第 46 卷 第 12 期 西南师范大学学报(自然科学版) 2021 年 12 月
Vol. 46 No. 12 Journal of Southwest China Normal University (Natural Science Edition) Dec. 2021

DOI:10.13718/j.cnki.xsxb.2021.12.021

认识线性代数中的化归思想，培养学生的化归意识①

王 磊[1]， 刘 寅[2]， 晏燕雄[3]

1. 云南大学 数学与统计学院，昆明 650091；2. 云南师范大学 数学学院，昆明 650500；
3. 西南大学 数学与统计学院，重庆 400715

摘要：线性代数是高等院校理、工、经管各专业的基础课程之一，不仅在理论，而且在现实生活中都有着广泛而重要的作用，其中蕴涵着丰富的数学思想和方法，为学生学好后续课程起到很好的促进作用. 以线性代数中的行列式计算和向量组的线性相关性这两方面的内容为例，探讨数学中的化归思想在线性代数教学中的具体体现，引导和培养学生的化归意识，进而提高学生的数学素养.

关 键 词：线性代数；化归思想；行列式；线性相关性

中图分类号：G642.0 **文献标志码：A** **文章编号：**1000-5471(2021)12-0144-05

Discover the Thought of Transformation in Linear Algebra and Cultivate the Transformation Consciousness of Students

WANG Lei[1]， LIU Yin[2]， YAN Yanxiong[3]

1. School of Mathematics and Statistics, Yunnan University, Kunming 650091, China;
2. Department of Mathematics, Yunnan Normal University, Kunming 650500, China;
3. School of Mathematics and Statistics, Southwest University, Chongqing 400715, China

Abstract: Linear algebra is one of the basic courses for all kinds of majors in science, engineering and economic management in institutions of higher learning, it plays an extensive and important role not only in theory, but also in practice. It contains rich mathematical ideas and methods, and these ideas and methods play a good effect in promoting students to learn subsequent courses. With the examples of the determinant calculation and the linear dependence of a vector group in linear algebra, this paper mainly discussed the concrete embodiment of thought of transformation in the teaching of linear algebra, guided and cultivated the transformation consciousness and then improved the mathematical attainment of students.

Key words: linear algebra; thought of transformation; determinant; linear dependence

瑞典数学家 Lars Garding 曾说过，如果没有线性代数，任何数学和初等教程都进行不下去. 线性代数作为大学数学中的一门重要理论课，在很多其他学科中都有重要应用[1-2]. 然而由于线性代数的基本概念

---

① 收稿日期：2021-06-24
基金项目：云南省应用基础研究项目(202101AT070023)；云南大学教研项目(SJYZKC202110，XJGXK202104)；中央高校专项基金(XDJK2019C116，XDJK2019B030)；西南大学教改项目(2018JY061).
作者简介：王 磊，讲师，博士，主要从事群表示论与代数组合的研究.
通信作者：刘 寅，讲师，博士.

和基本理论具有抽象性、逻辑性和思辨性，学生在学习线性代数的过程中通常都会感到很困难. 因此，探索和改进传统教学模式，寻找更适应当代大学生需求的教学方法，成为线性代数课程教学研究的重要问题[3-6].

线性代数课程中蕴涵着丰富的数学思想和方法，如分类法、变换法、公理化思想、类比法和化归思想等，这些思想和方法往往以隐形的方式出现，成为联系各方面数学知识的纽带，其中化归思想更是数学问题解决过程中必须掌握的一种思维方式和工具. 化归，即转化和归结，就是在研究和解决有关数学问题时采用某种手段将问题通过变换使之转化，例如化生疏为熟悉，化复杂为简单，化抽象为直观，化含糊为明确等，进而解决问题的一种思想方法. 在线性代数的教学过程中，适当融入化归思想，使学生在解决实际问题时知其然，并且知其所以然，从而达到教学的基本目标.

