第 46 卷　第 12 期　　西南师范大学学报(自然科学版)　　2021 年 12 月
Vol. 46　No. 12　　Journal of Southwest China Normal University (Natural Science Edition)　　Dec.　2021

DOI:10.13718/j.cnki.xsxb.2021.12.004

一类带有临界指数的 Schrödinger-Poisson 系统正解的存在性①

朱丽君，　廖家锋

西华师范大学 数学与信息学院，四川 南充 637009

摘要：Schrödinger-Poisson 系统起源于半导体理论和量子力学模型．本文研究了一类带有临界指数的 Schrödinger-Poisson 系统，克服了临界指数项导致空间紧性缺失的困难．首先，运用变分方法和山路引理获得了 Schrödinger 方程对应的能量泛函的正临界点；然后，结合解的定义证明了系统正解的存在性．该结果补充并改进了近期相关文献的结论．

关　键　词：临界指数；Schrödinger-Poisson 系统；变分法；正解

中图分类号：O177.91　　**文献标志码**：A　　**文章编号**：1000－5471(2021)12－0020－06

Existence of Positive Solution for Schrödinger-Poisson System with Critical Nonlinearity

ZHU Lijun，　LIAO Jiafeng

School of Mathematics and Information，China West Normal University，Nanchong Sichuan 637009，China；

Abstract：The Schrödinger-Poisson system arises in semiconductor theory and quantum mechanical models. A class of Schrödinger-Poisson systems with critical exponent are considered by overcoming the difficulty of the absence of the space compactness. First，the variational method and Mountain pass lemma are used to obtain the positive critical point of the energy functional corresponding to the Schrödinger equation. Then，combining the definition of the solution，the existence of positive solutions of the system is proved，which completes and improves some results of the recent reference.

Key words：critical exponent；Schrödinger-Poisson system；variational method；positive solution

考虑如下带有临界非线性项的 Schrödinger-Poisson 系统：

$$\begin{cases} -\Delta u + u - l(x)\phi u = \lambda f(x)u + u^5 & x \in \mathbb{R}^3 \\ -\Delta \phi = l(x)u^2 & x \in \mathbb{R}^3 \end{cases} \tag{1}$$

① 收稿日期：2020－12－16

基金项目：四川省教育厅自然科学基金重点项目(18ZA0471)；西华师范大学基本科研基金项目(18B015)；西华师范大学创新团队科研基金项目(CXTD2018-8).

作者简介：朱丽君，硕士研究生，主要从事非线性泛函分析的研究.

通信作者：廖家锋，博士，教授.

其中 $\eta > 0$，λ 为一个非负的实参数，且 $f(x)$ 和 λ 满足以下条件(H)：

(H_{f_1}) $f \in L^{\frac{3}{2}}(\mathbb{R}^3)$，$f \geqslant 0$，且 $f \not\equiv 0$；

(H_{f_2}) 存在 $\delta, \rho > 0$，$1 < \beta < 2$，$x_0 \in \mathbb{R}^3$，使得对 $\forall x$，$|x - x_0| < \rho$，都有 $f(x) \geqslant \delta |x - x_0|^{-\beta}$；

(H_l) $l \in L^2(\mathbb{R}^3) \cap L^\infty(\mathbb{R}^3)$，$l \geqslant 0$ 且 $l \not\equiv 0$；

(H_λ) $0 < \lambda < \lambda^*$，其中 λ^* 定义为

$$\lambda^* = \inf_{u \in H^1(\mathbb{R}^3)\setminus\{0\}} \left\{ \int_{\mathbb{R}^3} (|\nabla u|^2 + u^2)\mathrm{d}x : \int_{\mathbb{R}^3} f(x) u^2 \mathrm{d}x = 1 \right\}$$

