities. When the convex terms satisfies weaker superlinear growth at infinity and the potential is sign-changing, the multiplicity result of nontrivial solutions for the system are obtained via variational methods. Our results generalize and improve the recent result in the literature.

Key words: Klein-Gordon-Maxwell system; variational methods; dual fountain theorem; symmetric mountain pass theorem; multiplicity

研究如下 Klein-Gordon-Maxwell 系统：

$$\begin{cases} -\Delta u+V(x)u-(2\omega+\phi)\phi u=f(x,u) & x\in\mathbb{R}^3 \\ \Delta\phi=(\omega+\phi)u^2 & x\in\mathbb{R}^3 \end{cases} \tag{1}$$

其中 $\omega>0$ 是一个常数，$f\in C(\mathbb{R}^3\times\mathbb{R},\mathbb{R})$ 和 $V\in C(\mathbb{R}^3,\mathbb{R})$ 是变号的．系统(1)起源于数学物理领域中的某些应用问题．为了描述三维空间中非线性 Klein-Gordon 场与静电场之间相互作用所产生的孤立波问题，文献[1]首次提出了 Klein-Gordon-Maxwell 系统模型

---

① 收稿日期：2020－12－27

基金项目：国家自然科学基金项目(11661021)；贵州省普通高等学校科技拔尖人才项目(黔教合 KY 字[2019]065)；贵州省教育厅青年科技人才成长项目(KY[2020]144)；毕节市自然科学基金项目(毕科联合字 G[2019]11 号)．

作者简介：段　誉，博士，副教授，主要从事非线性泛函分析的研究．

$$\begin{cases} -\Delta u+[m_0^2-(\omega+e\phi)^2]u=|u|^{q-2}u & x\in\mathbb{R}^3 \\ \Delta\phi=(e\omega+e^2\phi)u^2 & x\in\mathbb{R}^3 \end{cases} \tag{2}$$

其中 $0<\omega<m_0$，$4<q<6$，m_0 和 e 分别表示粒子的质量和电量，而 ω 表示相位. 系统的未知因素是联系粒子的场 u 和电磁位势 ϕ. 有关系统(2)物理方面的详述可参见文献[1-2]. 作为系统(2)的一般情形，系统(1)近年来受到了众多学者的关注. 当非线性项 f 满足(AR)条件时，文献[3]首次研究了系统(1)无穷多解的存在性. 文献[4-7]在非线性项 f 满足超三次增长性条件但不满足(AR)条件时，获得了与文献[3]相同的结果. 文献[8-11]通过弱化非线性项 f 所满足的条件，改进了上述所提文献的结论. 在位势是消失位势的情形下，文献[12-14]讨论了系统(1)解的存在性和多重性问题. 当位势 $V=1$ 时，文献[15-16]讨论了系统(1)解的存在性和多重性问题. 在位势是井位势的情形下，文献[17-19]分别讨论了系统(1)基态解的存在性和解的多重性问题. 尤其需要指出的是：文献[20]在位势函数 V 和非线性项 f 允许变号的情形下研究了系统(1)解的多解性，得到了如下结果：

定理 A[20] 设 V，$f=\bar{f}$ 满足如下假设条件：

(V) $V\in C(\mathbb{R}^3,\mathbb{R})$，$\inf\limits_{x\in\mathbb{R}^3}V(x)>-\infty$，且存在 $r>0$，使得对 $\forall M>0$，有

$$\lim_{|y|\to+\infty}\operatorname{meas}\{x\in\mathbb{R}^3:|x-y|<r,V(x)\leqslant M\}=0$$

(F_1) 存在常数 $c_1>0$，$2<p<2^*=6$，使得 $|\bar{f}(x,t)|\leqslant c_1(|t|+|t|^{p-1})$，$\forall(x,t)\in\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}$；

(F_2) $\lim\limits_{|t|\to\infty}\dfrac{\bar{F}(x,t)}{|t|^2}=+\infty$ 关于 $x\in\mathbb{R}^3$ 一致成立，且存在 $R>0$，使得当 $|t|\geqslant R$ 时，对 $\forall x\in\mathbb{R}^3$，$\bar{F}(x,t)\geqslant 0$，其中 $\bar{F}(x,t)=\int_0^t\bar{f}(x,s)\mathrm{d}s$；

(F_3) $\bar{f}(x,-t)=-\bar{f}(x,t)$，$\forall(x,t)\in\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}$；

(F_4') 存在 $\theta>0$，$\mu>2$，使得 $\bar{f}(x,t)t-\mu\bar{F}(x,t)\geqslant-\theta|t|^2$，$\forall(x,t)\in\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}$.

则系统(1)存在一列高能量解.

