

DOI:10.13718/j.cnki.xsxb.2021.12.006

3 阶 B-样条小波的希尔伯特变换的消失矩^①

杨秀竹, 余波

三峡大学 理学院, 湖北 宜昌 443002

摘要: 本文研究了 3 阶 B-样条小波的希尔伯特变换的消失矩. 首先计算了 3 阶 B-样条小波的分段函数形式的表达式, 并且给出了其图像. 3 阶 B-样条小波具有紧支撑性、反对称性以及良好的光滑性. 在此基础上, 结合希尔伯特变换的定义计算了 3 阶 B-样条小波的希尔伯特变换, 给出了其图像. 3 阶 B-样条小波经过希尔伯特变换后不再具有紧支撑性, 反对称性也变为对称性, 但保持了良好的光滑性. 最后利用消失矩的定义计算了 3 阶 B-样条小波的希尔伯特变换的消失矩. 结果表明, 3 阶 B-样条小波的希尔伯特变换虽然不再是一个有限支撑的函数, 但它比 3 阶 B-样条小波本身具有更高的消失矩, 这一发现对构成希尔伯特变换对的小波的设计具有启发意义.

关键词: B-样条小波; 消失矩; 希尔伯特变换

中图分类号: O241.86 **文献标志码:** A **文章编号:** 1000-5471(2021)12-0031-06

On Vanishing Moments of Hilbert Transform of B-Spline Wavelets with Order Three

YANG Xiuzhu, YU Bo

College of Science, China Three Gorges University, Yichang Hubei 443002, China

Abstract: The vanishing moments of Hilbert transform of B-spline wavelets with order three will be studied in this paper. In order to achieve this goal, we first calculate the piecewise function expression of B-spline wavelet with order three, and give its image. The B-spline wavelets with order three are compactly supported, anti-symmetric and smooth. On this basis, combined with the definition of Hilbert transform, the Hilbert transform of B-spline wavelets with order three is calculated, and its image is given. After Hilbert transform, B-spline wavelets with order three no longer have compact support, and their anti-symmetry becomes symmetric, but they keep good smoothness. Finally, we use the definition of vanishing moment to calculate the vanishing moment of Hilbert transform of B-spline wavelets of order three. The results show that the Hilbert transform of B-spline wavelets with order three is no longer a function with limited support, but it has higher vanishing moment than the B-spline wavelets with order three itself. This discovery is instructive for the design of wavelets that constitute Hilbert transform pairs.

Key words: B-spline wavelet; vanishing moment; Hilbert transform

① 收稿日期: 2021-01-12

基金项目: 国家自然科学基金项目(11301296).

作者简介: 杨秀竹, 硕士研究生, 主要从事计算数学与调和分析的研究.

小波分析自从出现之日开始,便因为其理论上的优美性和计算上的便利性得到了广泛关注,并最终成为数字信号处理与数字图像处理的标准工具.构造小波的一个自然而有效的方法是多尺度分析^[1].基于这一方法,研究者们发现了许多小波,比如 Daubechies 小波、B-样条小波等.在众多小波中,B-样条小波因为其在消失矩、对称性、紧支撑性和光滑性等方面的良好性质受到了广泛关注^[2].尽管小波在许多方面的应用表现优越,但它仍然有一些缺陷,比如对平移的敏感性,在数字图像处理中方向的弱选择性以及缺乏相位信息等.而数字图像处理已经广泛地融入到生活的各方面,例如医学图像处理^[3]、人脸识别^[4]、病虫害预测^[5]等,因此,许多研究人员试图提出一些改进的方法来解决这些缺陷.比如文献[6]利用正交小波对来设计可调的滤波器,使之在图像处理中自适应控制相位信息和方向性.文献[7-10]使用了双树小波滤波器来获得复小波系数的实部和虚部,并成功地用之于数字图像处理.其后,文献[11-12]发现文献[7-10]构造的双树小波形成了一个近似的希尔伯特变换对,基于这一发现,研究了近似构成希尔伯特变换对的二进小波基的设计过程.从那以后,小波的希尔伯特变换引起了越来越多的研究人员的关注.