近年来，许多学者对临界问题进行了广泛的研究，如文献[1-10]. 特别地，文献[9]研究了如下带凹凸非线性项和临界指数的 Schrödinger-Poisson 系统多解的存在性：

$$\begin{cases} -\Delta u + u + \eta\phi u = \lambda f(x) u^{q-1} + u^5 & x \in \mathbb{R}^3 \\ -\Delta\phi = u^2 & x \in \mathbb{R}^3 \end{cases} \tag{2}$$

其中 $1 < q < 2$，$\eta \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$，$\lambda > 0$，$f \in L^{\frac{6}{6-q}}(\mathbb{R}^3)$ 为非零非负函数. 利用变分法，文献[9]证明了系统(2)至少存在两个正解.

文献[3]证明了如下系统的正解和变号解的存在性：

$$\begin{cases} -\Delta u + u + l(x)\phi u = \lambda f(x) u + k(x)|u|^4 u & x \in \mathbb{R}^3 \\ -\Delta\phi = l(x) u^2 & x \in \mathbb{R}^3 \end{cases}$$

其中，$\lambda > 0, l, f, k$ 均为非负函数，且满足条件 (H_{f_1})，(H_{f_2})，(H_λ)，(H_l) 以及下面的条件：

(H_{k_1}) 对 $\forall x \in \mathbb{R}^3$，$k(x) \geqslant 0$；

(H_{k_2}) 存在 $x_0 \in \mathbb{R}^3$，$\delta_1 > 0$ 和 $\rho_1 > 0$，使得 $k(x_0) = \max\limits_{x \in \mathbb{R}^3} k(x)$，以及对 $\forall\ |x - x_0| < \rho_1$ 和 $1 \leqslant \alpha < 3$，有 $|k(x) - k(x_0)| \leqslant \delta_1 |x - x_0|^\alpha$.

注意到以上的结果中，系统(1)的正解的存在性还未曾被研究过. 受文献[3]的启发，本文将利用变分方法和山路引理研究系统(1)正解的存在性问题. 本文的主要结果如下：

定理 1　假设条件(H)成立，则系统(1)至少有一个正解 $(u, \phi_u) \in H^1(\mathbb{R}^3) \times D^{1,2}(\mathbb{R}^3)$.

注 1　在本文中，我们将文献[3]中非局部项的系数由正号变为负号，故本文的结论补充了文献[3]中定理 1.1 的结论.

Hilbert 空间 $H^1(\mathbb{R}^3)$ 带有范数

$$\|u\| = \left(\int_{\mathbb{R}^3} (|\nabla u|^2 + u^2)\mathrm{d}x \right)^{\frac{1}{2}}$$

$D^{1,2}(\mathbb{R}^3)$ 是 $C_0^\infty(\mathbb{R}^3)$ 关于范数 $\|u\|_D = \left(\int_{\mathbb{R}^3} |\nabla u|^2 \mathrm{d}x \right)^{\frac{1}{2}}$ 的完备化空间. H^* 表示 Banach 空间 $H^1(\mathbb{R}^3)$ 的共轭空间. $|\cdot|_p$ 表示 Lebesgue 空间 $L^p(\mathbb{R}^3)$ 的标准范数. 由文献[11]可知，Sobolev 嵌入 $D^{1,2}(\mathbb{R}^3) \cup L^6(\mathbb{R}^3)$ 的最佳常数为

$$S = \inf_{u \in D^{1,2}(\mathbb{R}^3)\setminus\{0\}} \frac{\|u\|_D^2}{|u|_6^2} \tag{3}$$

令 $o(1)$ 表示无穷小量，C 表示不同的正实数.