本文考虑的问题是：在条件(F_4')中，若 $\mu=2$，系统(1)是否仍存在一列高能量解？受文献[9,20]的启发，本文主要考虑了当 $\mu=2$ 且具有凹项扰动项时系统(1)解的多重性，所得结论推广和完善了已有文献的相关结果. 相关概念和符号可参见文献[21-23]. 本文主要结果如下：

定理 1 假设 V 满足条件(V)，$F(x,t)=\bar{F}(x,t)+\lambda\alpha(x)|t|^s$，$\bar{f}$ 满足条件(F_1)—(F_3)及如下条件：

(F_4) 存在常数 $r_0>0$，$c_2\geqslant 0$，使得当 $|t|\geqslant r_0$ 时，对 $\forall x\in\mathbb{R}^3$，

$$\bar{f}(x,t)t-2\bar{F}(x,t)\geqslant c_2|t|^p$$

(F_5) $\alpha(x)\in L^{\frac{2}{2-s}}(\mathbb{R}^3)$，$1<s<2$，$\alpha(x)\geqslant 0$，$\forall x\in\mathbb{R}^3$.

则对 $\forall\lambda\in\mathbb{R}$，系统(1)有一列高能量解.

定理 2 假设 V 满足条件(V)，$F(x,t)=\bar{F}(x,t)+\lambda\alpha(x)|t|^s$，$\bar{f}$ 满足条件(F_1)—(F_5)，则对 $\forall\lambda\in\mathbb{R}_+$，系统(1)有一列负能量解.

注 1 确实存在函数满足条件(F_1)—(F_4)但不满足定理 A 中的(AR)条件((F_4')(见文献[9]的注 1.4).

注 2 定理 1 从两个方面改进了定理 A：定理 1 通过弱化定理 A 的条件(见注 1)获得了与定理 A 相同的结果；在非线性项是凹凸非线性项的组合项条件下给出了系统(1)有一列负能量解的多重性结果.

注 3 与文献[9]的结论相比，本文去掉了非线性项 f 在原点处是超线性的这一限制条件，在位势函数 V 和凸非线性项 f 允许变号，且扰动项是更一般的凹项的情形下，研究了系统(1)解的多重性.

因此，定理 1 改进并完善了上述已有文献的相关结果.

设 $D^{1,2}(\mathbb{R}^3)=\{u\in L^6(\mathbb{R}^3):|\nabla u|\in L^2(\mathbb{R}^3)\}$ 表示 Sobolev 空间，其范数定义为

$$\|u\|_{D^{1,2}}^2=\int_{\mathbb{R}^3}|\nabla u|^2\mathrm{d}x$$

$H^1(\mathbb{R}^3)=\{u\in L^2(\mathbb{R}^3):|\nabla u|\in L^2(\mathbb{R}^3)\}$ 表示通常的 Sobolev 空间，其内积和范数分别定义为

$$\langle u,v\rangle_{H^1}=\int_{\mathbb{R}^3}(\nabla u\cdot\nabla v+uv)\mathrm{d}x \qquad \|u\|_{H^1}=\langle u,u\rangle_{H^1}^{\frac{1}{2}}$$

由条件(V)，$(F_1)-(F_2)$ 知，存在 $a>0$，使得对 $\forall(x,t)\in\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}$，$\widetilde{V}(x)=V(x)+a\geqslant 1$，$2\overline{F}(x,t)+at^2\geqslant 0$. 令

$$H=\left\{u\in H^1(\mathbb{R}^3):\int_{\mathbb{R}^3}(|\nabla u|^2+\widetilde{V}(x)u^2)\mathrm{d}x<+\infty\right\}$$

则 H 是 Hilbert 空间，其内积和范数分别定义为

$$\langle u,v\rangle=\int_{\mathbb{R}^3}(\nabla u\cdot\nabla v+\widetilde{V}(x)uv)\mathrm{d}x\qquad \|u\|=\langle u,u\rangle^{\frac{1}{2}}$$

显然，对 $2\leqslant p\leqslant 6$，嵌入映射 $H\hookrightarrow L^p(\mathbb{R}^3)$ 是连续的，故存在 $S_p>0$，使得

$$\|u\|_p\leqslant S_p\|u\|\qquad\forall u\in H \tag{3}$$

系统(1)具有变分结构，对 $\forall(u,\phi)\in H\times D^{1,2}(\mathbb{R}^3)$，定义其能量泛函为

$$J(u,\phi)=\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^3}(|\nabla u|^2+V(x)u^2-|\nabla\phi|^2-(2\omega+\phi)\phi u^2)\mathrm{d}x-\int_{\mathbb{R}^3}F(x,u)\mathrm{d}x$$

由条件(V)，(F_1) 知，系统(1)的弱解 $(u,\phi)\in H\times D^{1,2}(\mathbb{R}^3)$ 对应着泛函 J 的临界点. 由于 J 是强不定的，需要对泛函进行一些简化，将泛函 J 转化成只含有一个变量 u 的式子. 为此，给出如下引理：

