第 47 卷 第 1 期　　西南师范大学学报(自然科学版)　　2022 年 1 月
Vol. 47 No. 1　　Journal of Southwest China Normal University (Natural Science Edition)　　Jan. 2022

DOI:10.13718/j.cnki.xsxb.2022.01.003

一类张量方程的可解性及其最佳逼近问题①

代丽芳，　梁茂林

天水师范学院 数学与统计学院，甘肃 天水 741001

摘要：研究了张量方程 $\boldsymbol{A}*_{n}\boldsymbol{X}=\boldsymbol{B}$ 具有 Hermitian 解 $\boldsymbol{X}$ 的可解性问题，其中 $*_{n}$ 表示张量的 Einstein 积. 利用张量 Moore-Penrose 广义逆的性质，得到了该方程具有 Hermitian 解的充要条件及其通解表达式. 同时，在张量的 Frobenius范数意义下，考虑了对于任意给定张量的最佳逼近问题，得到了它的唯一解表达式. 最后，通过数值例子说明了结论的可行性.

关　键　词：张量方程；Hermitian 张量；Moore-Penrose 广义逆；最佳逼近

中图分类号：O241.6　　**文献标志码**：A　　**文章编号**：1000－5471(2022)01－0015－06

Solvability Conditions for a Class of Tensor Equations and Associated Optimal Approximation Problems

DAI Lifang，　LIANG Maolin

School of Mathematics and Statistics, Tianshui Normal University, Tianshui Gansu 741001, China

Abstract: This paper is concerned with the solution to the tensor equation $\boldsymbol{A}*_{n}\boldsymbol{X}=\boldsymbol{B}$ with Hermitian $\boldsymbol{X}$, where represents the Einstein product. Depending on the properties of Moore-Penrose generalized inverses of tensors, the solvability conditions for the existence of the Hermitian solution to the above tensor equation as well as its general solution have been derived. Meanwhile, the associated tensor approximation problem for any given tensor has been considered and the unique solution has been given. Finally, the performed numerical results demonstrate the feasibility of the proposed results.

Key words: tensor equations; Hermitian tensors; Moore-Penrose generalized inverses; optimal approximation

张量是数值多重线性代数的主要研究对象，其在量子力学、心理测量学、化学计量学、信号处理、高阶统计等领域有重要应用[1-3]. 张量是向量和矩阵的高阶推广，它的许多性质与矩阵情形类似，但也有很大不同[4]. 张量相关问题的研究要比矩阵情形复杂得多. 目前，在张量分解、张量的低秩逼近、张量互补问题、张量特征值问题和张量方程等方面已有诸多研究成果[4-9]. 本文考虑基于 Einstein 积[10] 的一类张量方程的

① 收稿日期：2020－09－21
基金项目：国家自然科学基金项目(11961057)；天水师范学院伏羲科研创新团队基金项目(FXD2020-03)；天水师范学院教育教学改革研究基金项目(JY202004，JY203008).
作者简介：代丽芳，讲师，硕士，主要从事数值代数方面的研究.
通信作者：梁茂林，副教授，博士.

求解问题.

为了表述方便，首先介绍本文用到的一些记号和定义. m -阶 $I_1 \times I_2 \times \cdots \times I_m$ -维复张量 $\boldsymbol{A} = (a_{i_1 i_2 \cdots i_m})$，$a_{i_1 i_2 \cdots i_m} \in \mathbb{C}$，$1 \leqslant i_j \leqslant I_j (j = 1, 2, \cdots, m)$. 我们用 $\mathbb{C}^{I_1 \times I_2 \times \cdots \times I_m}$ 表示所有 m -阶 $I_1 \times I_2 \times \cdots \times I_m$ -维复张量的全体. 本文中 $\boldsymbol{I}_n = (e_{i_1 i_2 \cdots i_n j_1 j_2 \cdots j_n}) \in \mathbb{R}^{I_1 \times I_2 \times \cdots \times I_n \times I_1 \times I_2 \times \cdots \times I_n}$ 表示单位张量，它的元素定义为 $e_{i_1 i_2 \cdots i_n j_1 j_2 \cdots j_n} = \prod_{k=1}^{n} \delta_{i_k j_k}$，这里 $\delta_{i_k j_k} = 1$ 如果 $i_k = j_k$，否则 $\delta_{i_k j_k} = 0$.