由 Lax-Milgram 定理，对 $\forall u \in H^1(\mathbb{R}^3)$，系统(1)中第二个方程有唯一解 $\phi_u \in D^{1,2}(\mathbb{R}^3)$ 与之对应，将 ϕ_u 代入系统(1)的第一个方程，则系统(1)可变换成如下方程：

$$-\Delta u + u - l(x)\phi_u u = \lambda f(x) u + u^5 \tag{4}$$

其能量泛函 I 为

$$I(u) = \frac{1}{2}\|u\|^2 - \frac{l}{4}\int_{\mathbb{R}^3} l(x)\phi_u u^2 \mathrm{d}x - \frac{\lambda}{2}\int_{\mathbb{R}^3} f(x)(u^+)^2 \mathrm{d}x - \frac{1}{6}\int_{\mathbb{R}^3} (u^+)^6 \mathrm{d}x$$

显然，$I \in C^1(H^1(\mathbb{R}^3), \mathbb{R})$. 众所周知，方程(4)的弱解与能量泛函 I 的临界点是一一对应的. 对 $\forall u, v \in H^1(\mathbb{R}^3)$，有

$$\langle I'(u), v \rangle = \int_{\mathbb{R}^3} (\nabla u \cdot \nabla v + uv)\mathrm{d}x - l(x)\int_{\mathbb{R}^3} \phi_u uv \mathrm{d}x - \lambda\int_{\mathbb{R}^3} f(x)(u^+)v \mathrm{d}x - \int_{\mathbb{R}^3} (u^+)^5 v \mathrm{d}x$$

由文献[2]可知，u 是方程(4)的弱解当且仅当(u, ϕ_u)是系统(1)的弱解. 因此，证明系统(1)有正弱解等价于证明泛函 I 有正临界点.

首先，我们给出一些重要的引理.

引理 1[4]　对于每个 $u \in H^1(\mathbb{R}^3)$，都存在如下方程的唯一解 $\phi_u \in D^{1,2}(\mathbb{R}^3)$：

$$-\Delta\phi = l(x)u^2 \qquad x \in \mathbb{R}^3$$

且 ϕ_u 满足性质：

(a) $\|\phi_u\|_D^2 = \int_{\mathbb{R}^3} l(x)\phi_u u^2 \mathrm{d}x$；

(b) $\phi_u \geqslant 0$，且当 $u \neq 0$ 时，有 $\phi_u > 0$；

(c) $\int_{\mathbb{R}^3} l(x)\phi_u u^2 \mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}^3} |\nabla\phi_u|^2 \mathrm{d}x \leqslant C|u|_{\frac{12}{5}}^4 \leqslant C\|u\|^4$；

(d) 如果在 $H^1(\mathbb{R}^3)$ 空间中有 $u_n \rightharpoonup u$，那么$\int_{\mathbb{R}^3} l(x)\phi_{u_n} u_n^2 \mathrm{d}x \to \int_{\mathbb{R}^3} l(x)\phi_u u^2 \mathrm{d}x$；

(e) λ^* 是可达的，其中 λ^* 为条件(H_λ)中所定义.

引理 2[10]　若条件(H_{f_1})成立，则泛函ψ_f：$u \in H^1(\mathbb{R}^3) \longmapsto \int_{\mathbb{R}^3} f(x)u^2 \mathrm{d}x$ 是弱连续的，故对 $\forall v \in H^1(\mathbb{R}^3)$，$\psi_f$：$u \in H^1(\mathbb{R}^3) \longmapsto \int_{\mathbb{R}^3} f(x)uv \mathrm{d}x$ 也是弱连续的.

引理 3　若条件(H_λ)，(H_{f_1})，(H_l)成立，且 $I(0) = 0$，则：

(a) 存在 $\rho, \alpha_0 > 0$，使得当 $\|u\| = \rho$ 时，有 $I(u) \geqslant \alpha_0$；

(b) 存在某个函数 $v \in H^1(\mathbb{R}^3)$，满足 $\|v\| > \rho$ 且 $I(v) < 0$.