文献[13]基于 B-样条分解定理提出了一种巧妙的方法构造小波的希尔伯特变换对.文献[14]研究了构成希尔伯特变换对的两个小波对应的尺度函数需要满足的相位条件.进而,文献[15]研究了双正交小波基的希尔伯特变换对的构造.既然小波的希尔伯特变换如此重要,那么,相对于小波本身,小波的希尔伯特变换是否在光滑性、衰减性、对称性和消失矩等方面也具有良好的性质?它们的表现是否不同于小波本身?小波对应的尺度函数的希尔伯特变换的表现如何?文献[16]试图解决这些问题,并证明了:在一定的光滑性和衰减性条件下,如果小波 ψ 具有 n 阶消失矩,那么小波的希尔伯特变换 $H\psi$ 具有 $n+1$ 阶的衰减性,并具有 n 阶消失矩,这一结论是对一般的小波给出的.鉴于 B-样条小波的优良性质,我们好奇 B-样条小波的希尔伯特变换是否具有更特殊的性质.考虑到消失矩在小波中的应用尤其重要,本文重点研究 3 阶 B-样条小波的希尔伯特变换的消失矩性质.

1 预备知识

在本节中,我们将介绍一些必要的记号和预备知识.尽管希尔伯特变换可以定义在一般的 $L^p(1 \leq p \leq \infty)$ 空间中,本文主要讨论平方可积函数空间 $L^2(\mathbb{R})$ 上的希尔伯特变换.即记 f 的二范数为

$$\|f\|_2 = \left(\int_{\mathbb{R}} |f(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}$$

而 $L^2(\mathbb{R}) = \{f: \|f\|_2 < \infty\}$. 对 $\forall f \in L^2(\mathbb{R})$, f 的希尔伯特变换在 $x \in \mathbb{R}$ 处定义为

$$Hf(x) = \frac{1}{\pi} \cdot p.v. \int_{\mathbb{R}} \frac{f(t)}{x-t} dt = \frac{1}{\pi} \lim_{\substack{\epsilon \rightarrow 0^+ \\ N \rightarrow \infty}} \int_{\epsilon \leq |x-t| \leq N} \frac{f(t)}{x-t} dt \quad (1)$$

其中 $p.v.$ 表示柯西主值.同时注意到

$$\|f\|_1 = \int_{\mathbb{R}} |f(x)| dx \quad \|f\|_{\infty} = \sup\{|f(x)|: x \in \mathbb{R}\}$$

可类似地定义

$$L^1(\mathbb{R}) = \{f: \|f\|_1 < \infty\} \quad L^{\infty}(\mathbb{R}) = \{f: \|f\|_{\infty} < \infty\}$$

沿用文献[13]的记号,有 $\|f\|_{1,\infty} = \|f\|_1 + \|f'\|_{\infty}$.

如果 ψ 的二进伸缩和平移 $\{2^{\frac{j}{2}}\psi(2^j x - k): j, k \in \mathbb{Z}\}$ 构成了 $L^2(\mathbb{R})$ 的一族规范正交基,则我们称函数 ψ 是一个小波^[16].有时候,我们亦会减弱其正交性为双正交性,本文主要讨论的 B-样条小波即为一种双正交小波.

如果对任意整数 $0 \leq k < n$, 有 $\int_{\mathbb{R}} x^k f(x) dx = 0$ 但 $\int_{\mathbb{R}} x^n f(x) dx \neq 0$, 则称函数 f 具有 n 阶 ($n \geq 1$) 消失矩^[17].消失矩在小波的诸多性质中占据非常重要的位置.事实上,由于它如此重要,一些作者甚至将它写入了小波的定义,比如文献[16]定义了一个 r 阶小波:假设 $r \in \mathbb{N}$, 一个 r 阶小波是指任意复值函数 $\psi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$, 使得 ψ 及其直到 r 阶的导数都属于 $L^{\infty}(\mathbb{R})$, 且满足如下两个条件:

(i) ψ 及其直到 r 阶导数快速衰减;

(ii) 对 $0 \leq q \leq r$, 有 $\int_{\mathbb{R}} x^q \psi(x) dx = 0$.