若张量 $\boldsymbol{A} = (a_{i_1 i_2 \cdots i_m j_1 j_2 \cdots j_n}) \in \mathbb{C}^{I_1 \times I_2 \times \cdots \times I_m \times J_1 \times J_2 \times \cdots \times J_n}$，$\boldsymbol{B} = (b_{j_1 j_2 \cdots j_n k_1 k_2 \cdots k_p}) \in \mathbb{C}^{J_1 \times J_2 \times \cdots \times J_n \times K_1 \times K_2 \times \cdots \times K_p}$，则它们的 Einstein 积 $\boldsymbol{A} *_n \boldsymbol{B}$ 为 $I_1 \times I_2 \times \cdots \times I_m \times K_1 \times K_2 \times \cdots \times K_p$ -维张量，依据文献[7]定义其元素为

$$(\boldsymbol{A} *_n \boldsymbol{B})_{i_1 i_2 \cdots i_m k_1 k_2 \cdots k_p} = \sum_{j_1, j_2, \cdots, j_n} a_{i_1 i_2 \cdots i_m j_1 j_2 \cdots j_n} b_{j_1 j_2 \cdots j_n k_1 k_2 \cdots k_p}$$

进一步，设张量 $\boldsymbol{S} = (a_{i_1 i_2 \cdots i_m j_1 j_2 \cdots j_n})$，$\boldsymbol{T} = (b_{k_1 k_2 \cdots k_m l_1 l_2 \cdots l_n})$ 且 $\boldsymbol{S}, \boldsymbol{T} \in \mathbb{C}^{I_1 \times I_2 \times \cdots \times I_m \times J_1 \times J_2 \times \cdots \times J_n}$，则其内积定义为

$$\langle \boldsymbol{S}, \boldsymbol{T} \rangle = \sum_{i_1, i_2, \cdots, i_m, j_1, j_2, \cdots, j_n} a_{i_1 i_2 \cdots i_m j_1 j_2 \cdots j_n} \bar{b}_{i_1 i_2 \cdots i_m j_1 j_2 \cdots j_n}$$

张量的内积诱导出张量的 Frobenius 范数，即对于张量 $\boldsymbol{T}$ 有 $\| \boldsymbol{T} \| = \sqrt{\langle \boldsymbol{T}, \boldsymbol{T} \rangle}$.

定义 1 设张量 $\boldsymbol{A} = (a_{i_1 i_2 \cdots i_m j_1 j_2 \cdots j_n}) \in \mathbb{C}^{I_1 \times I_2 \times \cdots \times I_m \times J_1 \times J_2 \times \cdots \times J_n}$，则其共轭转置 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}}$ 定义为

$$(\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}})_{i_1 i_2 \cdots i_m j_1 j_2 \cdots j_n} = \bar{a}_{j_1 j_2 \cdots j_n i_1 i_2 \cdots i_m}$$

若张量 $\boldsymbol{A} \in \mathbb{C}^{I_1 \times I_2 \times \cdots \times I_m \times I_1 \times I_2 \times \cdots \times I_m}$ 满足条件 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}} = \boldsymbol{A}$，则称之为 Hermitian 张量.

若定义 1 中 $\boldsymbol{A}$ 是实张量，则共轭转置退化为转置[7]. 值得一提的是，最新的研究发现，Hermitian 张量在量子纠缠中有实际应用[11]. 本文考虑张量方程

$$\boldsymbol{A} *_n \boldsymbol{X} = \boldsymbol{B} \tag{1}$$

的 Hermitian 解，这里 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B} \in \mathbb{C}^{P_1 \times P_2 \times \cdots \times P_m \times I_1 \times I_2 \times \cdots \times I_n}$ 为已知张量，$\boldsymbol{X} \in \mathbb{C}^{I_1 \times I_2 \times \cdots \times I_n \times I_1 \times I_2 \times \cdots \times I_n}$ 为未知的 Hermitian 张量. 张量方程(1)在控制系统、连续力学等领域有实际应用[7,11]. 例如，对于 2 -维泊松方程

$$\begin{cases} -\Delta^2 u = f, (x, y) \in \Omega \subset \mathbb{C}^2 \\ u = 0, (x, y) \in \partial\Omega \end{cases}$$

$\Omega = \{(x, y) \mid 0 \leqslant x, y \leqslant 1\}$，利用中心差分格式，可以离散为张量方程[7]

$$\boldsymbol{A} *_2 \boldsymbol{U} = \boldsymbol{F} \tag{2}$$

这里张量 $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{N \times N \times N \times N}$ 的非零元为

$$\boldsymbol{A}(i, i, j, j) = \frac{4}{h^2}, \boldsymbol{A}(i-1, i, j, j) = \boldsymbol{A}(i+1, i, j, j) = \frac{-1}{h^2}, h = \frac{1}{N}$$

$$\boldsymbol{A}(i, i, j-1, j) = \boldsymbol{A}(i, i, j+1, j) = \frac{-1}{h^2}, i, j = 2 : N-1$$

$\boldsymbol{F} \in \mathbb{R}^{N \times N}$，对于没有约束条件的张量方程(1)，文献[7]引入了张量逆的概念，得到了它的最小二乘解. 进一步，作为张量逆的推广形式，文献[12]提出了张量的 Moore-Penrose 广义逆，并讨论了张量方程(1)的可解性及其通解形式.

