DOI:10.13718/j.cnki.xsxb.2022.01.002

二阶共振哈密顿方程重周期解①

邢秀梅

伊犁师范大学 应用数学研究所,新疆 伊宁 835000

摘要: 考虑一类扰动共振 Hamiltonian 方程 $x''+g(x)=p(t, x, x')$ 多重周期解的存在性,其中:$g(x)$ 满足半线性条件;$p(t, x, y)$:$\mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ 有界,连续,关于第一个变量是 2π 周期的.利用时间映射的性质对变换后方程组的解的动力学行为进行分析,再结合 Poincaré-Birkhoff 扭转定理以及拓扑度理论,得到扰动共振 Hamiltonian 方程至少存在一个 2π 周期解和无穷多 $2m\pi$ 周期解.

关 键 词: 周期解;Poincaré-Birkhoff 扭转定理;拓扑度

中图分类号: O175.1 **文献标志码:** A **文章编号:** 1000-5471(2022)01-0008-07

Multiple Periodic Solutions for Second Order Equation at Resonance

XING Xiumei

Institute of Applied Mathematics, Yili Normal University, Yining Xinjiang 835000, China

Abstract: In this paper, the existence and multiplicity of periodic solutions have been discussed for perturbed Hamiltonian equation $x''+g(x)=p(t, x, x')$, where $g(x)$ satisfies semilinear condition; $p(t, x, y)$: $\mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ is continuous and bounded function with a 2π periodic dependence with respect to the first variation. With the properties of time map to analyze the motions of transformed equations, the existence for infinity of $2m\pi$ periodic solutions and 2π periodic solution have been shown with Poincare-Birkhoff theorem and topology degree theory respectively.

Key words: periodic solution; Poincare-Birkhoff theorem; topology degree

平面时变 Hamilton 周期系统的一个典型模型是 $x''+f(t, x)=0$,其中 $f(t, x) \in C^1(\mathbb{R}\times\mathbb{R}, \mathbb{R})$ 关于变量 t 是 2π 周期的.关于此系统周期解的存在性和重性的研究已开展了很多工作:关于半线性非奇异位

---

① 收稿日期:2020-05-01
基金项目:新疆维吾尔自治区自然科学基金项目(2019D01C336).
作者简介:邢秀梅,副教授,博士.主要从事 Hamiltonian 系统研究.

势的工作见文献[1-7]，关于奇异位势的工作见文献[8-11]，关于扰动方程的工作见文献[12-14]. 本文考虑二阶半线性共振 Hamilton 方程：

$$x''+g(x)=p(t,x,x') \tag{1}$$

其中 $g:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ 为连续函数，满足半线性条件

$$0<g_*=\liminf_{|x|\to\infty}\frac{g(x)}{x}\leqslant\limsup_{|x|\to\infty}\frac{g(x)}{x}=g^*<\infty \tag{2}$$

p 满足

$$p=p(t,x,y):\mathbb{R}\times\mathbb{R}^2\longrightarrow\mathbb{R} \tag{3}$$

有界、连续且关于第一个变量是 2π 周期的.

当 $p(t,x,y)=p(t)$ 时，方程(1) 即为 Duffing 方程：

$$x''+g(x)=p(t) \tag{4}$$

记 $x''+g(x)=0$ 满足 $x(0)=0$，$x'(0)=\sqrt{2e}$ 的解的轨线为 F_e，最小正周期为 $\tau(e)$. 令 $\tau(e)=\tau^+(e)+\tau^-(e)$，其中 $\tau^+(e)$，$\tau^-(e)$ 分别为解轨线 F_e 在右侧和左侧的时间. 文献[1] 在条件(2)、振动位势条件

$$\Delta\tau=\limsup_{e\to\infty}\tau(e)-\liminf_{e\to\infty}\tau(e)>0 \tag{5}$$

和全局李普希兹条件

$$|g(x)-g(y)|\leqslant L|x-y|\ (\text{其中 } L \text{ 为常数}) \tag{6}$$

下，证明方程(4) 至少存在一个 2π 周期解和无穷多次调和解. 文献[3] 将文献[1] 中的振动位势条件减弱为弱振动位势

$$\limsup_{e\to\infty}\sqrt{e}\left(\tau(e)-\frac{2m\pi}{n}\right)=+\infty,\ \liminf_{e\to\infty}\sqrt{e}\left(\tau(e)-\frac{2m\pi}{n}\right)=-\infty\qquad n,m\in\mathbb{N} \tag{7}$$

亦得到类似结论. 文献[4] 去掉李普希兹条件，增加弱振动位势条件和共振条件

$$\lim_{e\to\infty}\tau(e)=\frac{2m\pi}{n}\qquad n,m\in\mathbb{N} \tag{8}$$

得出方程(4) 至少存在一个 2π 周期解.