证　(a) 显然 $I(0) = 0$，根据 Sobolev 不等式和引理 1，可得

$$\begin{aligned}I(u) = &\frac{1}{2}\|u\|^2 - \frac{1}{4}\int_{\mathbb{R}^3} l(x)\phi_u u^2 \mathrm{d}x - \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^3} \lambda f(x)(u^+)^2 \mathrm{d}x - \frac{1}{6}\int_{\mathbb{R}^3}(u^+)^6 \mathrm{d}x \geqslant \\ &\frac{1}{2}\|u\|^2 - C\|u\|^4 - C\|u\|^6 - \frac{\lambda}{2\lambda^*}\|u\|^2 = \\ &\|u\|^2\left(\frac{1}{2} - \frac{\lambda}{2\lambda^*} - C\|u\|^2 - C\|u\|^4\right)\end{aligned}$$

令 $\|u\|^2 = \rho$ 充分小，有

$$C\rho + C\rho^2 \leqslant \frac{1}{4}\left(1 - \frac{\lambda}{\lambda^*}\right)$$

即可得

$$I(u) \geqslant \frac{1}{4}\left(1 - \frac{\lambda}{\lambda^*}\right)\rho$$

取 $\alpha_0 = \frac{1}{4}\left(1 - \frac{\lambda}{\lambda^*}\right)\rho$，故(a)得证.

(b) 固定 $u_0 \in H^1(\mathbb{R}^3)$，且满足 $u_0 \neq 0$，则有

$$I(tu_0) = \frac{1}{2}t^2\|u_0\|^2 - \frac{1}{4}t^4\int_{\mathbb{R}^3} l(x)\phi_{u_0} u_0^2 \mathrm{d}x - \frac{1}{2}t^2\int_{\mathbb{R}^3} \lambda f(x)(u_0^+)^2 \mathrm{d}x - \frac{1}{6}t^6\int_{\mathbb{R}^3}(u_0^+)^6 \mathrm{d}x$$

我们可推断出，当 $t \to +\infty$ 时，$I(tu_0) \to -\infty$. 选取一个 $t_0 > 0$，使得 $\|t_0 u_0\| > \rho$ 并且 $I(t_0 u_0) < 0$. 令 $v = t_0 u_0 \in H^1(\mathbb{R}^3)$ 且 $\|v\| > \rho$，即有 $I(v) < 0$，因此(b)也得证.

结合引理 1 与山路引理[11]，可知泛函 $I(u)$ 有一个山路几何结构，即存在$\{u_n\} \subset H^1(\mathbb{R}^3)$，使得

$$I(u_n) \to c \geqslant \alpha > 0 \qquad I'(u_n) \to 0 \qquad n \to \infty$$

$$c = \inf_{r \in \Gamma} \max_{t \in [0,1]} I(r(t)) \qquad \Gamma = \{r \in C([0,1], H^1(\mathbb{R}^3)): r(0) = 0, r(1) = t_0 u_0\} \tag{5}$$

引理 4　若条件(H)成立，则对任意 $c < \frac{1}{3}S^{\frac{3}{2}}$，泛函 I 满足局部$(\mathrm{PS})_c$ 条件.

证　假设$\{u_n\}$为$(\mathrm{PS})_c$ 序列，即

$$I(u_n)\to c\qquad I'(u_n)\to 0 \tag{6}$$

当 n 充分大时，由(6)式和条件(H_λ)，可推导出

$$\begin{aligned}c+1+o(\|u_n\|)\geqslant I(u_n)-\frac{1}{4}\langle I'(u_n),u_n\rangle=&\\ \frac{1}{4}\|u_n\|^2-\frac{\lambda}{4}\int_{\mathbb{R}^3}f(x)(u_n^+)^2\mathrm{d}x+\frac{1}{12}\int_{\mathbb{R}^3}(u_n^+)^6\mathrm{d}x\geqslant&\\ \frac{1}{4}\|u_n\|^2-\frac{\lambda}{4}\int_{\mathbb{R}^3}f(x)(u_n^+)^2\mathrm{d}x\geqslant&\\ \frac{1}{4}\left(1-\frac{\lambda}{\lambda^*}\right)\|u_n\|^2&\end{aligned}$$