引理 1[3]　对 $\forall u\in H^1(\mathbb{R}^3)$，存在唯一的 $\phi=\phi_u\in D^{1,2}(\mathbb{R}^3)$，满足方程

$$\Delta\phi+u^2\phi=-\omega u^2 \tag{4}$$

更进一步，映射 $\Phi: u\in H^1(\mathbb{R}^3)\longmapsto\Phi[u]=\phi_u\in D^{1,2}(\mathbb{R}^3)$ 是连续可微的，并且满足：

(i) 在集合 $\{x: u(x)\neq 0\}$ 上，$-\omega\leqslant\phi_u\leqslant 0$；

(ii) $\|\phi_u\|_{D^{1,2}}\leqslant C\|u\|_{H^1}^2$，且 $\int_{\mathbb{R}^3}|\phi_u|u^2\mathrm{d}x\leqslant C\|u\|_{\frac{12}{5}}^4\leqslant C\|u\|_{H^1}^4$.

在(4)式左右两端同时乘 ϕ_u，并分部积分，可得

$$\int_{\mathbb{R}^3}|\nabla\phi_u|^2\mathrm{d}x=-\int_{\mathbb{R}^3}\omega\phi_u u^2\mathrm{d}x-\int_{\mathbb{R}^3}\phi_u^2u^2\mathrm{d}x \tag{5}$$

从而结合(5)式及 J 的定义知，$I(u)=J(u,\phi_u)$ 可化简为

$$I(u)=\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^3}(|\nabla u|^2+V(x)u^2-\omega\phi_u u^2)\mathrm{d}x-\int_{\mathbb{R}^3}F(x,u)\mathrm{d}x\qquad\forall u\in H$$

由条件(V)，$(F_1)-(F_3)$ 及引理 1 易知，I 定义在空间 H 上是有意义的，且 $I\in C^1(H,\mathbb{R})$，其所对应的导数为

$$\langle I'(u),v\rangle=\int_{\mathbb{R}^3}[\nabla u\cdot\nabla v+V(x)uv-(2\omega+\phi_u)\phi_u uv]\mathrm{d}x-$$
$$\int_{\mathbb{R}^3}\overline{f}(x,u)v\mathrm{d}x-s\lambda\int_{\mathbb{R}^3}\alpha(x)|u|^{s-2}uv\mathrm{d}x\qquad\forall u,v\in H$$

由文献[1]的命题 3.5 知，u 是泛函 I 的临界点当且仅当 $(u,\phi)\in H\times D^{1,2}(\mathbb{R}^3)$ 是系统(1)的解，并且 $\phi=\phi_u$. 因此，为了得到系统(1)的非零解，我们只需寻找泛函 I 的非零的临界点即可.

令 $B_R=\{x\in\mathbb{R}^3:|x|<R\}$，$B_R^C=\mathbb{R}^3\backslash B_R=\{x\in\mathbb{R}^3:|x|\geqslant R\}$. 令 $\{e_i\}$ 为空间 H 的一组正交基. $X_i=\mathbb{R}e_i$，$Y_k=\bigoplus_{i=1}^k X_i$，$Z_k=\bigoplus_{i=k+1}^\infty X_i$，$k\in\mathbb{N}_+$.

引理 2　假设条件(V)，$(F_1)-(F_2)$，$(F_4)-(F_5)$ 成立，则泛函 $I(u)$ 满足 $(\mathrm{PS})_c$ 条件.

证　设 $\{u_n\}\subset H$ 是泛函 I 的任一 $(\mathrm{PS})_c$ 序列，即

$$I(u_n)\to c,\ I'(u_n)\to 0\qquad n\to\infty$$

从而存在常数 $M>0$，使得

$$|I(u_n)|\leqslant M\qquad\|I'(u_n)\|\leqslant M \tag{6}$$

首先证明 $(\mathrm{PS})_c$ 序列 $\{u_n\}$ 有界. 采用反证法. 假设存在 $\{u_n\}$ 的一个子列(不失一般性，仍记此子列为 $\{u_n\}$)，使得 $\|u_n\|\to\infty$. 令 $\omega_n=\dfrac{u_n}{\|u_n\|}$，则 $\|\omega_n\|=1$. 因为对 $2\leqslant p<6$，嵌入映射 $H\hookrightarrow L^p(\mathbb{R}^3)$ 是紧的，所以存在 $\{\omega_n\}$ 的一个子列(不失一般性，仍记之为 $\{\omega_n\}$)和 $\omega_0\in H$，使得：$\omega_n\rightharpoonup\omega_0(x\in H)$；$\omega_n\to\omega_0(x\in L^p(\mathbb{R}^3))$；$\omega_n(x)\to\omega_0(x)$(a.e. $x\in\mathbb{R}^3$). 令 $\Omega=\{y\in\mathbb{R}^3:\omega_0(y)\neq 0\}$. 若 $\mathrm{meas}(\Omega)>0$，则 $|u_n|=$

$|\omega_n|\,\|u_n\|\to\infty$(a.e. $x\in\Omega$, $n\to\infty$).