最近在条件

$$\lim_{|x|\to\infty}g(x)\mathrm{sgn}(x)=+\infty,\ \lim_{|x|\to\infty}\frac{G^{\frac{1}{2}}(x)}{g^2(x)}=0\left(\text{其中 } G(x)=\int_0^x g(s)\mathrm{d}s\right) \tag{9}$$

与条件

$$\left[\liminf_{e\to\infty}\tau(e),\ \limsup_{e\to\infty}\tau(e)\right]\setminus\left\{\frac{2\pi}{n},\ n\in\mathbb{N}\right\}\neq\varnothing \tag{10}$$

下，文献[5] 证明方程(1) 至少存在一个 2π 周期解. 注意条件(10) 排除了 $\tau(e)$ 的共振点. 一个自然的问题是：在半线性共振条件下，加怎样的条件能保证方程(1) 存在周期解. 本文结论如下.

定理 1　设条件(2)，(3)，(8) 以及(7) 满足，则方程(1) 至少存在一个 2π 周期解和无穷多 $2m\pi$ 周期解 $\{x_k(t)\}$ 满足 $\lim\limits_{k\to\infty}\max\limits_{t\in[0,2\pi]}(x_k^2(t)+\dot{x}_k^2(t))=\infty$.

为了证明定理 1，先给出一些引理.

引理 1[4]　设条件(2) 成立，则存在常数 $e_0>0$，使得当 $e>e_0$ 时，Γ_e 是一条包围原点的星形闭曲线.

引理 2[4]　设条件(2) 成立，M 为固定常数，对满足 $0\leqslant y-M\leqslant u\leqslant y\leqslant e$ 的 u 和 y，有

$$\int_{u}^{y} \frac{\mathrm{d}s}{\sqrt{G(e)-G(s)}}=O\left(\frac{1}{\sqrt{e}}\right)$$

引理3[4] 设条件(2)成立，M 为固定常数，如果 $A<B<A+M$，那么当 $A \to \infty$ 时，有

$$|\tau(A)-\tau(B)|=O\left(\frac{1}{\sqrt{e}}\right)$$

考虑方程(1)的等价系统

$$x'=y \qquad y'=-g(x)+p(t, x, y) \tag{11}$$

它的极坐标形式为：

$$\begin{cases} \dot{r}=r\sin\theta cos\theta-g(r\cos\theta)\sin\theta+p(t, r\cos\theta, r\sin\theta)\sin\theta \\ \dot{\theta}=-\sin^2\theta-\dfrac{1}{r}(g(r\cos\theta)-p(t, r\cos\theta, r\sin\theta))\cos\theta \end{cases} \tag{12}$$

以$(r(t), \theta(t))$，表示方程(12)满足$(r(0, r_0, \theta_0), \theta(0, r_0, \theta_0))=(r_0, \theta_0)$的解. 类似文献[4]可得：

引理4 假设条件(2)成立，则有：

1) 方程(11)(或(12))的每个解都在 t 轴上存在；

2) 任给 $T>0$，存在 $R_0>0$，使当 $r_0 \geqslant R_0$ 和 $t \in [0, T]$ 时，有$\dfrac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}<0$；

3) 任给 $T>0$，存在 $R_1>0$，使当 $r_0 \geqslant R_1$ 时，对任意的 $s, t \in [0, T]$，有 $|h(s)-h(t)| \leqslant P$，其中 $h(t)=\sqrt{y^2(t)+2G(x(t))}$，$x(t)=r(t)\cos\theta(t)$，$y(t)=r(t)\sin\theta(t)$，$P=\sup\{|p(t, x, y)|: t \in [0, 2\pi], (x, y) \in \mathbb{R}^2\}$.

引理4结论2)表明，在任意确定的时段内，对充分大的 e，自 F_e 上出发的方程(11)的解 Λ 是绕原点顺时针旋转的. 记解 Λ 绕一圈所用的时间为 T.