本文将利用化归思想来处理线性代数中的重要问题，让学生不仅在知识体系上加深理解，还从认知层面上提高对数学本质、数学思想方法的领会和感悟.

1　线性代数课程中隐含的化归思想

1.1　行列式计算中的化归思想

行列式的计算是线性代数课程中的重要内容，也是学习中的一个难点. 计算行列式的方法有多种[7]，而这些方法大多建立在行列式性质的基础之上. 行列式的性质不仅是计算行列式的强有力工具，还可依靠它有效地实现问题的化归. 例如，在行列式按行(列)展开法则中，有一个很重要的结论(本文以按行展开为例进行说明)：

例 1　设 $D_n = |(a_{ij})_n|$，则

$$\begin{cases} a_{i1}A_{j1} + a_{i2}A_{j2} + \cdots + a_{in}A_{jn} = D_n & i = j \\ a_{i1}A_{j1} + a_{i2}A_{j2} + \cdots + a_{in}A_{jn} = 0 & i \neq j \end{cases} \tag{1}$$

(1) 式中的第一个等式即行列式按行展开法则，其证明依据是行列式的性质. 在线性代数的大多数教材中[8-10]，(1) 式的第二个等式的证明通常直接采用将行列式 D_n 第 j 行元素换成第 i 行对应的元素，然后按第 j 行展开的方法，此法虽简单，但比较抽象，数学基础弱的学生难以理解其代换原理，从而对学习后续课程造成一定的困扰. 事实上，我们可以利用化归思想，将其归结为对行列式性质的探究：利用行列式的性质，将行列式第 i 行加到第 j 行，行列式的值不变，此时第 j 行的每个元素都是两数之和，所以该行列式又可以拆分为两个行列式的和，利用行列式按行展开定理，拆分后的第二个行列式按第 j 行展开，得到

$$D_n = D_n + (a_{i1}A_{j1} + a_{i2}A_{j2} + \cdots + a_{in}A_{jn})$$

因此

$$a_{i1}A_{j1} + a_{i2}A_{j2} + \cdots + a_{in}A_{jn} = 0$$

从而(1) 式的第二个等式得证.

1.2　线性相关性问题中的化归思想

向量组的线性相关和线性无关统称为向量组的线性相关性，线性相关性在线性代数中起到了举足轻重的作用，它与行列式、矩阵、线性方程组的解以及线性变换等都有着重要联系，因此也受到了广泛的关注[11-13]. 将化归思想用于线性相关性的证明，不但能够帮助学生深刻理解向量组的线性相关性，而且能够帮助学生更好地理解线性代数中各部分知识的联系，帮助学生理清线性代数的基本框架. 下面是线性代数中的一道经典习题：

例 2[9]　若向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s$ 线性无关，试证向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_1 + \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_1 + \boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + \boldsymbol{\alpha}_s$ 线性无关.

例 2 的证明并不难，是对线性无关定义的考察. 设

$$k_1\boldsymbol{\alpha}_1 + k_2(\boldsymbol{\alpha}_1 + \boldsymbol{\alpha}_2) + \cdots + k_s(\boldsymbol{\alpha}_1 + \boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + \boldsymbol{\alpha}_s) = 0$$

即

$$(k_1 + k_2 + \cdots + k_s)\boldsymbol{\alpha}_1 + (k_2 + \cdots + k_s)\boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + k_s\boldsymbol{\alpha}_s = 0$$

而由向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s$ 线性无关可知，上述等式左端系数全为0. 于是线性相关性的问题可被转化为判断齐次线性方程组是否只有零解.

2 培养学生的化归意识

线性代数是大学数学中的基础理论课，其教学目标是：

① 使学生获得线性代数的基本知识和基本理论，掌握必要的数学运算技能；

② 使学生运用数学方法分析问题和解决问题的能力得到进一步培养、训练和提高.