在图像处理等领域的应用中，考虑方程解的特殊结构是降低算法复杂度的重要途径[13]，但是对于带有约束条件的形如方程(1)的张量方程求解问题尚无研究. 借助张量的 Moore-Penrose 广义逆的性质，我们将建立张量方程组(1)有 Hermitian 解的充要条件，并得到有解时的一般解表达式. 进一步，将考虑张量方程(1)约束下的张量逼近问题.

设 $\boldsymbol{X}_0 \in \mathbb{C}^{I_1 \times I_2 \times \cdots \times I_n \times I_1 \times I_2 \times \cdots \times I_n}$ 为一给定张量，求 Hermitian 张量 $\hat{\boldsymbol{X}} \in \mathbb{C}^{I_1 \times I_2 \times \cdots \times I_n \times I_1 \times I_2 \times \cdots \times I_n}$ 使之满足等式

$$\| \hat{\boldsymbol{X}} - \boldsymbol{X}_0 \| = \min_{\boldsymbol{X} \in \Theta} \| \boldsymbol{X} - \boldsymbol{X}_0 \| \tag{3}$$

其中 Θ 表示张量方程(1)的所有 Hermitian 解的集合.

矩阵最佳逼近问题在有限元、控制论等领域具有实际应用，且已被深入研究[14-16]. 张量最佳逼近问题

(3) 可以看作是矩阵情形的直接推广形式，同时也可以看作是张量完全问题、张量低秩逼近问题等应用型问题的一般形式[17-19]. 在式(3) 中，张量 $\boldsymbol{X}_0$ 由实际测量或试验观测所得，但由于误差原因，它往往不满足所要求的特殊结构或性质，而 $\hat{\boldsymbol{X}}$ 是满足实际需求的张量. 若解集合 Θ 非空，可以证明上述张量逼近问题的解是唯一的，且可以利用已知张量的 Moore-Penrose 逆具体表示.

1　主要结果及证明

为了研究 Hermitian 张量约束下的张量方程(1) 的求解问题，我们首先引入如下引理，这对得出本文的主要结果是十分重要的.

引理 1[19]　设 $\boldsymbol{F}\in\mathbb{C}^{I_1\times I_2\times\cdots\times I_m\times J_1\times J_2\times\cdots\times J_n}$，$\boldsymbol{G}\in\mathbb{C}^{K_1\times K_2\times\cdots\times K_p\times L_1\times L_2\times\cdots\times L_q}$，$\boldsymbol{E}\in\mathbb{C}^{I_1\times I_2\times\cdots\times I_m\times L_1\times L_2\times\cdots\times L_q}$，则张量方程 $\boldsymbol{F}*_n\boldsymbol{Z}*_p\boldsymbol{G}=\boldsymbol{E}$ 有解当且仅当 $\boldsymbol{F}*_n\boldsymbol{F}^+ *_m\boldsymbol{E}*_q\boldsymbol{G}^+ *_p\boldsymbol{G}=\boldsymbol{E}$，此时它的通解为

$$\boldsymbol{Z}=\boldsymbol{F}^+*_m\boldsymbol{E}*_q\boldsymbol{G}^++\boldsymbol{Y}-\boldsymbol{F}^+*_m\boldsymbol{F}*_n\boldsymbol{Y}*_p\boldsymbol{G}*_q\boldsymbol{G}^+$$

其中张量 $\boldsymbol{Y}\in\mathbb{C}^{J_1\times J_2\times\cdots\times J_n\times K_1\times K_2\times\cdots\times K_p}$ 是任意的.

引理 2　设张量 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}\in\mathbb{C}^{P_1\times P_2\times\cdots\times P_m\times I_1\times I_2\times\cdots\times I_n}$，则张量方程(1) 有 Hermitian 解的充要条件为张量方程组

$$\begin{cases}\boldsymbol{A}*_n\boldsymbol{X}=\boldsymbol{B}\\ \boldsymbol{X}*_n\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}}=\boldsymbol{B}^{\mathrm{H}}\end{cases}\tag{4}$$

有一般解.

证　若张量方程(1) 有 Hermitian 解，则显然张量方程组(4) 有解. 反之，若 $\boldsymbol{M}$ 为张量方程组(4) 的一个解，即 $\boldsymbol{A}*_n\boldsymbol{M}=\boldsymbol{B}$，$\boldsymbol{M}*_n\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}}=\boldsymbol{B}^{\mathrm{H}}$. 令 $\boldsymbol{Y}=\dfrac{\boldsymbol{M}+\boldsymbol{M}^{\mathrm{H}}}{2}$，显然 $\boldsymbol{Y}$ 是一个 Hermitian 张量且满足式(1)，即张量 $\boldsymbol{Y}$ 为它的一个 Hermitian 解.