引理5 设条件(2)和(8)成立，则当 $e \to \infty$ 时，有 $|\tau(e)-T|=O\left(\dfrac{1}{\sqrt{e}}\right)$.

证 参考文献[4]方法. 证明过程分两步.

1) 先假定 Λ 自$(0, \sqrt{2G(e)})$出发，并且 $T \leqslant \dfrac{4m\pi}{n}$. 引理4结论3)表明，对所有的 $t \in \left[0, \dfrac{4m\pi}{n}\right]$和充分大的 e 有 $|h(s)-h(t)| \leqslant P$，又 $h(0)=\sqrt{2G(e)}$，所以$\sqrt{2G(e)}-E \leqslant h(t) \leqslant \sqrt{2G(e)}+E$，其中 $E=\dfrac{4m\pi P}{n}$. 令

$$\sqrt{2G(A)}=\sqrt{2G(e)}-2E, \sqrt{2G(B)}=\sqrt{2G(e)}+2E \tag{13}$$

记 F_A, F_B 分别表示闭轨线$\dfrac{1}{2}y^2+G(x)=G(A)$，$\dfrac{1}{2}y^2+G(x)=G(B)$，则 Λ 在走完一圈之前总位于 F_A 与 F_B 之间. 设 Λ 与 $x=A$ 相交的时刻为 α，Λ 自$(0, \sqrt{2G(e)})$到正 x 轴的时间为 t_1. 先看 t_1 的估计.

当 $t \in [\alpha, t_1]$ 时，有 $A \leqslant x \leqslant x(t_1)$. 由于 $x'(t_1)=0$，方程(11)得

$$x'(t)=\int_{t}^{t1}(g(x(s))-p(s, x(x), y(s)))\mathrm{d}s$$

设 $\delta(A)=\inf\{g(x): x \geqslant A\}$，由条件(2)，当 $A \gg 1$ 时，存在 $c>0$，使得 $\delta(A)>cA$，因此

$$x'(t) \geqslant \int_{t}^{t1}\delta(A)\mathrm{d}s-\int_{t}^{t1}p(s, x(x), y(s))\mathrm{d}s \geqslant (t_1-t)\delta(A)-c_1 \tag{14}$$

其中 $c_1 = \int_0^{\frac{4m\pi}{n}} | p(s, x(x), y(s)) | \mathrm{d}s$. 对式(14)从 α 到 t_1 积分，又 $x(t_1) < B$，则有

$$B - A \geqslant \frac{1}{2}(t_1 - \alpha)^2 \delta(A) - \frac{4c_1 m\pi}{n}$$

由条件(2)和式(13)知，存在常数 $M > 0$ 使得 $B - A < M$，从而

$$t_1 - \alpha = O\left(\frac{1}{\sqrt{e}}\right) \tag{15}$$

当 $t \in [0, \alpha]$ 时，有 $0 \leqslant x \leqslant A$. 由 $\sqrt{2G(A)} < h(t) < \sqrt{2G(B)}$ 得

$$\frac{x'(t)}{\sqrt{2(G(B) - G(x(t)))}} < 1 < \frac{x'(t)}{\sqrt{2(G(A) - G(x(t)))}}$$

两边积分得

$$\int_0^A \frac{\mathrm{d}s}{\sqrt{2(G(B) - G(s))}} < \alpha < \int_0^A \frac{\mathrm{d}s}{\sqrt{2(G(A) - G(s))}}$$

由引理 3、条件(2)和式(13)，综合可得

$$\frac{1}{2}\tau^+(e) - O\left(\frac{1}{\sqrt{e}}\right) < \alpha < \frac{1}{2}\tau^+(e) + O\left(\frac{1}{\sqrt{e}}\right) \tag{16}$$

进而

$$t_1 = \frac{1}{2}\tau^+(e) + O\left(\frac{1}{\sqrt{e}}\right)$$

对解 Λ 经过第 i 象限的时间 $t_i (i = 2,3,4)$ 有类似估计，最后可得

$$| \tau(e) - T | = O\left(\frac{1}{\sqrt{e}}\right)$$

2）对一般的从 $(x_0, y_0) \in F_e$ 出发的解 Λ，只需再估计解 Λ 通过下述区域

$$\left\{(x, y): 0 \leqslant y \leqslant \frac{y_0 x}{x_0}, 0 \leqslant x \leqslant x_0, \frac{1}{2}y^2 + G(x) \geqslant G(A)\right\} \cup$$

$$\left\{(x, y): y \geqslant \frac{y_0 x}{x_0}, x \geqslant x_0, \frac{1}{2}y^2 + G(x) \leqslant G(B)\right\}$$

所需时间 Δt.