故 $\{u_n\}$ 在 $H^1(\mathbb{R}^3)$ 中有界. 因此，$\{u_n\}$ 存在弱收敛子列(不妨仍记为 $\{u_n\}$)以及 $u\in H^1(\mathbb{R}^3)$，当 n 充分大时，有

$$\begin{cases}u_n\rightharpoonup u & x\in H^1(\mathbb{R}^3)\\ u_n(x)\to u(x) & \text{a. e. } x\in\mathbb{R}^3\\ \nabla u_n\rightharpoonup\nabla u & x\in L^2(\mathbb{R}^3)\\ u_n\rightharpoonup u & x\in L^2(\mathbb{R}^3)\end{cases} \tag{7}$$

令 $w_n=u_n-u$，如果 $\|w_n\|\to 0$，则结论成立. 否则，$\lim\limits_{n\to\infty}\|w_n\|=l>0$. 当 $n\to\infty$ 时，对 $\forall\varphi\in H^1(\mathbb{R}^3)$，由(6)式和(7)式，可得

$$\int_{\mathbb{R}^3}(\nabla u\cdot\nabla\varphi+u\varphi)\mathrm{d}x-\int_{\mathbb{R}^3}l(x)\phi_u u\varphi\mathrm{d}x-\int_{\mathbb{R}^3}\lambda f(x)u^+\varphi\mathrm{d}x-\int_{\mathbb{R}^3}(u^+)^5\varphi\mathrm{d}x=0 \tag{8}$$

由 Brézis-Lieb’s 引理[12] 可得

$$\begin{cases}\|u_n\|^2=\|w_n\|^2+\|u\|^2+o(1)\\ \displaystyle\int_{\mathbb{R}^3}(u_n^+)^6\mathrm{d}x=\int_{\mathbb{R}^3}(w_n^+)^6\mathrm{d}x+\int_{\mathbb{R}^3}(u^+)^6\mathrm{d}x+o(1)\end{cases} \tag{9}$$

令(8)式中 $\varphi=u$，我们有

$$\|u\|^2-\int_{\mathbb{R}^3}l(x)\phi_u u^2\mathrm{d}x-\int_{\mathbb{R}^3}\lambda f(x)(u^+)^2\mathrm{d}x-\int_{\mathbb{R}^3}(u^+)^6\mathrm{d}x=0 \tag{10}$$

由(6)式和(9)式，可得

$$o(1)=\|u\|^2-\int_{\mathbb{R}^3}l(x)\phi_u u^2\mathrm{d}x-\int_{\mathbb{R}^3}\lambda f(x)(u^+)^2\mathrm{d}x-\int_{\mathbb{R}^3}(u^+)^6\mathrm{d}x+\|w_n\|^2-\int_{\mathbb{R}^3}(w^+)_n^6\mathrm{d}x \tag{11}$$

由(10)式和(11)式，我们有

$$o(1)=\|w_n\|^2-\int_{\mathbb{R}^3}(w^+)_n^6\mathrm{d}x \tag{12}$$

根据 Sobolev 不等式，结合 $|w_n|_6^2\leqslant S^{-1}\|w_n\|^2$ 和(12)式，可简单计算出 $l\geqslant S^{\frac{3}{2}}$.