2 3 阶 B-样条小波的分片多项式表示

B-样条小波有两种常见的表达方式^[18]. 第一种是利用等距节点且相邻节点之间距离为 1 的基数 B-样条函数, 将 m 阶等距节点的基数 B-样条函数用 N_m 表示, 则 m 阶 B-样条构造小波 ψ_m 可表示为: $\psi_m(x) = \sum_n q_n N_m(2x - n)$, 其中系数

$$q_n = \frac{(-1)^n}{2^{m-1}} \sum_{l=0}^m \binom{m}{l} N_{2m}(n+1-l) \quad n = 0, 1, \dots, 3m-2$$

另一种表达方式是利用特征函数的累次积分, 即

$$\psi_m(x) = \frac{1}{(2m-1)!} \sum_{j=0}^{4m-3} (-1)^j (P_m(4m-3))_j \cdot \int_0^x dx_1 \int_0^{x_1} dx_2 \cdots \int_0^{x_{m-2}} \chi_{[0, \frac{1}{2})} \left(x_{m-1} - \frac{j}{2}\right) dx_{m-1} \quad (2)$$

其中 $P_m(4m-3)$ 可由递推关系

$$\begin{cases} P(0) = \{\delta_{j,0}\} \\ (P(n+1))_j = L(n, j) (P(n))_j + R(n, j-1) (P(n))_{j-1} \end{cases}$$

得到. 这里的 $4m-3$ 表示从 0 开始算起, P_m 能取到的最后一个分量数, 即 P_m 的实际长度为 $4m-2$. 这里的 $L(n, j)$ 和 $R(n, j-1)$ 为待选定的分段函数. 我们选取和文献[15]一样的 $L(n, j)$ 和 $R(n, j-1)$, 即

$$\begin{aligned} L(n, j) &= \begin{cases} j+1 & 0 \leq n < 2m-2 \\ 1 & n \geq 2m-2 \end{cases} \\ R(n, j-1) &= \begin{cases} n-j+2 & 0 \leq n < 2m-2 \\ 1 & n \geq 2m-2 \end{cases} \end{aligned}$$

当 $m=3$ 时可计算得到 $P_3(9) = \{1 \quad 31 \quad 206 \quad 626 \quad 1056 \quad 1056 \quad 626 \quad 206 \quad 31 \quad 1\}$. 根据(2)式的定义, 我们得到 3 阶 B-样条小波的表达式为

$$\psi_3(x) = \frac{1}{5!} \sum_{j=0}^9 (-1)^j (P_3(9))_j \times \int_0^x dx_1 \int_0^{x_1} \chi_{[0, \frac{1}{2})} \left(x_2 - \frac{j}{2}\right) dx_2 \quad (3)$$

由(3)式及 $P_3(9)$ 可以计算得到

$$\psi_3(x) = \frac{1}{240} \begin{cases} 0 & x \in (-\infty, 0) \\ x^2 & x \in [0, 0.5) \\ -31x^2 + 32x - 8 & x \in [0.5, 1) \\ 206x^2 - 442x + 229 & x \in [1, 1.5) \\ -626x^2 + 2054x - 1643 & x \in [1.5, 2) \\ 1056x^2 - 4674x + 5085 & x \in [2, 2.5) \\ -1056x^2 + 5886x - 8115 & x \in [2.5, 3) \\ 626x^2 - 4206x + 7032 & x \in [3, 3.5) \\ -206x^2 + 1618x - 3169 & x \in [3.5, 4) \\ 31x^2 - 278x + 623 & x \in [4, 4.5) \\ -x^2 + 10x - 25 & x \in [4.5, 5) \\ 0 & x \in [5, \infty) \end{cases} \quad (4)$$

由(4)式可见, 3 阶 B-样条小波 ψ_3 是一个紧支撑的分片多项式, 支撑在 10 个区间长度为 0.5 的子区间上, 在每个子区间内的表达式都是二次函数. 用 $\psi_{3,k}(x)$ 表示 ψ_3 在第 k 个区间上的表达式, 即 $\psi_{3,k}(x) = a_3(k)x^2 + b_3(k)x + c_3(k)$ ($k=1, 2, \dots, 10$). 利用这一分段多项式的表达式, 我们可以确认一个已知的事实: 3 阶 B-样条小波具有 3 阶消失矩^[19].