由引理 2 可见，求解张量方程(1) 的 Hermitian 解等价于求解张量方程组(4) 的一般解. 基于此，我们得到如下定理.

定理 1　设张量 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}\in\mathbb{C}^{P_1\times P_2\times\cdots\times P_m\times I_1\times I_2\times\cdots\times I_n}$，则张量方程(1) 有 Hermitian 解的充要条件为

$$\boldsymbol{A}*_n\boldsymbol{B}^{\mathrm{H}}=\boldsymbol{B}*_n\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}},\ \boldsymbol{A}*_n\boldsymbol{A}^+ *_m\boldsymbol{B}=\boldsymbol{B}\tag{5}$$

此时它的一般解为

$$\boldsymbol{X}=\bar{\bar{\boldsymbol{X}}}+(\boldsymbol{I}_1-\boldsymbol{A}^+*_m\boldsymbol{A})*_n\boldsymbol{V}*_n(\boldsymbol{I}_1-\boldsymbol{A}^+*_m\boldsymbol{A})\tag{6}$$

其中：$\bar{\bar{\boldsymbol{X}}}=\dfrac{1}{2}[\boldsymbol{A}^+*_m\boldsymbol{B}+\boldsymbol{B}^{\mathrm{H}}*_m(\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}})^++\boldsymbol{A}^+*_m\boldsymbol{B}*_n(\boldsymbol{I}_1-\boldsymbol{A}^+*_m\boldsymbol{A})+(\boldsymbol{I}_1-\boldsymbol{A}^+*_m\boldsymbol{A})*_n\boldsymbol{B}^{\mathrm{H}}*_m(\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}})^+]$，$\boldsymbol{I}_1\in\mathbb{R}^{I_1\times I_2\times\cdots\times I_n\times I_1\times I_2\times\cdots\times I_n}$ 为单位张量，$\boldsymbol{V}\in\mathbb{C}^{I_1\times I_2\times\cdots\times I_n\times I_1\times I_2\times\cdots\times I_n}$ 是任意的 Hermitian 张量.

证　根据张量 Moore-Penrose 广义逆的性质和引理 1 可知，张量方程(1) 有解的充要条件为

$$\boldsymbol{A}*_n\boldsymbol{A}^+ *_m\boldsymbol{B}=\boldsymbol{B}\tag{7}$$

此时

$$\boldsymbol{X}=\boldsymbol{A}^+ *_m\boldsymbol{B}+(\boldsymbol{I}_1-\boldsymbol{A}^+ *_m\boldsymbol{A})*_n\boldsymbol{Z}\tag{8}$$

这里 $\boldsymbol{Z}\in\mathbb{C}^{I_1\times I_2\times\cdots\times I_n\times I_1\times I_2\times\cdots\times I_n}$ 为任意张量. 当式(7) 成立时，结合式(4) 可知 $\boldsymbol{A}*_n\boldsymbol{B}^{\mathrm{H}}=\boldsymbol{B}*_n\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}}$，即知式(5) 成立.

进一步，将式(8) 代入式(4) 的第二个方程 $\boldsymbol{X}*_n\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}}=\boldsymbol{B}^{\mathrm{H}}$ 并整理得

$$(\boldsymbol{I}_1-\boldsymbol{A}^+ *_m\boldsymbol{A})*_n\boldsymbol{Z}*_n\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}}=\boldsymbol{B}^{\mathrm{H}}-\boldsymbol{A}^+ *_m\boldsymbol{B}_n\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}}$$

这是关于变量 $\boldsymbol{Z}$ 的张量方程. 在条件(7) 成立时，该方程总是有解的，且由引理 1 知其一般解为

$$\begin{aligned}\boldsymbol{Z}=&(\boldsymbol{I}_1-\boldsymbol{A}^+ *_m\boldsymbol{A})^+ *_n(\boldsymbol{B}^{\mathrm{H}}-\boldsymbol{A}^+ *_m\boldsymbol{B}*_n\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}})*_m(\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}})^++\boldsymbol{W}-(\boldsymbol{I}_1-\boldsymbol{A}^+ *_m\boldsymbol{A})*_n\boldsymbol{W}*_n\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}}*_m(\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}})^+=\\&(\boldsymbol{I}_1-\boldsymbol{A}^+ *_m\boldsymbol{A})*_n\boldsymbol{B}^{\mathrm{H}}*_m(\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}})^++\boldsymbol{W}-(\boldsymbol{I}_1-\boldsymbol{A}^+ *_m\boldsymbol{A})*_n\boldsymbol{W}*_n\boldsymbol{A}^+ *_m\boldsymbol{A}\end{aligned}\tag{9}$$