一方面，由(10)式和条件(H_λ)，可推得

$$\begin{aligned}I(u)=&\frac{1}{2}\|u\|^2-\frac{1}{4}\int_{\mathbb{R}^3}l(x)\phi_u u^2\mathrm{d}x-\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^3}\lambda f(x)(u^+)^2\mathrm{d}x-\frac{1}{6}\int_{\mathbb{R}^3}(u^+)^6\mathrm{d}x=\\ &\frac{1}{4}\|u\|^2-\frac{1}{4}\int_{\mathbb{R}^3}\lambda f(x)(u^+)^2\mathrm{d}x+\frac{1}{12}\int_{\mathbb{R}^3}(u^+)^6\mathrm{d}x\geqslant\\ &\frac{1}{4}\|u\|^2-\frac{1}{4}\int_{\mathbb{R}^3}\lambda f(x)(u^+)^2\mathrm{d}x\geqslant\\ &\frac{1}{4}\|u\|^2-\frac{1}{4}\frac{\lambda}{\lambda^*}\|u\|^2=\\ &\frac{1}{4}\|u\|^2\left(1-\frac{\lambda}{\lambda^*}\right)\geqslant 0\end{aligned} \tag{13}$$

另一方面，由(6)式、(9)式和(12)式，可得

$$I(u)=I(u_n)-\frac{1}{2}\|w_n\|^2+\frac{1}{6}\int_{\mathbb{R}^3}w_n^6\mathrm{d}x+o(1)=$$

$$
\begin{aligned}
& I(u_n)-\frac{1}{3}\|w_n\|^2+o(1)= \\
& c-\frac{1}{3}l+o(1)< \\
& c-\frac{1}{3}S^{\frac{3}{2}}<0
\end{aligned}
$$

这与(13)式矛盾，即 $l=0$.

引理 5 在条件(H)的假设下，若 $1<\beta<2$，可得 $c<\frac{1}{3}S^{\frac{3}{2}}$，其中 c 为(5)式中所定义.

证 众所周知，函数

$$
U(x)=\frac{(3\varepsilon^2)^{\frac{1}{4}}}{(\varepsilon^2+|x|^2)^{\frac{1}{2}}} \qquad x\in\mathbb{R}^3
$$

是(3)式的达到函数. 这也意味着，$U(x)$ 是方程 $-\Delta u=u^5(\forall x\in\mathbb{R}^3)$ 的解. 此外，$|\nabla u|_2^2=|U|_6^6=S^{\frac{3}{2}}$. 定义截断函数 $\zeta\in C_0^\infty(\mathbb{R}^3)$，它满足：$0\leqslant\zeta(x)\leqslant 1$，$|\nabla\zeta|\leqslant C(x\in\mathbb{R}^3)$，且对于任意 $|x|<2r_0$，$\zeta(x)=1$；对于任意 $|x|>3r_0$，$\zeta(x)=0$. 其中 $r_0>0$. 定义 $u_\varepsilon(x)=\zeta(x)U(x)$. 由文献[11]可知

$$
\begin{cases}
|u_\varepsilon|_6^6=|U|_6^6+O(\varepsilon^3)=S^{\frac{3}{2}}+O(\varepsilon^3) \\
|\nabla u_\varepsilon|_2^2=|\nabla U|_2^2+O(\varepsilon)=S^{\frac{3}{2}}+O(\varepsilon) \\
|u_\varepsilon|_p^p=O(\varepsilon^{\frac{p}{2}}) \qquad 2\leqslant p<3
\end{cases} \tag{14}
$$

由引理 3 可得，存在 $t_1>0$，$t_2>0$，使得 $t_1\leqslant t_\varepsilon\leqslant t_2$. 令 $I(t_\varepsilon u_\varepsilon)=A(\varepsilon)+B(\varepsilon)$，其中

$$
A(\varepsilon)=\frac{1}{2}t_\varepsilon^2\int_{\mathbb{R}^3}|\nabla u_\varepsilon|^2\mathrm{d}x-\frac{1}{6}t_\varepsilon^6\int_{\mathbb{R}^3}|u_\varepsilon|^6\mathrm{d}x
$$

$$
B(\varepsilon)=\frac{1}{2}t_\varepsilon^2\int_{\mathbb{R}^3}|u_\varepsilon|^2\mathrm{d}x-\frac{1}{4}t_\varepsilon^4\int_{\mathbb{R}^3}l(x)\phi_{u_\varepsilon}|u_\varepsilon|^2\mathrm{d}x-\frac{1}{2}t_\varepsilon^2\int_{\mathbb{R}^3}\lambda f(x)|u_\varepsilon|^2\mathrm{d}x
$$