3 3 阶 B-样条小波的希尔伯特变换

在本节中, 我们将基于 3 阶 B-样条小波的分片多项式形式来给出其希尔伯特变换的表达式. 进一步计

算 3 阶 B-样条小波的希尔伯特变换的消失矩. 结果表明, 3 阶 B-样条小波的希尔伯特变换比 3 阶 B-样条小波具有更高的消失矩.

3.1 3 阶 B-样条小波希尔伯特变换的表达式

由希尔伯特变换的定义可知, 3 阶 B-样条小波的希尔伯特变换为

$$H\psi_3(x) = \frac{1}{\pi} p.v. \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\psi_3(t)}{x-t} dt$$

将 ψ_3 的表达式代入, 有

$$H\psi_3(x) = \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^{10} p.v. \int_{\frac{k-1}{2}}^{\frac{k}{2}} \frac{\psi_{3,k}(t)}{x-t} dt \quad (5)$$

接下来探讨(5)式中的积分部分.

$$\begin{aligned} p.v. \int_{\frac{k-1}{2}}^{\frac{k}{2}} \frac{\psi_{3,k}(t)}{x-t} dt &= p.v. \int_{\frac{k-1}{2}}^{\frac{k}{2}} \frac{a_3(k)t^2 + b_3(k)t + c_3(k)}{x-t} dt = \\ &= -\frac{1}{2} \left[a_3(k)x + \frac{a_3(k)}{2} \left(k - \frac{1}{2} \right) + b_3(k) \right] + (a_3(k)x^2 + b_3(k)x + c_3(k)) \left(\ln \left| x - \frac{k-1}{2} \right| - \ln \left| x - \frac{k}{2} \right| \right) \end{aligned} \quad (6)$$

将(6)式代入(5)式, 得

$$H\psi_3(x) = -\frac{1}{2\pi} \sum_{k=1}^{10} \left[a_3(k)x + \frac{a_3(k)}{2} \left(k - \frac{1}{2} \right) + b_3(k) \right] + \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^{10} \psi_{3,k}(x) \left(\ln \left| x - \frac{k-1}{2} \right| - \ln \left| x - \frac{k}{2} \right| \right)$$

根据计算发现 $\sum_{k=1}^{10} a_3(k) = 0$, $\sum_{k=1}^{10} b_3(k) = 0$ 且 $\sum_{k=1}^{10} ka_3(k) = 0$, 则 3 阶 B-样条小波的希尔伯特变换为

$$H\psi_3(x) = \frac{1}{\pi} \sum_{k=0}^{10} [\psi_{3,k+1}(x) - \psi_{3,k}(x)] \ln \left| x - \frac{k}{2} \right|$$

为统一性起见, 定义 $\psi_{3,0}(x) = \psi_{3,11}(x) = 0$. 经过简单的计算发现, 3 阶 B-样条小波的第 $k+1$ 段与第 k 段之间有以下关系:

$$\psi_{3,k+1}(x) - \psi_{3,k}(x) = \frac{(-1)^k (Q_3)_k}{5! \times 2!} \left(x - \frac{k}{2} \right)^2 \quad k = 0, \dots, 11$$

其中

$$Q_3 = \{1 \quad 32 \quad 237 \quad 832 \quad 1682 \quad 2112 \quad 1682 \quad 832 \quad 237 \quad 32 \quad 1\}$$

因此得到 3 阶 B-样条小波的希尔伯特变换表达式为

$$H\psi_3(x) = \frac{1}{240\pi} \sum_{k=0}^{10} (-1)^k (Q_3)_k \left(x - \frac{k}{2} \right)^2 \ln \left| x - \frac{k}{2} \right| \quad (7)$$