其中 $\boldsymbol{W}\in\mathbb{C}^{I_1\times I_2\times\cdots\times I_n\times I_1\times I_2\times\cdots\times I_n}$ 为任意张量. 将式(9) 代入式(8) 可得

$$\boldsymbol{X}=\boldsymbol{A}^{+} *_{m}\boldsymbol{B}+(\boldsymbol{I}_1-\boldsymbol{A}^{+} *_{m}\boldsymbol{A}) *_{n}[(\boldsymbol{I}_1-\boldsymbol{A}^{+} *_{m}\boldsymbol{A}) *_{n}\boldsymbol{B}^{\mathrm{H}} *_{m}(\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}})^{+}+\boldsymbol{W}-(\boldsymbol{I}_1-\boldsymbol{A}^{+} *_{m}\boldsymbol{A}) *_{n}\boldsymbol{W} *_{n}\boldsymbol{A}^{+} *_{m}\boldsymbol{A}]=$$
$$\boldsymbol{A}^{+} *_{m}\boldsymbol{B}+(\boldsymbol{I}_1-\boldsymbol{A}^{+} *_{m}\boldsymbol{A}) *_{n}\boldsymbol{B}^{\mathrm{H}} *_{m}(\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}})^{+}+(\boldsymbol{I}_1-\boldsymbol{A}^{+} *_{m}\boldsymbol{A}) *_{n}\boldsymbol{W} *_{n}(\boldsymbol{I}_1-\boldsymbol{A}^{+} *_{m}\boldsymbol{A})$$

结合引理2的证明过程可得式(6)成立.命题得证.

注　根据Moore-Penrose广义逆的性质有$\langle\bar{\bar{\boldsymbol{X}}},(\boldsymbol{I}_1-\boldsymbol{A}^{+} *_{m}\boldsymbol{A}) *_{n}\boldsymbol{V} *_{n}(\boldsymbol{I}_1-\boldsymbol{A}^{+} *_{m}\boldsymbol{A})\rangle=0$,故$\bar{\bar{\boldsymbol{X}}}$为张量方程(1)的Hermitian极小范数解.

接下来考虑张量的最佳逼近问题(3).首先引入如下引理.

引理3[19]　设$\boldsymbol{E}\in\mathbb{C}^{I_1\times I_2\times\cdots\times I_m\times J_1\times J_2\times\cdots\times J_n}$,$\boldsymbol{F}\in\mathbb{C}^{I_1\times I_2\times\cdots\times I_m\times I_1\times I_2\times\cdots\times I_m}$,$\boldsymbol{G}\in\mathbb{C}^{J_1\times J_2\times\cdots\times J_n\times J_1\times J_2\times\cdots\times J_n}$且满足

$$\boldsymbol{F} *_{m}\boldsymbol{F}=\boldsymbol{F}=\boldsymbol{F}^{\mathrm{H}},\ \boldsymbol{G} *_{n}\boldsymbol{G}=\boldsymbol{G}=\boldsymbol{G}^{\mathrm{H}}$$

则$\|\boldsymbol{E}-\boldsymbol{F} *_{m}\boldsymbol{E} *_{n}\boldsymbol{G}\|=\min\limits_{\boldsymbol{H}\in\mathbb{C}^{I_1\times I_2\times\cdots\times I_m\times J_1\times J_2\times\cdots\times J_n}}\|\boldsymbol{E}-\boldsymbol{F} *_{m}\boldsymbol{H} *_{n}\boldsymbol{G}\|$当且仅当$\boldsymbol{F} *_{m}(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{H}) *_{n}\boldsymbol{G}=\boldsymbol{O}$.

根据引理3,我们可以证明张量逼近问题(3)的解是唯一的,并给出解的具体形式.