不防设 $x_0 > 0$，$y_0 > 0$. 记直线 $y = \frac{y_0}{x_0}x$ 与 $x = x_0$，F_A，F_B 分别相交于 (x_0, y_0)，(x_-, y_-)，(x_+, y_+)，则

$$x_- < x_0 < x_+ \tag{17}$$

$$G(x_-) = G(A) - \frac{1}{2}y_-^2, G(x_+) = G(B) - \frac{1}{2}y_+^2 \tag{18}$$

分两种情形证明 $\Delta t = O\left(\frac{1}{\sqrt{e}}\right)$.

当 $G(x_0) \geqslant \frac{1}{2}G(e)$ 时，从式(18)得 $G(x_-) \geqslant \frac{1}{2}G(e) - 2E\sqrt{2G(e)} + 2E^2$；从式(17)，(18)，(13)，得 $G(x_+) - G(x_-) \leqslant G(B) - G(A) = 4E\sqrt{2G(e)}$，因而，当 E 充分大时，

$$\sqrt{2G(x_+)} - \sqrt{2G(x_-)} = \frac{2(G(x_+) - G(x_-))}{\sqrt{2G(x_+)} + \sqrt{2G(x_-)}} \leqslant \frac{G(x_+) - G(x_-)}{\sqrt{2G(x_-)}} \leqslant L$$

其中 L 是一个常数，又由条件(2)有 $x_+ - x_- \leqslant a$. 如果 $x_+ \leqslant A$，类似式(16)的推导，可得 $\Delta t = O\left(\frac{1}{\sqrt{e}}\right)$. 如果 $x_+ \geqslant A$，令 $(x_-, x_+) = (x_-, A) \cup (A, x_+)$. 设解 Λ 经过区域 $\{(x, y) \mid x_- < x < A\}$ 与 $\{(x, y) \mid A < x < x_+\}$ 的时间分别为 Δt_1 和 Δt_2. 类似式(15)与式(16)的推理可得 $\Delta t_i = O\left(\frac{1}{\sqrt{e}}\right)(i = 1,2)$. 综合可得 $\Delta t = O\left(\frac{1}{\sqrt{e}}\right)$.

对 $G(x_0) \leqslant \frac{1}{2}G(e)$ 的情形，可类似证明 $\Delta t = O\left(\frac{1}{\sqrt{e}}\right)$.

对任何正整数 j，设 $T_j(e)$ 是从 F_e 上出发的解转 j 圈所用的时间，由 $c_1 < T_j(e) < c_2$ 知对充分大的 E 与 A, B，解 Λ 在转 k 圈 $(k = 1,2,\cdots)$ 时均位于 F_A 和 F_B 之间. 类似引理5可得：当 $e > e_0$ 和 $c_1 < \tau(e) < c_2$ 时，就有

$$T_j(e) - j\tau(e) = O\left(\frac{1}{\sqrt{e}}\right) \tag{19}$$

设 P 为方程(12)的Poincaré映射，即 $P:(r_0, \theta_0) \longrightarrow (r(2m\pi, r_0, \theta_0), \theta(2m\pi, r_0, \theta_0))$. 引理6刻画了映射 P 的扭转性.

引理6　假设条件(2),(7)成立，则存在两个数列 $\{a_k\}, \{b_k\}$，当 $a_k < b_k < a_{k+1}$ 以及 $\lim\limits_{k\to\infty} a_k = +\infty$ 时，下述结论成立：

1) 当 $(r_0, \theta_0) \in F_{a_k}$ 时，$\theta(2m\pi, r_0, \theta_0) - \theta_0 < -2n\pi$;

2) 当 $(r_0, \theta_0) \in F_{b_k}$ 时，$\theta(2m\pi, r_0, \theta_0) - \theta_0 > -2n\pi$.