由条件(F_2)和 Fatou 引理知

$$\liminf_{n\to\infty}\int_{\mathbb{R}^3}\frac{2\overline{F}(x,u_n)+a|u_n|^2}{2\|u_n\|^2}\mathrm{d}x\geqslant\liminf_{n\to\infty}\int_\Omega\frac{2\overline{F}(x,u_n)+a|u_n|^2}{2\|u_n\|^2}\mathrm{d}x\geqslant$$
$$\int_\Omega\liminf_{n\to\infty}\frac{2\overline{F}(x,u_n)+a|u_n|^2}{2|u_n|^2}|\omega_n|^2\mathrm{d}x=+\infty \tag{7}$$

而由引理 1(i) 及(6) 式知,当 $n\to\infty$ 时,

$$\left|\int_{\mathbb{R}^3}\frac{2\overline{F}(x,u_n)+a|u_n|^2}{2\|u_n\|^2}\mathrm{d}x\right|=\left|-\frac{I(u_n)}{\|u_n\|^2}+\frac{1}{2}-\int_{\mathbb{R}^3}\frac{\omega\phi_{u_n}u_n^2}{\|u_n\|^2}\mathrm{d}x-\lambda\int_{\mathbb{R}^3}\frac{\alpha(x)|u_n|^s}{\|u_n\|^2}\mathrm{d}x\right|\leqslant$$
$$\frac{M}{\|u_n\|^2}+\frac{1}{2}+\frac{\omega^2}{2}S_2^2+|\lambda|\,\|\alpha\|_{\frac{2}{2-s}}S_2^s\|u_n\|^{s-2}\to\frac{1+\omega^2S_2^2}{2}$$

这显然与(7) 式是矛盾的. 故 $\mathrm{meas}(\Omega)=0$,这意味着 $\omega_0=0$,$\omega_n\to0$($x\in L^p(\mathbb{R}^3)$, $2\leqslant p<6$).

由条件(F_1)知,对任意的 $x\in\mathbb{R}^3$,$|u|\leqslant r_0$,有

$$\left|\frac{1}{2}\overline{f}(x,u)u-\overline{F}(x,u)\right|\leqslant c'|u|^2$$

故结合条件(F_4)及引理 1(i) 知

$$c+o(1)=I(u_n)-\frac{1}{2}\langle I'(u_n),u_n\rangle=$$
$$\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^3}\omega\phi_{u_n}u_n^2\mathrm{d}x+\lambda\left(\frac{s}{2}-1\right)\int_{\mathbb{R}^3}\alpha(x)|u_n|^s\mathrm{d}x+\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^3}\phi_{u_n}^2u_n^2\mathrm{d}x+$$
$$\int_{\mathbb{R}^3}\left(\frac{1}{2}\overline{f}(x,u_n)u_n-\overline{F}(x,u_n)\right)\mathrm{d}x\geqslant$$
$$-\frac{\omega^2}{2}\int_{\mathbb{R}^3}u_n^2\mathrm{d}x+|\lambda|\left(\frac{s}{2}-1\right)\|\alpha\|_{\frac{2}{2-s}}S_2^s\|u_n\|^s-c'\int_{|u_n|<r_0}|u_n|^2\mathrm{d}x+$$
$$\frac{c_2}{2}\int_{|u_n|\geqslant r_0}|u_n|^p\mathrm{d}x$$

这意味着

$$\lim_{n\to\infty}\int_{|u_n|\geqslant r_0}\frac{|u_n|^p}{\|u_n\|^2}\mathrm{d}x=0 \tag{8}$$

由条件(F_1)知,对 $\forall(x,u)\in\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}$,

$$|\overline{f}(x,u)|\leqslant c_1|u|+c_1|u|^{p-1}\qquad|\overline{F}(x,u)|\leqslant\frac{c_1}{2}|u|^2+\frac{c_1}{p}|u|^p \tag{9}$$