定理2　给定张量$\boldsymbol{X}_0\in\mathbb{C}^{I_1\times I_2\times\cdots\times I_n\times I_1\times I_2\times\cdots\times I_n}$.若定理1中的条件(5)成立,则张量最佳逼近问题(3)有唯一Hermitian解$\hat{\boldsymbol{X}}$,即

$$\min_{\boldsymbol{X}\in\Theta}\|\boldsymbol{X}-\boldsymbol{X}_0\|^2=\|\hat{\boldsymbol{X}}-\boldsymbol{X}_0\|^2=$$
$$\left\|\bar{\boldsymbol{X}}-\frac{\boldsymbol{X}_0+\boldsymbol{X}_0^{\mathrm{H}}}{2}-(\boldsymbol{I}_1-\boldsymbol{A}^{+} *_{m}\boldsymbol{A}) *_{n}\frac{\boldsymbol{X}_0+\boldsymbol{X}_0^{\mathrm{H}}}{2} *_{n}(\boldsymbol{I}_1-\boldsymbol{A}^{+} *_{m}\boldsymbol{A})\right\|^2+$$
$$\left\|\frac{\boldsymbol{X}_0-\boldsymbol{X}_0^{\mathrm{H}}}{2}\right\|^2 \tag{10}$$

成立,此时

$$\hat{\boldsymbol{X}}=\bar{\bar{\boldsymbol{X}}}-(\boldsymbol{I}_1-\boldsymbol{A}^{+} *_{m}\boldsymbol{A}) *_{n}\frac{\boldsymbol{X}_0+\boldsymbol{X}_0^{\mathrm{H}}}{2} *_{n}(\boldsymbol{I}_1-\boldsymbol{A}^{+} *_{m}\boldsymbol{A}) \tag{11}$$

其中张量$\bar{\bar{\boldsymbol{X}}}$的具体形式见定理1.

证　当定理1中的条件(5)成立时,张量方程(1)的解集合Θ是非空的,且容易验证它是一个闭凸集,这说明最佳逼近问题(3)有唯一解.由式(6)和式(3)可得

$$\|\boldsymbol{X}-\boldsymbol{X}_0\|^2=\left\|\boldsymbol{X}-\frac{\boldsymbol{X}_0+\boldsymbol{X}_0^{\mathrm{H}}}{2}-\frac{\boldsymbol{X}_0-\boldsymbol{X}_0^{\mathrm{H}}}{2}\right\|^2=$$
$$\left\|\boldsymbol{X}-\frac{\boldsymbol{X}_0+\boldsymbol{X}_0^{\mathrm{H}}}{2}\right\|^2+\left\|\frac{\boldsymbol{X}_0-\boldsymbol{X}_0^{\mathrm{H}}}{2}\right\|^2=$$
$$\left\|\bar{\boldsymbol{X}}-\frac{\boldsymbol{X}_0+\boldsymbol{X}_0^{\mathrm{H}}}{2}+(\boldsymbol{I}_1-\boldsymbol{A}^{+} *_{m}\boldsymbol{A}) *_{n}\boldsymbol{V} *_{n}(\boldsymbol{I}_1-\boldsymbol{A}^{+} *_{m}\boldsymbol{A})\right\|^2+\left\|\frac{\boldsymbol{X}_0-\boldsymbol{X}_0^{\mathrm{H}}}{2}\right\|^2 \tag{12}$$

因为$\boldsymbol{I}_1-\boldsymbol{A}^{+} *_{m}\boldsymbol{A}$为正交投影张量,故满足引理3中的假设条件,从而有

$$\min_{\boldsymbol{X}\in\Theta}\|\boldsymbol{X}-\boldsymbol{X}_0\|\Leftrightarrow\min_{\boldsymbol{V}^{\mathrm{H}}=\boldsymbol{V}}\left\|\bar{\bar{\boldsymbol{X}}}-\frac{\boldsymbol{X}_0+\boldsymbol{X}_0^{\mathrm{H}}}{2}+(\boldsymbol{I}_1-\boldsymbol{A}^{+} *_{m}\boldsymbol{A}) *_{n}\boldsymbol{V} *_{n}(\boldsymbol{I}_1-\boldsymbol{A}^{+} *_{m}\boldsymbol{A})\right\|^2=$$
$$\left\|\bar{\bar{\boldsymbol{X}}}-\frac{\boldsymbol{X}_0+\boldsymbol{X}_0^{\mathrm{H}}}{2}+(\boldsymbol{I}_1-\boldsymbol{A}^{+} *_{m}\boldsymbol{A}) *_{n}\left(\bar{\bar{\boldsymbol{X}}}-\frac{\boldsymbol{X}_0+\boldsymbol{X}_0^{\mathrm{H}}}{2}\right) *_{n}(\boldsymbol{I}_1-\boldsymbol{A}^{+} *_{m}\boldsymbol{A})\right\|^2=$$
$$\left\|\bar{\bar{\boldsymbol{X}}}-\frac{\boldsymbol{X}_0+\boldsymbol{X}_0^{\mathrm{H}}}{2}-(\boldsymbol{I}_1-\boldsymbol{A}^{+} *_{m}\boldsymbol{A}) *_{n}\frac{\boldsymbol{X}_0+\boldsymbol{X}_0^{\mathrm{H}}}{2} *_{n}(\boldsymbol{I}_1-\boldsymbol{A}^{+} *_{m}\boldsymbol{A})\right\|^2 \tag{13}$$