证　从引理4结论2)知 $\theta(2m\pi, r_0, \theta_0) - \theta_0 = -2j\pi - \eta$，$j \geqslant 0$，$0 \leqslant \eta \leqslant 2\pi$. 记 t_η 为 $\theta(t)$ 从 $\theta_0 - 2j\pi$ 到 $\theta_0 - 2j\pi - \eta$ 所用的时间，那么 $2m\pi = T_j(e) + t_\eta \leqslant T_{j+1}(e)$. 由条件(7)及 $\tau(e)$ 关于 e 的连续性知，存在数列 $\{a_k\}$ 满足：当 $a_k \to +\infty$ $(k \to +\infty)$ 时，有

$$\sqrt{a_k}\left(\tau(a_k) - \frac{2m\pi}{n}\right) \leqslant -k$$

取 $\frac{k}{\sqrt{a_k}} \to 0$，又由式(19)知 $j \geqslant n$. 如果 $j \geqslant n+1$，那么

$$\theta(2m\pi, r_0, \theta_0) - \theta_0 < -2n\pi$$

如果 $j = n$，那么对 k 足够大，有

$$t_\eta = 2m\pi - T_n \geqslant \frac{nk - c_n}{\sqrt{a_k}}$$

从而

$$-\eta = \int_{n\tau(a_k)}^{n\tau(a_k)+t_\eta} \dot{\theta}\,\mathrm{d}t \leqslant -A_1 \frac{nk - c_n}{\sqrt{a_k}}$$

因此

$$\theta(2m\pi, r_0, \theta_0) - \theta_0 < -2n\pi - A_1 \frac{nk - c_n}{\sqrt{a_k}} < -2n\pi$$

可类似证明结论2).

定理1的证明　由引理6知：对充分大的 k，方程(12)的Poincaré映射 P 在 $A_k = \{(x, y) \in F_e,$

$a_k \leqslant e \leqslant b_k\}$ 上满足扭转条件. 而引理 1 和引理 4 则保证 F_{a_k} 是星形闭曲线，并且 $O \in D(a_k)$，这里 $D(a_k)$ 是 F_{a_k} 所围成的开区域. 由文献[7] 所推广的 Poincaré-Birkhoff 扭转定理，得证 P 在 A_k 上至少有两个不动点，这些不动点就对应着方程(1) 的 $2m\pi$ 周期解 $\{x_k(t)\}$，且满足 $\lim\limits_{k\to\infty}\max\limits_{t\in[0,2\pi]}(x_k^2(t)+\dot{x}_k^2(t))=\infty$.

再证明 2π 周期解的存在性. 考虑

$$x''+g(x)=\lambda p(t,x,y)\qquad \lambda\in[0,1] \tag{20}$$

定义如下算子

$$L: C^2[0,2\pi]\longrightarrow C^0[0,2\pi]\ Lx=x''-\frac{1}{2}x$$

$$N_\lambda: C^1[0,2\pi]\longrightarrow C^0[0,2\pi]\ N_\lambda(x)=-g(x)-\frac{1}{2}x+\lambda p(t,x,y)$$

方程(1) 的 2π 周期解的存在性问题等价于算子方程 $Lx=N_\lambda(x)$，$\lambda\in[0,1]$ 解的存在性问题. 令 $\Omega=\{x(t)\in C^1[0,2\pi]:\dfrac{x'(t)^2}{2}+G(x(t))<e_k,\ t\in[0,2\pi]\}$. 取足够大的数 e_k，则方程(20) 在 t_0 时刻从 $(x_0,y_0)\in F_{e_k}:\dfrac{y^2}{2}+G(x)=G(e_k)$ 上出发的解 F 都不是 2π 周期的.

事实上，设解 F 围绕原点顺时针运动 j 圈所用时间为 $\Delta t_j(e)$，与引理 5 类似可证 $|\Delta t_j(e)-j\tau(e)|=O\left(\dfrac{1}{\sqrt{e}}\right)$，$e\to\infty$. 取 $T=\dfrac{2m\pi(n+2)}{n}$，则在 $[t_0,t_0+T]$ 解 F 围绕原点至少转了 n 圈. 由条件(7) 及 $\tau(e)$ 关于 e 的连续性知：存在数列 $\{e_k\}\to\infty(k\to\infty)$ 满足 $\sqrt{e_k}(\tau(e_k)-\dfrac{2m\pi}{n})\leqslant -k$，并可取 $e_k>k^4$，当 k 充分大时，有

$$\Delta t_n=n\tau(e_k)+O\left(\frac{1}{\sqrt{e_k}}\right)=2m\pi-\frac{nk}{\sqrt{e_k}}+O\left(\frac{1}{\sqrt{e_k}}\right)<2m\pi$$

$$\Delta t_{n+1}=(n+1)\tau(e_k)+O\left(\frac{1}{\sqrt{e_k}}\right)=2m\pi+\frac{2m\pi}{n}-\frac{k}{\sqrt{e_k}}+O\left(\frac{1}{\sqrt{e_k}}\right)>2m\pi$$

这说明解 F 在 $2m\pi$ 时间内围绕原点顺时针运动超过 n 圈，但是达不到 $n+1$ 圈，所以不是 $2m\pi$ 周期解，也不是 2π 周期解.