但在教学过程中，教师和学生们的目标往往放在目标 ①，掌握基本知识理论，会解题即可. 要达到教学目标 ②，教师需要在教学过程中对重要的解题方法和思维持续灌输、不断提示、持续训练.

2.1 在教学过程中引入化归方法，认识化归思想

化归思想是数学中的基本思想，却也是最常被忽略的思想，因此，要培养学生的化归意识，就需要坚持在课堂教学中不断提出化归思想，明确告诉学生获取知识、解决问题的方法是化归方法. 例如，在学习行列式的性质时，可以明确地告诉学生，根据行列式的性质“行列式与它的转置行列式相等”，行列式的行与列具有相同的性质，只需讨论行列式的行性质即可. 而行列式的性质“行列式某一行元素的公因子可以提出来”“若行列式某一行的元素都是两数之和，则这个行列式等于两个行列式的和” 等，都体现了化繁为简、化难为易的思想，这些都是化归思想. 在求解一般线性方程组的解，即利用高斯消元法的过程中，也在不断利用化归思想：将方程组的问题转化为矩阵的问题，整个消元的过程体现了从一般到特殊、从复杂到简单的转化.

教师在授课中通过持续向学生灌输化归思想，不但加深了学生对知识点的认识和理解，而且使学生在潜移默化中认识了化归思想，感受到了化归思想的作用与价值.

2.2 从错题中分析、学会化归方法

在学生有了化归意识之后，教师需要趁热打铁，从学生易错的习题中选取具有代表性的题目，分析利用化归思想来解题的优点.

例 3[10] 已知四阶行列式 $D=\begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 & 2 \\ -5 & 1 & 3 & -4 \\ 2 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -5 & 3 & -3 \end{vmatrix}$，$D$ 中(i,j)元的代数余子式记作 A_{ij}，求 $A_{31}+3A_{32}-2A_{33}+2A_{34}$.

对于初学线性代数的学生而言，解决此问题的方法很直接：分别求出 $A_{31}, A_{32}, A_{33}, A_{34}$ 这 4 个代数余子式，然后求 $A_{31}+3A_{32}-2A_{33}+2A_{34}$ 的值. 然而此方法存在以下两个缺陷：

① 需求 4 个代数余子式，即求 4 个三阶行列式，计算量偏大，耗时多；

② 所求代数余子式 A_{ij} 与相应的余子式 M_{ij} 相差$(-1)^{i+j}$ 倍，学生计算时经常忽略它们的倍数关系，从而代数余子式符号容易算错，使计算结果出错.

事实上，例 3 的解题方法依然可以归结为利用行列式的性质计算行列式. 易知行列式

$$d=\begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 & 2 \\ -5 & 1 & 3 & -4 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \\ 1 & -5 & 3 & -3 \end{vmatrix}$$

与原行列式 D 第 3 行元素具有相同的代数余子式，这时取 $b_1=1$，$b_2=3$，$b_3=-2$，$b_4=2$，则有

$$A_{31}+3A_{32}-2A_{33}+2A_{34}=d=\begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 & 2 \\ -5 & 1 & 3 & -4 \\ 1 & 3 & -2 & 2 \\ 1 & -5 & 3 & -3 \end{vmatrix}$$

于是例3中求4个三阶行列式代数和的问题完全可以转化为计算1个四阶行列式，这种化繁为简的思想方法能够简化计算，计算结果也更加准确. 学生通过对这两种方法的比较，不仅能对题目本身产生更深刻的理解，而且对化归思想和方法也会有更全面的认识和感悟.

2.3　从典型问题中探究、应用化归方法

在教学过程中，让学生自己应用化归思想去探索知识形成的过程，去解决典型问题，不仅能进一步训练和提高学生分析问题和解决问题的能力，而且有助于培养学生学习的热情.