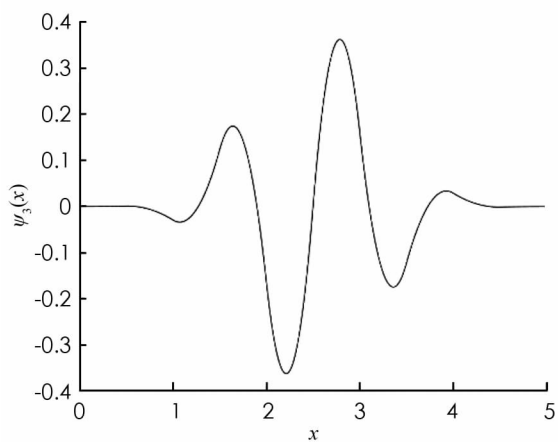


图 1 3 阶 B-样条小波的图像

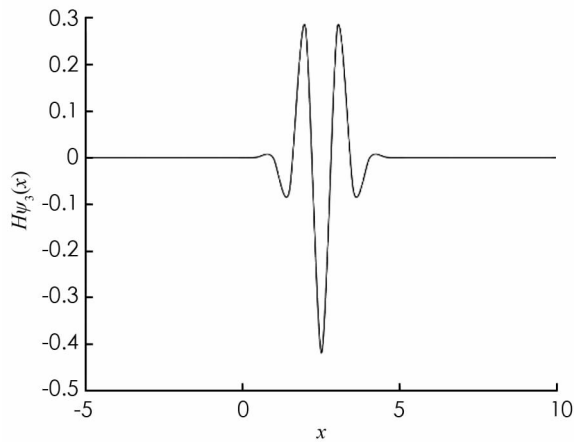


图 2 3 阶 B-样条小波的希尔伯特变换的图像

在图 1 和图 2 中, 我们分别给出了 3 阶 B-样条小波和 3 阶 B-样条小波的希尔伯特变换的图像. 可以看到, 它们具有可比较的光滑性和对称性, 3 阶 B-样条小波关于其对称中心是反对称的, 而它的希尔伯特变换关于其对称中心是对称的. 另外, 我们知道, 一个紧支撑的函数的希尔伯特变换不再具有有限支撑,

因此在下一小节重点关注 3 阶 B-样条小波的希尔伯特变换的消失矩性质.

3.2 3 阶 B-样条小波希尔伯特变换的消失矩

将(7) 式代入消失矩的定义, 得

$$\begin{aligned} V_{H\psi_3}(i) &= \int_{-\infty}^{+\infty} x^i H\psi_3(x) dx = \\ &= \frac{1}{240\pi} \sum_{k=0}^{10} (-1)^k (Q_3)_k \int_{-\infty}^{\infty} x^i \left(x - \frac{k}{2}\right)^2 \ln \left|x - \frac{k}{2}\right| dx = \\ &= \frac{1}{240\pi} \lim_{\substack{\epsilon \rightarrow 0^+ \\ N \rightarrow +\infty}} \sum_{k=0}^{10} (-1)^k (Q_3)_k \int_{-N}^{\frac{k}{2}-\epsilon} x^i \left(\frac{k}{2} - x\right)^2 \ln \left(\frac{k}{2} - x\right) dx + \\ &= \frac{1}{240\pi} \lim_{\substack{\epsilon \rightarrow 0^+ \\ N \rightarrow +\infty}} \sum_{k=0}^{10} (-1)^k (Q_3)_k \int_{\frac{k}{2}+\epsilon}^N x^i \left(x - \frac{k}{2}\right)^2 \ln \left(x - \frac{k}{2}\right) dx \end{aligned} \quad (8)$$

对(8) 式第三行的积分进行积分变量替换, 令 $t = \frac{k}{2} - x$, 我们有

$$\int_{-N}^{\frac{k}{2}-\epsilon} x^i \left(\frac{k}{2} - x\right)^2 \ln \left(\frac{k}{2} - x\right) dx = \int_{\epsilon}^N \left(\frac{k}{2} - t\right)^i t^2 \ln t dt \quad (9)$$

对(8) 式第四行的积分进行积分变量替换, 令 $t = -\frac{k}{2} + x$, 我们有

$$\int_{\frac{k}{2}+\epsilon}^N x^i \left(x - \frac{k}{2}\right)^2 \ln \left(x - \frac{k}{2}\right) dx = \int_{\epsilon}^N \left(\frac{k}{2} + t\right)^i t^2 \ln t dt \quad (10)$$