当且仅当

$$(\boldsymbol{I}_1-\boldsymbol{A}^{+} *_{m}\boldsymbol{A}) *_{n}\left(\bar{\bar{\boldsymbol{X}}}-\frac{\boldsymbol{X}_0+\boldsymbol{X}_0^{\mathrm{H}}}{2}-\boldsymbol{V}\right) *_{n}(\boldsymbol{I}_1-\boldsymbol{A}^{+} *_{m}\boldsymbol{A})=O \tag{14}$$

由式(12)和式(13)可得式(10),而式(6)和式(14)说明最佳逼近问题(10)的唯一解为

$$\hat{\boldsymbol{X}}=\bar{\bar{\boldsymbol{X}}}+(\boldsymbol{I}_1-\boldsymbol{A}^{+} *_{m}\boldsymbol{A}) *_{n}\left(\bar{\bar{\boldsymbol{X}}}-\frac{\boldsymbol{X}_0+\boldsymbol{X}_0^{\mathrm{H}}}{2}\right) *_{n}(\boldsymbol{I}_1-\boldsymbol{A}^{+} *_{m}\boldsymbol{A}) \tag{15}$$

利用 $\bar{\bar{\boldsymbol{X}}}$ 的具体表达式和张量 Moore-Penrose 广义逆的性质，化简式(15)即知式(11)成立.