结合(6),(8),(9) 式及引理 1(i) 知,当 $n\to\infty$ 时

$$\frac{M+1}{\|u_n\|}\geqslant\frac{\langle I'(u_n),u_n\rangle}{\|u_n\|^2}=$$
$$1-\int_{\mathbb{R}^3}\frac{(2\omega+\phi_{u_n})\phi_{u_n}u_n^2}{\|u_n\|^2}\mathrm{d}x-\lambda s\int_{\mathbb{R}^3}\frac{\alpha(x)|u_n|^s}{\|u_n\|^2}\mathrm{d}x-\int_{\mathbb{R}^3}\frac{\overline{f}(x,u_n)u_n+a|u_n|^2}{\|u_n\|^2}\mathrm{d}x\geqslant$$
$$1-|\lambda|s\|\alpha\|_{\frac{2}{2-s}}S_2^s\|u_n\|^{s-2}-(c_1+a)\int_{\mathbb{R}^3}|\omega_n|^2\mathrm{d}x-c_1\int_{\mathbb{R}^3}\frac{|u_n|^p}{\|u_n\|^2}\mathrm{d}x\geqslant$$
$$1-|\lambda|s\|\alpha\|_{\frac{2}{2-s}}S_2^s\|u_n\|^{s-2}-(c_1+a)\int_{\mathbb{R}^3}|\omega_n|^2\mathrm{d}x-c_1r_0^{p-2}\int_{|u_n|<r_0}|\omega_n|^2\mathrm{d}x-$$
$$c_1\int_{|u_n|\geqslant r_0}\frac{|u_n|^p}{\|u_n\|^2}\mathrm{d}x\to1$$

这显然是矛盾的,故序列 $\{u_n\}$ 是有界的.

其次证明 $\{u_n\}$ 在空间 H 中有一个强收敛的子列. 因为

$$\|u_n-u\|^2=\langle I'(u_n)-I'(u),u_n-u\rangle+\int_{\mathbb{R}^3}(\overline{f}(x,u_n)-\overline{f}(x,u))(u_n-u)\mathrm{d}x+$$

$$\lambda s\int_{\mathbb{R}^3}\alpha(x)(|u_n|^{s-2}u_n-|u|^{s-2}u)(u_n-u)\mathrm{d}x+\int_{\mathbb{R}^3}a|u_n-u|^2\mathrm{d}x+$$
$$\int_{\mathbb{R}^3}(\phi_{u_n}^2u_n-\phi_u^2u)(u_n-u)\mathrm{d}x+2\omega\int_{\mathbb{R}^3}(\phi_{u_n}u_n-\phi_uu)(u_n-u)\mathrm{d}x \tag{10}$$

所以由文献[8]中引理 3.3 的证明可知：要证明 $u_n\to u(x\in H, n\to\infty)$，只需证明当 $n\to\infty$ 时，

$$\int_{\mathbb{R}^3}a|u_n-u|^2\mathrm{d}x\to 0$$

$$\Gamma(u)=s\int_{\mathbb{R}^3}\alpha(x)(|u_n|^{s-2}u_n-|u|^{s-2}u)(u_n-u)\mathrm{d}x\to 0$$

即可. 因为对 $2\leqslant p<6$，嵌入映射 $H\hookrightarrow L^p(\mathbb{R}^3)$ 是紧的，所以当 $n\to\infty$ 时，

$$\int_{\mathbb{R}^3}a|u_n-u|^2\mathrm{d}x=a\|u_n-u\|_2^2\to 0$$

且

$$|\Gamma(u)|\leqslant s\left(\int_{\mathbb{R}^3}|\alpha(x)|^{\frac{2}{2-s}}\mathrm{d}x\right)^{\frac{2-s}{2}}\left(\int_{\mathbb{R}^3}|(|u_n|^{s-2}u_n-|u|^{s-2}u)(u_n-u)|^{\frac{2}{s}}\mathrm{d}x\right)^{\frac{s}{2}}\leqslant$$
$$s\|\alpha\|_{\frac{2}{2-s}}(\|u_n\|_2^{s-1}+\|u\|_2^{s-1})\|u_n-u\|_2\to 0$$

引理 3　假设条件(F_1)－(F_5)成立，则：

(i) 存在 $\gamma>0$，$\rho>0$，使得 $I|_{\partial B_\rho\cap Z_k}\geqslant\gamma$；

(ii) 对任意的有限维子空间 $\widetilde{E}\subset H$，存在 $R=R(\widetilde{E})>0$，使得 $I|_{\widetilde{E}\setminus B_R}<0$.

证　(i) 令 $\beta_k=\sup\limits_{u\in Z_k,\ \|u\|=1}\|u\|_p(2\leqslant p<6)$，则 $\beta_k\to 0(k\to\infty)$. 从而存在 $k_1>1$，使得当 $k>k_1$ 时，

$$\|u\|_2^2\leqslant\frac{1}{2(c_1+a)}\|u\|^2\qquad\forall u\in Z_k \tag{11}$$

因为 $1<s<2$，所以存在 $R_0>0$，使得

$$|\lambda|\ \|\alpha\|_{\frac{2}{2-s}}S_2^s\|u\|^s\leqslant\frac{1}{8}\|u\|^2\qquad\|u\|\geqslant R_0 \tag{12}$$