首先，证明 $A(\varepsilon)\leqslant\frac{1}{3}S^{\frac{3}{2}}+C\varepsilon$. 令

$$
g(t)=\frac{1}{2}t^2\int_{\mathbb{R}^3}|\nabla u_\varepsilon|^2\mathrm{d}x-\frac{1}{6}t^6\int_{\mathbb{R}^3}|u_\varepsilon|^6\mathrm{d}x
$$

容易推断出，当 $T_\varepsilon=\left(\dfrac{\int_{\mathbb{R}^3}|\nabla u_\varepsilon|^2\mathrm{d}x}{\int_{\mathbb{R}^3}|u_\varepsilon|^6\mathrm{d}x}\right)^{\frac{1}{4}}$ 时，$g(T_\varepsilon)$ 取得最大值. 再根据(14)式，可得

$$
g(T_\varepsilon)=\sup_{t\geqslant 0}g(t)=\frac{1}{3}\frac{\left(\int_{\mathbb{R}^3}|\nabla u_\varepsilon|^2\mathrm{d}x\right)^{\frac{3}{2}}}{\left(\int_{\mathbb{R}^3}|u_\varepsilon|^6\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}}}=\frac{1}{3}S^{\frac{3}{2}}+C\varepsilon
$$

故 $A(\varepsilon)\leqslant\frac{1}{3}S^{\frac{3}{2}}+C\varepsilon$ 成立.

接下来，证明 $B(\varepsilon)\leqslant C\varepsilon-C\varepsilon^2-\lambda C\varepsilon^{2-\beta}$. 由 u_ε 的定义、条件(H_{f_2})，以及对任意的 ε 满足 $0<\varepsilon\leqslant\rho$，我们有

$$
\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^3}f(x)|u_\varepsilon|^2\mathrm{d}x\geqslant & C3^{\frac{1}{2}}\delta\int_{|x-x_0|<\rho}\frac{\varepsilon|x-x_0|^{-\beta}}{\varepsilon^2+|x-x_0|^2}\mathrm{d}x+\int_{|x-x_0|\geqslant\rho}f(x)|u_\varepsilon|^2\mathrm{d}x\geqslant \\
& C3^{\frac{1}{2}}\delta\int_0^\rho\frac{\varepsilon r^2}{r^\beta(\varepsilon^2+r^2)}\mathrm{d}r= \\
& C3^{\frac{1}{2}}\delta\frac{1}{\varepsilon}\int_0^{\frac{\rho}{\varepsilon}}\frac{\varepsilon^2s^2}{\varepsilon^\beta s^\beta(1+s^2)}\varepsilon\mathrm{d}s\geqslant \\
& C3^{\frac{1}{2}}\delta\varepsilon^{2-\beta}\int_0^1\frac{s^2}{2s^\beta}\mathrm{d}s=C\varepsilon^{2-\beta}
\end{aligned}
$$

由 $0 < t_1 \leqslant t_\varepsilon \leqslant t_2$ 和引理 1，可得

$$B(\varepsilon) = \frac{1}{2}t_\varepsilon^2\int_{\mathbb{R}^3} |u_\varepsilon|^2 \mathrm{d}x - \frac{1}{4}t_\varepsilon^4\int_{\mathbb{R}^3} l(x)\phi_{u_\varepsilon} |u_\varepsilon|^2 \mathrm{d}x - \frac{1}{2}t_\varepsilon^2\int_{\mathbb{R}^3} \lambda f(x) |u_\varepsilon|^2 \mathrm{d}x \leqslant$$
$$C |u_\varepsilon|_2^2 - \lambda C\varepsilon^{2-\beta} \leqslant C\varepsilon - \lambda C\varepsilon^{2-\beta}$$

由条件 $1 < \beta < 2$，易推导出 $0 < 2 - \beta < 1$. 所以，当 $\varepsilon \to 0^+$ 时，

$$I(t_\varepsilon u_\varepsilon) \leqslant \frac{1}{3}S^{\frac{3}{2}} + C\varepsilon + C\varepsilon - \lambda C\varepsilon^{2-\beta} < \frac{1}{3}S^{\frac{3}{2}}$$

故引理 5 得证.