将(9), (10) 式代入(8) 式, 得

$$V_{H\psi_3}(i) = \frac{1}{240\pi} \lim_{\substack{\epsilon \rightarrow 0^+ \\ N \rightarrow +\infty}} \sum_{k=0}^{10} (-1)^k (Q_3)_k \int_{\epsilon}^N \left[\left(\frac{k}{2} - t\right)^i + \left(\frac{k}{2} + t\right)^i \right] (t^2 \ln t) dt \quad (11)$$

当 r 是偶数时, 根据二项式展开容易得到

$$\left(\frac{k}{2} - t\right)^i + \left(\frac{k}{2} + t\right)^i = 2 \sum_{r=0}^i \binom{i}{r} \left(\frac{k}{2}\right)^{i-r} t^r$$

所以(11) 式变为

$$\begin{aligned} V_{H\psi_3}(i) &= \frac{1}{240\pi} \lim_{\substack{\epsilon \rightarrow 0^+ \\ N \rightarrow +\infty}} \sum_{k=0}^{10} (-1)^k (Q_3)_k \int_{\epsilon}^N 2 \sum_{r=0}^i \binom{i}{r} \left(\frac{k}{2}\right)^{i-r} (t^{r+2} \ln t) dt = \\ &= \frac{1}{240\pi} \lim_{\substack{\epsilon \rightarrow 0^+ \\ N \rightarrow +\infty}} \sum_{r=0}^i \left(\sum_{k=0}^{10} k^{i-r} (-1)^k (Q_3)_k \right) \binom{i}{r} 2^{-i+r+1} \int_{\epsilon}^N t^{r+2} \ln t dt = \\ &= \frac{1}{\pi} \lim_{\substack{\epsilon \rightarrow 0^+ \\ N \rightarrow +\infty}} \sum_{r=0}^i (K\mathbf{h}_3)_{i-r+1} \binom{i}{r} 2^{-i+r+1} \int_{\epsilon}^N t^{r+2} \ln t dt \end{aligned} \quad (12)$$

其中矩阵 $\mathbf{K}$ 定义为 $\mathbf{K}(i+1, k+1) = k^i (i = 0, 1, \dots; k = 0, 1, \dots, 10)$, $\mathbf{h}_3$ 是一个列向量, 它的第 $k+1$ 分量为 $\mathbf{h}_3(k+1) = \frac{(-1)^k}{240} (Q_3)_k$. 经计算, $K\mathbf{h}_3 = [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 48 \ 1680 \ \dots]^T$, 注意到这个向量从第 7 项开始才不为 0, 而后面的积分为一个多项式与对数函数乘积的积分, 总不等于 0. 因此, 当 $i-r+1 \geq 7$ 时 $V_{H\psi_3}(i) \neq 0$. 注意到 r 从 0 开始计数, 可以得到 $H\psi_3(x)$ 有 6 阶消失矩.

文献[13] 证明了一个重要的定理, 指出若一个可微的小波 ψ 有 n 阶消失矩, 同时假设 $\|\psi\|_{1,\infty}$, $\|x^{n+1}\psi(x)\|_{1,\infty}$ 以及 $\|x^n\psi(x)\|_1$ 都有限, 则 $H\psi(x)$ 也有 n 阶消失矩, 且满足

$$|H\psi(x)| \leq \frac{C}{1+|x|^{n+1}} (\|\psi\|_{1,\infty} + \|x^{n+1}\psi(x)\|_{1,\infty} + \|x^n\psi(x)\|_1) = O(|x|^{-n-1})$$

从本文的结果来看, 3 阶 B-样条小波 ψ_3 满足了此定理的所有条件, 不过由于 3 阶 B-样条小波本身的特性, 它的希尔伯特变换具有 6 阶消失矩. 为什么会有这一现象发生是我们正进一步思考的问题.