由(9),(11)－(12)式及引理 1(i)知，$\forall u\in Z_k$，$\|u\|\geqslant R_0$，

$$I(u)=\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^3}(|\nabla u|^2+\widetilde{V}(x)u^2)\mathrm{d}x-\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^3}\omega\phi_uu^2\mathrm{d}x-\int_{\mathbb{R}^3}\overline{F}(x,u)\mathrm{d}x-$$
$$\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^3}au^2\mathrm{d}x-\lambda\int_{\mathbb{R}^3}\alpha(x)|u|^s\mathrm{d}x\geqslant$$
$$\frac{1}{2}\|u\|^2-\frac{c_1+a}{2}\|u\|_2^2-|\lambda|\ \|\alpha\|_{\frac{2}{2-s}}S_2^s\|u\|^s-\frac{c_1}{p}\|u\|_p^p\geqslant$$
$$\frac{1}{8}\|u\|^2-\frac{c_1}{p}\beta_k^p\|u\|^p$$

令 $\rho=(4\beta_k^pc_1)^{\frac{1}{2-p}}$，$\gamma=\left(\frac{1}{8}-\frac{1}{4p}\right)\rho^2$，则 $\rho\to\infty(k\to\infty)$，且 $\gamma>0$. 从而存在 $k_2>1$，使得当 $k>k_2$ 时，$\rho>R_0$. 故当 $k>\max\{k_1, k_2\}$，$u\in Z_k$，$\|u\|=\rho$ 时，$I(u)\geqslant\left(\frac{1}{8}-\frac{1}{4p}\right)\rho^2=\gamma>0$.

(ii) 设 $\widetilde{E}\subset H$ 是任一有限维子空间. 利用反证法证明. 假设存在一列序列 $\{u_n\}\subset\widetilde{E}$，满足 $\|u_n\|\to\infty$，但 $I(u_n)\geqslant 0$. 令 $v_n=\frac{u_n}{\|u_n\|}$，则 $\|v_n\|=1$. 因为 $\widetilde{E}\subset H$ 是有限维子空间，所以存在 $\{v_n\}$ 的一个子列(不失一般性，仍记之为 $\{v_n\}$)和 $v_0\in\widetilde{E}$，使得 $v_n\to v_0(x\in\widetilde{E})$，$\|v_0\|=1$. 故由条件($F_2$)及 Fatou 引理知

$$0\leqslant\frac{I(u_n)}{\|u_n\|^2}=$$
$$\frac{1}{2}-\int_{\mathbb{R}^3}\frac{\omega\phi_{u_n}u_n^2}{2\|u_n\|^2}\mathrm{d}x-\lambda\int_{\mathbb{R}^3}\frac{\alpha(x)|u_n|^s}{\|u_n\|^2}\mathrm{d}x-\int_{\mathbb{R}^3}\frac{\overline{F}(x,u_n)}{\|u_n\|^2}\mathrm{d}x-\int_{\mathbb{R}^3}\frac{a|u_n|^2}{2\|u_n\|^2}\mathrm{d}x\leqslant$$
$$\frac{1}{2}+\frac{\omega^2}{2}S_2^2-\int_{\mathbb{R}^3}\frac{2\overline{F}(x,u_n)+a|u_n|^2}{2\|u_n\|^2}\mathrm{d}x+|\lambda|\ \|\alpha\|_{\frac{2}{2-s}}S_2^s\|u_n\|^{s-2}\to-\infty\qquad n\to+\infty$$

这显然是矛盾的，故存在 $R=R(\widetilde{E})>0$ 使得 $I|_{\widetilde{E}\setminus B_R}<0$.

引理 4 假设条件$(F_1)-(F_5)$成立，则存在 $k_0\in\mathbb{N}_+$ 使得 $\rho_k>\gamma_k>0$，且满足：

(i) $a_k=\inf\limits_{u\in Z_k,\ \|u\|=\rho_k} I(u)\geqslant 0$；

(ii) $b_k=\max\limits_{u\in Y_k,\ \|u\|=\gamma_k} I(u)<0$；

(iii) $d_k=\inf\limits_{u\in Z_k,\ \|u\|\leqslant\rho_k} I(u)\to 0(k\to+\infty)$.

证 因为 $2<p<6$，所以存在 $R_0>0$ 使得

$$\frac{c_1S_p^p}{p}\|u\|^p\leqslant\frac{1}{8}\|u\|^2 \qquad \|u\|\leqslant R_0 \tag{13}$$

由(3),(9),(11),(13)式及引理1(i)知，对 $\forall u\in Z_k$，

$$\begin{aligned}I(u)=&\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^3}(|\nabla u|^2+V(x)u^2)\mathrm{d}x-\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^3}\omega\phi_u u^2\mathrm{d}x-\lambda\int_{\mathbb{R}^3}\alpha(x)|u|^s\mathrm{d}x-\int_{\mathbb{R}^3}\overline{F}(x,u)\mathrm{d}x\geqslant\\&\frac{1}{2}\|u\|^2-\frac{c_1+a}{2}\|u\|_2^2-\lambda\|\alpha\|_{\frac{2}{2-s}}\|u\|_2^s-\frac{c_1}{p}S_p^p\|u\|^p\geqslant\\&\frac{1}{8}\|u\|^2-\lambda\|\alpha\|_{\frac{2}{2-s}}\beta_k^s\|u\|^s\end{aligned} \tag{14}$$