在线性相关性的问题中，一个比较有趣的结论是：如果向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 线性无关，那么向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s+\boldsymbol{\alpha}_1$ 当 s 为奇数时线性无关，当 s 为偶数时线性相关[12]. 关于此结论，可以引导学生获得如下一个密切相关的性质：

性质 1　当 s 为奇数时，向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 与向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s+\boldsymbol{\alpha}_1$ 等价；反之，当 s 为偶数时，向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 与向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s+\boldsymbol{\alpha}_1$ 不等价.

证　首先我们观察到，不论 s 为何值，向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s+\boldsymbol{\alpha}_1$ 都能由向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 线性表示，因此问题可以归结为讨论向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 是否可由向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s+\boldsymbol{\alpha}_1$ 线性表示.

当 s 为奇数时，等式(2) 成立：

$$\begin{cases}\boldsymbol{\alpha}_1=\dfrac{1}{2}[(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2)-(\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3)+\cdots-(\boldsymbol{\alpha}_{s-1}+\boldsymbol{\alpha}_s)+(\boldsymbol{\alpha}_s+\boldsymbol{\alpha}_1)]\\ \boldsymbol{\alpha}_2=\dfrac{1}{2}[(\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3)-(\boldsymbol{\alpha}_3+\boldsymbol{\alpha}_4)+\cdots-(\boldsymbol{\alpha}_s+\boldsymbol{\alpha}_1)+(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2)]\\ \vdots\\ \boldsymbol{\alpha}_{s-1}=\dfrac{1}{2}[(\boldsymbol{\alpha}_{s-1}+\boldsymbol{\alpha}_s)-(\boldsymbol{\alpha}_s+\boldsymbol{\alpha}_1)+\cdots-(\boldsymbol{\alpha}_{s-3}+\boldsymbol{\alpha}_{s-2})+(\boldsymbol{\alpha}_{s-2}+\boldsymbol{\alpha}_{s-1})]\\ \boldsymbol{\alpha}_s=\dfrac{1}{2}[(\boldsymbol{\alpha}_s+\boldsymbol{\alpha}_1)-(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2)+\cdots-(\boldsymbol{\alpha}_{s-2}+\boldsymbol{\alpha}_{s-1})+(\boldsymbol{\alpha}_{s-1}+\boldsymbol{\alpha}_s)]\end{cases}\tag{2}$$

因此向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 可由向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s+\boldsymbol{\alpha}_1$ 线性表示，从而这两个向量组等价.

当 s 为偶数时，由于向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s+\boldsymbol{\alpha}_1$ 线性相关，其秩必小于向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 的秩 s. 而等价的向量组其秩也相等，所以这两个向量组不等价. 性质 1 得证.

说明当 s 为偶数时，(2) 式显然不成立，但这不足以说明向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 一定不能由向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s+\boldsymbol{\alpha}_1$ 线性表示. 事实上，利用线性表示定义的方法来证明，其过程太繁琐，一般不可取. 在上述证明中，我们利用化归思想，将问题转化为对等价性质的分析，既能简化证明，又能加强学生对相关等价性质的理解和灵活运用.

进一步地，利用性质 1，还可以引导学生分析以下结论：

性质 2　当 s 为奇数时，向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 线性无关的充要条件是向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s+\boldsymbol{\alpha}_1$ 线性无关.

证　根据已知结论，该证明可以归结为证明当向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s+\boldsymbol{\alpha}_1$ 线性无关时，向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 也线性无关. 利用线性无关的定义，设

$$k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_s\boldsymbol{\alpha}_s=\mathbf{0}$$

由(2) 式化简整理得

$$\begin{aligned}\mathbf{0}=&(k_1+k_2-k_3+\cdots+k_{s-1}+k_s)(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2)+\\&(-k_1+k_2+k_3-\cdots-k_{s-1}+k_s)(\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3)+\cdots+\\&(-k_1+k_2-k_3+\cdots+k_{s-1}+k_s)(\boldsymbol{\alpha}_{s-1}+\boldsymbol{\alpha}_s)+\\&(k_1-k_2+k_3+\cdots-k_{s-1}+k_s)(\boldsymbol{\alpha}_s+\boldsymbol{\alpha}_1)\end{aligned}$$