令 $F(x,y)=(y,-g(x))$，$\Omega_0=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:\dfrac{y^2}{2}+G(x(t))<e_k\}$. 取 k 充分大使 $G(x)=e_k$ 的正根 x_+ 和负根 x_- 分别满足 $g(x_+)>0$ 和 $g(x_-)<0$. 于是 $\lambda F(x,y)+(1-\lambda)J(x,y)=(y,-\lambda g(x)-(1-\lambda)x)\neq(0,0)$，这里 $J(x,y)=(y,-x)$. 因此 $d_B(F,\Omega_0,0)=d_B(J,\Omega_0,0)=1$，其中 $d_B(F,\Omega,0)$ 是 F 的 Brouwer 度，利用文献[15] 结果，可得 $d_{LS}(id-L^{-1}N_0,\Omega,0)=d_B(F,\Omega_0,0)\neq 0$. 所以算子方程 $Lx=N_\lambda(x)$，$\lambda\in[0,1]$ 解存在，进而方程(1) 存在 2π 周期解.

参考文献：

[1] DING T R，IANNACCI R，ZANOLIN F. Existence and Multiplicity Results for Periodic Solutions of Semilinear Duffing Equations [J]. Journal of Differential Equations，1993，105(2)：364-409.

[2] 吴吟吟，钱定边. 强迫摆型碰撞振子的弹性周期解 [J]. 中国科学：数学，2018，48(5)：579-588.

[3] HAO D Y，MA S W. Semilinear Duffing Equations Crossing Resonance Points [J]. Journal of Differential Equations，1997，133(1)：98-116.

[4] WANG Z H. Multiplicity of Periodic Solutions of Semilinear Duffing's Equation at Resonance [J]. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 1999, 237(1): 166-187.

[5] 王学蕾. 平面时变 Hamilton 系统周期解的存在性和重性 [D]. 苏州：苏州大学，2016.

[6] 吴克正. 具有振动位势的二阶哈密顿方程的重周期解 [D]. 苏州：苏州大学，2017.

[7] DING W Y. A Generalization of the Poincaré-Birkhoff Theorem [J]. Proceedings of the American Mathematical Society, 1983, 88(2): 341-346.

[8] 马田田，张铁荟，黄艳. 共振条件下具有奇异性和无界扰动 Duffing 方程的周期解(上) [J]. 首都师范大学学报(自然科学版)，2017，38(6)：1-4.

[9] 马田田，张铁荟，黄艳. 共振条件下具有奇异性和无界扰动 Duffing 方程的周期解(下) [J]. 首都师范大学学报(自然科学版)，2018，39(1)：1-7.

[10] LIU Q H, TORRES P J, QIAN D B. Periodic, Quasi-Periodic and Unbounded Solutions of Radially Symmetric Systems with Repulsive Singularities at Resonance [J]. Nonlinear Differential Equations and Applications NoDEA, 2015, 22(5): 1115-1142.

[11] WANG Z H, MA T T. Existence and Multiplicity of Periodic Solutions of Semilinear Resonant Duffing Equations with Singularities [J]. Nonlinearity, 2012, 25(2): 279-307.

[12] 李宇尘，张康群. 一类 Duffing 方程周期解的存在唯一性 [J]. 南京师大学报(自然科学版)，2016，39(3)：16-21.

[13] 陈仕洲. 一类 Lienard 型 p-Laplacian 方程周期解的存在性和唯一性 [J]. 西南师范大学学报(自然科学版)，2015，40(1)：6-11.

[14] 姜黎鑫，丁卫. 一般次线性条件下脉冲方程的周期解 [J]. 西南师范大学学报(自然科学版)，2018，43(11)：18-23.

[15] CAPIETTO A, MAWHIN J, ZANOLIN F. A Continuation Theorem for Periodic Boundary Value Problems with Oscillatory Nonlinearities [J]. Nonlinear Differential Equations and Applications NoDEA, 1995, 2(2): 133-163.

责任编辑　张枸