令 $\rho_k=(8\beta_k^s s\lambda\|\alpha\|_{\frac{2}{2-s}})^{\frac{1}{2-s}}$，则 $\rho_k\to 0(k\to+\infty)$. 从而存在 $k_0>0$，使得当 $k>k_0$ 时 $\gamma_k<R_0$. 故当 $k>\max\{k_1,k_0\}$，$u\in Z_k$，$\|u\|=\rho_k$ 时，

$$I(u)\geqslant\left(\frac{1}{8}-\frac{1}{8s}\right)\rho_k^2\geqslant 0$$

即(i)成立.

(ii) 对 $\forall u\in Y_k$，$\delta>0$，令 $\Gamma_{\alpha,\delta}(u)=\{x\in\mathbb{R}^3:\alpha(x)|u|^s\geqslant\delta\|u\|^s\}$，由文献[4]中定理1.5的证明过程可知，存在 $\varepsilon_1>0$，使得 $\mathrm{meas}(\Gamma_{\alpha,\varepsilon_1}(u))\geqslant\varepsilon_1$.

故结合条件(F_4),(9)式及引理1(i)知，对 $\forall u\in Y_k$，

$$\begin{aligned}I(u)=&\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^3}(|\nabla u|^2+V(x)u^2)\mathrm{d}x-\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^3}\omega\phi_u u^2\mathrm{d}x-\lambda\int_{\mathbb{R}^3}\alpha(x)|u|^s\mathrm{d}x-\int_{\mathbb{R}^3}\overline{F}(x,u)\mathrm{d}x\leqslant\\&\frac{1}{2}\|u\|^2-\frac{a}{2}\int_{\mathbb{R}^3}u^2\mathrm{d}x-\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^3}\omega\phi_u u^2\mathrm{d}x-\lambda\int_{\Gamma_{\alpha,\varepsilon_1}(u)}\alpha(x)|u|^s\mathrm{d}x-\int_{\mathbb{R}^3}\overline{F}(x,u)\mathrm{d}x\leqslant\\&\frac{1}{2}\|u\|^2+\frac{\omega^2}{2}\int_{\mathbb{R}^3}u^2\mathrm{d}x-\lambda\varepsilon_1^2\|u\|^s+\frac{c_1}{2}\int_{\mathbb{R}^3}|u|^2\mathrm{d}x+\frac{c_1}{p}\int_{\mathbb{R}^3}|u|^p\mathrm{d}x\leqslant\\&\frac{1+\omega^2S_2{}^2+c_1S_2{}^2}{2}\|u\|^2-\lambda\varepsilon_1^2\|u\|^s+\frac{c_1S_p^p}{p}\|u\|^p\end{aligned}$$

因为 $1<s<2$，所以存在 $\gamma_k\in(0,\rho_k)$，使得当 $u\in Y_k$，$\|u\|=\gamma_k$ 时 $I(u)\leqslant 0$，即(ii)成立.

(iii) 由(14)式，对 $\forall u\in Z_k$，$\|u\|\leqslant\rho_k$，有

$$I(u)\geqslant\frac{1}{8}\|u\|^2-\lambda\|\alpha\|_{\frac{2}{2-s}}\beta_k^s\|u\|^s\geqslant-\lambda\|\alpha\|_{\frac{2}{2-s}}\beta_k^s\|u\|^s\geqslant-\lambda\|\alpha\|_{\frac{2}{2-s}}\beta_k^s\rho_k^s$$

因为 $\rho_k\to 0$，$k\to+\infty$，所以 $\inf\limits_{u\in Z_k,\ \|u\|\leqslant\rho_k} I(u)\to 0(k\to+\infty)$，即(iii)成立.

定理 1 的证明 由条件(F_3)知泛函 I 是偶的，且由引理2及引理3知，能量泛函 I 满足对称山路定理(见文献[21]的定理9.12)的条件，故由对称山路定理知，I 有一列趋于 $+\infty$ 的临界值. 即系统(1)具有一列高能量解.

定理 2 的证明 由条件(F_3)知泛函 I 是偶的，且由引理2及引理4知，能量泛函 I 满足对偶喷泉定理(见文献[22]的定理3.18)的条件，故由对偶喷泉定理知，I 有一列趋于0的负的临界值. 即系统(1)存在一列负能量解.

参考文献：

[1] BENCI V, FORTUNATO D F. Solitary Waves of the Nonlinear Klein-Gordon Equation Coupled with the Maxwell Equa-

tions [J]. Reviews in Mathematical Physics，2002，14(4)：409-420.