再根据向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s+\boldsymbol{\alpha}_1$ 线性无关的条件，问题再一次被化归为判断齐次线性方程组是否只有零解，对方程组的系数矩阵进行初等行变换，得

$$\begin{pmatrix}1&1&-1&\cdots&1&-1\\-1&1&1&\cdots&-1&1\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots&\vdots\\-1&1&-1&\cdots&1&1\\1&-1&1&\cdots&-1&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&0&\cdots&0&0\\0&1&0&\cdots&0&0\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots&\vdots\\0&0&0&\cdots&1&0\\0&0&0&\cdots&0&1\end{pmatrix}$$

因为系数矩阵的秩等于未知量的个数，所以方程组只有零解，即 $k_1 = k_2 = \cdots = k_s = 0$，故向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s$ 线性无关. 综合可得，向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s$ 线性无关的充要条件是向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1 + \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_2 + \boldsymbol{\alpha}_3, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s + \boldsymbol{\alpha}_1$ 线性无关. 性质2得证.

3 结束语

事实上，作为数学研究中的基本思想之一，化归思想是应用最广泛的思想，但同时也是最容易被忽略的一种思想. 本文通过两类具体问题，展示了化归思想在处理问题时的应用技巧，并得到了一些有意义的结论. 希望通过这些例子，为学生学习提供一个明确的方向，培养学生用化归思想解决问题的意识，也希望在思想观念方面，尽可能转变线性代数在学生心中抽象难懂的观念，使学生们轻松、快捷地掌握线性代数知识，养成反思和独立学习的能力.

参考文献：

[1] 王 红，卢林燕，王 童. 航空安全事件知识图谱补全方法 [J]. 西南大学学报(自然科学版)，2020，42(11)：31-42.

[2] 史欣蕊，钱宇华，李飞江. 基于多角度空间结构的超多类簇聚类方法 [J]. 西南大学学报(自然科学版)，2020，42(11)：59-67.

[3] 郭聿琦，冯爱芳，王正攀. 关于基础课程教材的现代化处理 [J]. 高等数学研究，2010，13(1)：108-111.

[4] 阎昕明，田德路，张然然.《线性代数》课程混合式教学的设计与实施 [J]. 广东第二师范学院学报，2020，40(5)：106-112.

[5] 张 伟. 基于翻转课堂的大学生自主学习能力培养模式设计 [J]. 西南师范大学学报(自然科学版)，2020，45(8)：125-130.

[6] 张俊忠. 发生教学法在矩阵运算教学中的应用 [J]. 西南师范大学学报(自然科学版)，2020，45(10)：135-140.

[7] 时文芳. 求解行列式的若干方法 [J]. 当代教育实践与教学研究，2019(9)：73-74.

[8] 王萼芳，石生明. 高等代数 [M]. 5版. 北京：高等教育出版社，2019：49-52.

[9] 同济大学数学系. 工程数学：线性代数 [M]. 6版. 北京：高等教育出版社，2014：17-20.

[10] 赵树嫄. 经济应用数学基础(二)：线性代数 [M]. 5版. 北京：中国人民大学出版社，2017：18-20.

[11] 江 蓉，王守中. 向量组线性相关性的教学设计 [J]. 西南师范大学学报(自然科学版)，2017，42(4)：146-150.

[12] 周慧倩. 高等代数一道习题的推广与误区 [J]. 河南教育学院学报(自然科学版)，2020，29(3)：54-56.

[13] 李德琼，谢小良，王仲梅. 判断向量组线性相关性的若干方法 [J]. 湖南理工学院学报(自然科学版)，2021，34(1)：14-16.

责任编辑 廖 坤