4 总 结

本文首先给出了一个具体的 3 阶 B-样条小波的分片多项式表达形式, 然后得到了 3 阶 B-样条小波的希尔伯特变换的一个简洁的表达式, 最后计算了 3 阶 B-样条小波的希尔伯特变换的消失矩. 从图像上可以看到, 3 阶 B-样条小波的希尔伯特变换具有和 3 阶 B-样条小波类似的光滑性, 同时将 3 阶 B-样条小波的反对称性变为了对称性. 由于紧支撑函数的希尔伯特变换不可能具有有限支撑, 我们知道 3 阶 B-样条小波经过希尔伯特变换后付出的代价是衰减性降低了, 但从本文的结果可以看到, 这一代价的收益便是它具有了更高的消失矩. 这一发现对构成希尔伯特变换对的小波的构造具有启发意义.

参考文献:

- [1] MALLAT S G. Multiresolution Approximations and Wavelet Orthonormal Bases of $L^2(\mathbb{R})$ [J]. Transactions of the American Mathematical Society, 1989, 315(1): 69-87.
- [2] UNSER M A. Ten Good Reasons for Using Spline Wavelets [J]. Proceedings of the SPIE-The International Society for Optical Engineering, 1997, 3169: 422-431.
- [3] 杨建翠. 基于四元数离散 Fourier 变换的医学图像融合算法 [J]. 西南师范大学学报(自然科学版), 2020, 45(2): 31-39.
- [4] 高玉潼, 雷为民, 吴 微. 基于对称差分算法的快速人脸运动图像分割方法 [J]. 西南大学学报(自然科学版), 2020, 42(7): 184-193.
- [5] 杭 立, 车 进, 宋培源, 等. 基于机器学习和图像处理技术的病虫害预测 [J]. 西南大学学报(自然科学版), 2020, 42(1): 134-141.
- [6] FREEMAN W T, ADELSON E H. The Design and Use of Steerable Filters [J]. IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence, 1991, 13(9): 891-906.
- [7] KINGSBURY N. Image Processing with Complex Wavelets [J]. Philosophical Transactions of the Royal Society of London, 1999, 357(1760): 2543-2560.
- [8] KINGSBURY N. A Dual-Tree Complex Wavelet Transform with Improved Orthogonality and Symmetry Properties [C]// Proceedings IEEE International Conference Image Processing, Vancouver, BC, Canada, 2000: 375-378.
- [9] KINGSBURY N. Complex Wavelets for Shift Invariant Analysis and Filtering of Signals [J]. Applied and Computational Harmonic Analysis, 2001, 10(3): 234-253.
- [10] SELESNICK I W, BARANIUK R G, KINGSBURY N. The Dual-Tree Complex Wavelet Transform [J]. IEEE Signal Processing Magazine, 2005, 22(6): 123-151.
- [11] SELESNICK I W. Hilbert Transform Pairs of Wavelet Bases [J]. IEEE Signal Processing Letters, 2001, 8(6): 170-173.
- [12] SELESNICK I W. The Design of Approximate Hilbert Transform Pairs of Wavelet Bases [J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 2002, 50(5): 1144-1152.
- [13] CHAUDHURY K N, UNSER M. Construction of Hilbert Transform Pairs of Wavelet Bases and Gabor-Like Transforms [J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 2009, 57(9): 3411-3425.
- [14] OZKARAMANLI H, YU R. On the Phase Condition and Its Solution for Hilbert Transform Pairs of Wavelet Bases [J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 2003, 51(12): 3293-3294.
- [15] YU R, OAKARAMANLI H. Hilbert Transform Pairs of Biorthogonal Wavelet Bases [J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 2006, 54(6): 2119-2125.
- [16] GASQUET C, WITOMSKI P, RYAN R. Fourier Analysis and Applications: Filtering, Numerical Computation, Wavelets [M]. New York: American Statistical Association, 1999.
- [17] CHAUDHURY K N, UNSER M. On the Hilbert Transform of Wavelets [J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 2011, 59(4): 1890-1894.
- [18] CHUI C K. An Introduction to Wavelets [M]. San Diego: Academic Press, 1992: 194.
- [19] UNSER M, BLU T. Wavelet Theory Demystified [J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 2003, 51(2): 470-483.