[2] BENCI V，FORTUNATO D. The Nonlinear Klein-Gordon Equation Coupled with the Maxwell Equations [J]. Nonlinear Analysis：Theory，Methods and Applications，2001，47(9)：6065-6072.

[3] HE X M. Multiplicity of Solutions for a Nonlinear Klein-Gordon-Maxwell System [J]. Acta Applicandae Mathematicae，2014，130(1)：237-250.

[4] LI L，TANG C L. Infinitely Many Solutions for a Nonlinear Klein-Gordon-Maxwell System [J]. Nonlinear Analysis：Theory，Methods and Applications，2014，110(2)：157-169.

[5] DING L，LI L. Infinitely Many Standing Wave Solutions for the Nonlinear Klein-Gordon-Maxwell System with Sign-Changing Potential [J]. Computers and Mathematics with Applications，2014，68(5)：589-595.

[6] CHE G F，CHEN H B. Existence and Multiplicity of Nontrivial Solutions for Klein-Gordon-Maxwell System with a Parameter [J]. Journal of the Korean Mathematical Society，2017，54(3)：1015-1030.

[7] 廖　坤，段春生，李　麟，等. 具有变号位势的 Klein-Gordon-Maxwell 系统孤立波的存在性 [J]. 西南大学学报(自然科学版)，2018，40(5)：89-93.

[8] CHEN S J，SONG S Z. Multiple Solutions for Nonhomogeneous Klein-Gordon-Maxwell Equations on $\mathbb{R}^3$ [J]. Nonlinear Analysis：Real World Applications，2015，22：259-271.

[9] WU D L，LIN H X. Multiple Solutions for Superlinear Klein-Gordon-Maxwell Equations [J]. Mathematische Nachrichten，2020，293(9)：1827-1835.

[10] WANG L X. Two Solutions for a Nonhomogeneous Klein-Gordon-Maxwell System [J]. Electronic Journal of Qualitative Theory of Differential Equations，2019，40：1-12.

[11] 陈尚杰，李　麟. 一类 $\mathbb{R}^3$ 上非齐次 Klein-Gordon-Maxwell 方程解的存在性 [J]. 西南师范大学学报(自然科学版)，2013，38(4)：35-39.

[12] CHEN S J，LI L. Infinitely Many Solutions for Klein-Gordon-Maxwell System with Potentials Vanishing at Infinity [J]. Zeitschrift Für Analysis und Ihre Anwendungen，2018，37(1)：39-50.

[13] DE MOURA E L，MIYAGAKI O H，RUVIARO R. Positive Ground State Solutions for Quasicritical Klein-Gordon-Maxwell Type Systems with Potential Vanishing at Infinity [J]. Electronic Journal of Differential Equations，2017，154：1-11.

[14] MIYAGAKI O H，DE MOURA E L，RUVIARO R. Positive Ground State Solutions for Quasicritical the Fractional Klein-Gordon-Maxwell System with Potential Vanishing at Infinity [J]. Complex Variables and Elliptic Equations，2019，64(2)：315-329.

[15] XU L P，CHEN H B. Existence and Multiplicity of Solutions for Nonhomogeneous Klein-Gordon-Maxwell Equations [J]. Electronic Journal of Differential Equations，2015，102：1-12.

[16] 陈丽珍，李安然，李　刚. 带有次线性项和超线性项的 Klein-Gordon-Maxwell 系统多重解的存在性 [J]. 数学物理学报，2017，37(4)：663-670.

[17] LIU X Q，CHEN S J，TANG C L. Ground State Solutions for Klein-Gordon-Maxwell System with Steep Potential Well [J]. Applied Mathematics Letters，2019，90：175-180.

[18] GAN C L，XIAO T，ZHANG Q F. Improved Results of Nontrivial Solutions for a Nonlinear Nonhomogeneous Klein-Gordon-Maxwell System Involving Sign-changing Potential [J]. Advance in Difference Equations，2020，167：1-16.

[19] ZHANG Q F，GAN C L，XIAO T，et al. An Improved Result for Klein-Gordon-Maxwell Systems with Steep Potential Well [J]. Mathematical Methods in the Applied Sciences，2020，2020：1-7.

[20] CHEN S T，TANG X H. Infinitely Many Solutions and Least Energy Solutions for Klein-Gordon-Maxwell Systems with General Superlinear Nonlinearity [J]. Computers and Mathematics with Applications，2018，75(9)：3358-3366.

[21] RABINOWITZ P H. Minimax Methods in Critical Point Theory with Applications to Differential Equations [M]. Providence，Rhode Island：American Mathematical Society，1986.

[22] WILLEM M. Minimax Theorems [M]. Boston，MA：Birkhäuser，1996.

[23] 梁冬冬. 无限维空间上的波方程和 Schrödinger 方程解的存在性和唯一性 [J]. 四川大学学报(自然科学版)，2021，58(1)：20-26.

责任编辑　廖　坤