最后，我们给出定理 1 的证明.

证明定理 1　由引理 3 知，$I(u)$ 具有山路结构. 通过引理 5，有 $c < \frac{1}{3}S^{\frac{3}{2}}$，再由引理 4 知，$\{u_n\} \subset H^1(\mathbb{R}^3)$ 有强收敛子列. 此时，不妨设子列仍记为 $\{u_n\}$，有 $u_n \to u (x \in H^1(\mathbb{R}^3))$. 即 u 是方程(4) 的解. 由 $\langle I'(u), u^- \rangle = 0$ 可推出 $\| u^- \| = 0$，即 $u^- = 0$. 所以，$u \geqslant 0$ 且 $u \neq 0$. 应用强极大值原理可得 $u > 0$. 因此，(u, ϕ_u) 是系统(1) 的一个正解.

参考文献：

[1] AZZOLLINI A, D'AVENIA P, LUISI V. Generalialized Schrödinger-Poisson Type Systems [J]. Communications on Pure and Applied Analysis, 2013, 12(2): 867-879.

[2] BENCI V, FORTUNATO D. An Eigenvalue Problem for the Schrödinger-Maxwell Equation [J]. Topological Methods in Nonlinear Analysis, 1998, 11(2): 283-293.

[3] HUANG L R, ROCHA E M, CHEN J Q. Positive and Sign-Changing Solutions of a Schrödinger-Poisson System Involving a Critical Nonlinearity [J]. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 2013, 408: 55-69.

[4] HUANG L R, ROCHA E M. A Positive Solutions of System with Critical Exponent [J]. Communications Mathematical and Analysis, 2013, 15(1): 29-43.

[5] 张　鹏，彭云飞，张晓飞. 一类带临界指数项的 Kirchhoff-Schrödinger-Poisson 系统正解的存在性 [J]. 西南师范大学学报(自然科学版)，2020，45(12)：28-35.

[6] 王玉婷，商彦英. 临界和超临界的薛定谔泊松方程正的径向基态解 [J]. 西南师范大学学报(自然科学版)，2021，46(4)：20-24.

[7] 李勇勇，唐春雷. 一类带双临界指数的 Schrödinger-Poisson 系统正基态解的存在性 [J]. 西南大学学报(自然科学版)，2018，40(6)：84-91.

[8] 李苗苗，唐春雷. 一类带临界指数的 Schrödinger-Poisson 方程正解的存在性 [J]. 西南师范大学学报(自然科学版)，2016，41(4)：35-38.

[9] LEI C Y, LIU G S, CHU C M, et al. New Multiple Solutions for a Schrödinger-Poisson System Involving Concave-Convex Nonlinearties [J]. Turkish Journal of Mathematics, 2020, 44: 986-997.

[10] WILLEM M. Minimax Theorems [M]. Boston: Birkhauser, 1996.

[11] BRÉZIS H, NIRENBERG L. Positive Solutions of Nonlinear Elliptic Equations Involving Critical Sobolev Exponents [J]. Communications on Pure and Applied Mathematics, 1983, XXXVI: 437-477.

[12] BRÉZIS H, LIEB E H. A Relation Between Pointwise Convergence of Functions and Con-Vergence of Functionals [J]. Proceedings of the American Mathematical Society, 1983, 88(3): 486-490.

责任编辑　廖　坤