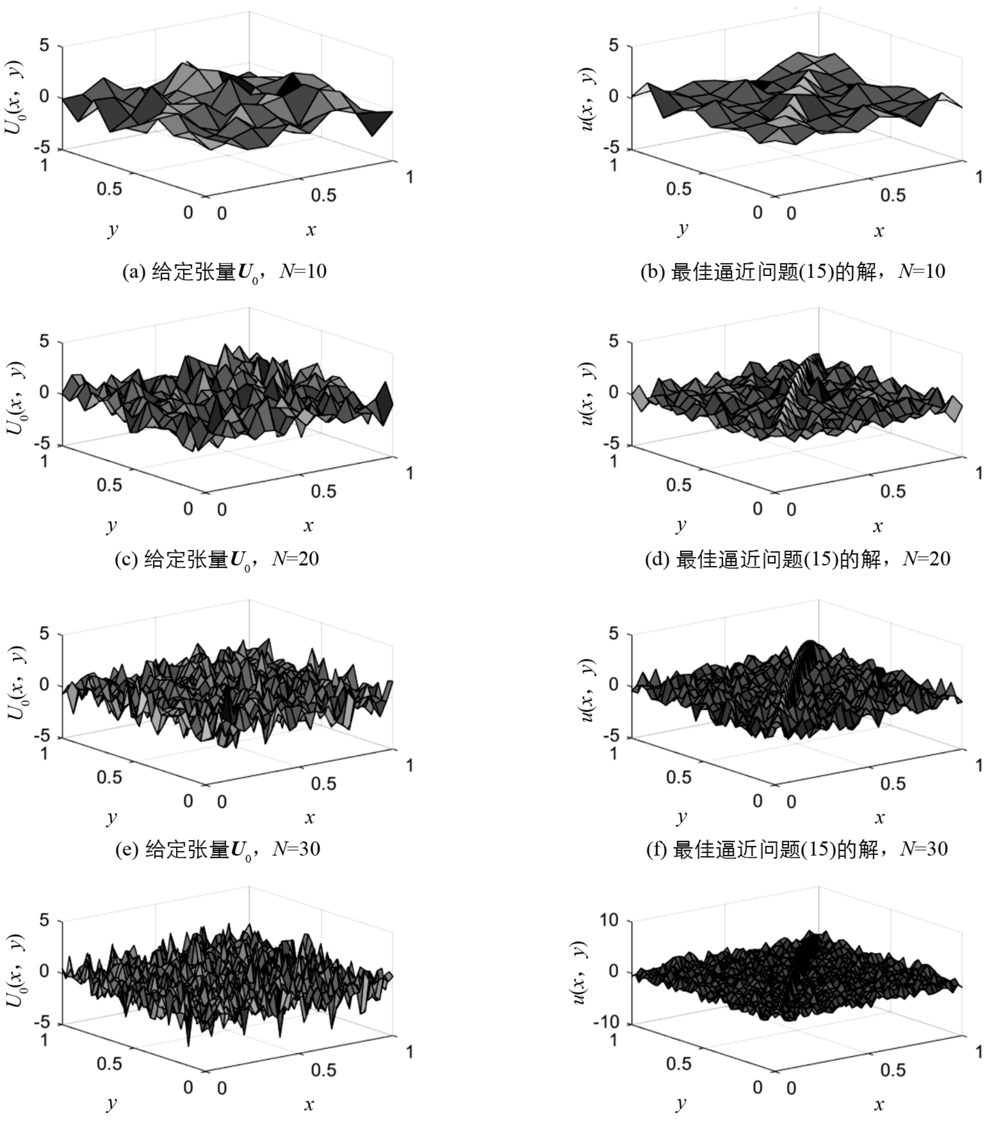
2　数值试验

本节通过数值例子验证所得结论的可行性. 接下来的所有实验数据均是通过配置了 Inter(®) Core(TM) i5-4200M CPU 与 4.00 G 内存的电脑上的 MATLAB 软件编程实现，其中张量积的运算用到了张量工具包[20].

例　考虑离散的 2-维泊松方程的 Hermitian 解，即张量方程(2)，这里取张量 $\boldsymbol{F}=eyes(N, N)$ 为单位张量. 另外，给定张量 $\boldsymbol{U}_0 \in \mathbb{R}^{N\times N}$ 随机产生，即 $\boldsymbol{U}_0=randn(N, N)$，容易验证，已知张量 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{F}$ 满足定理 1 中的条件(5)，故相应的张量逼近问题

$$\min_{\boldsymbol{A} *_2 \boldsymbol{U}=\boldsymbol{F}} \|\boldsymbol{U}-\boldsymbol{U}_0\|$$

有唯一解 $\hat{\boldsymbol{U}}$. 对于不同正整数 N 和张量 $\boldsymbol{U}_0$，根据定理 2，可以得到上述最佳逼近问题的解(图 1). 图 1 展示了最佳逼近解的对称性.



(a) 给定张量$\boldsymbol{U}_0$，N=10　(b) 最佳逼近问题(15)的解，N=10

(c) 给定张量$\boldsymbol{U}_0$，N=20　(d) 最佳逼近问题(15)的解，N=20

(e) 给定张量$\boldsymbol{U}_0$，N=30　(f) 最佳逼近问题(15)的解，N=30

(g) 给定张量$\boldsymbol{U}_0$，N=40　(h) 最佳逼近问题(15)的解，N=40

图 1　给定张量及最佳逼近解

3　总结

本文考虑了基于 Einstein 积的张量方程 $\boldsymbol{A} *_n \boldsymbol{X}=\boldsymbol{B}$ 关于 Hermitian 张量 $\boldsymbol{X}$ 的可解性问题. 利用张量

Moore-Penrose 广义逆的性质，得到了上述问题有解的充要条件，并得到了它的一般解表达式.另外，对于任意给定张量，在假定上述条件成立时，讨论了相应的张量最佳逼近问题，证明了解的唯一性，并得到了它的具体表达式.最后给出实际应用实例验证了本文所得结果的可行性，这些结果对张量相关理论的完善具有重要意义.

参考文献:

[1] COPPI R，BOLASCO S. Multiway Data Analysis [M]. Amsterdam：Elsevier，1989.
[2] QI L Q，LUO Z Y. Tensor Analysis [M]. Philadelphia：Society for Industrial and Applied Mathematics，2017.
[3] LAI W，RUBIN D，KREMPL E. Introduction To Continuum Mechanics [M]. Amsterdam：Elsevier，2009.
[4] KOLDA T G，BADER B W. Tensor Decompositions and Applications [J]. SIAM Review，2009，51(3)：455-500.
[5] DE SILVA V，LIM L H. Tensor Rank and the Ill-Posedness of the Best Low-Rank Approximation Problem [J]. SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications，2008，30(3)：1084-1127.
[6] QI L Q. Eigenvalues of a Real Supersymmetric Tensor [J]. Journal of Symbolic Computation，2005，40(6)：1302-1324.
[7] BRAZELL M，LI N，NAVASCA C，et al. Solving Multilinear Systems via Tensor Inversion [J]. SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications，2013，34(2)：542-570.
[8] LI X T，NG M K. Solving Sparse Non-Negative Tensor Equations：Algorithms and Applications [J]. Frontiers of Mathematics in China，2015，10(3)：649-680.
[9] DING W Y，WEI Y M. Solving Multi-Linear Systems with M-Tensors [J]. Journal of Scientific Computing，2016，68(2)：689-715.
[10] EINSTEIN A. The Foundation of the General Theory of Relativity [M]// KOX A，KLEIN M，SCHULMANN R. The Collected Papers of Albert Einstein. Princeton：Princeton University Press，2007：146-200.
[11] NI G. Hermitian Tensor And Quantum Mixed State [EB/OL]. (2019-08-23)[2021-04-01]. https：//arxiv. org/pdf/1902. 02640. pdf.
[12] SUN L Z，ZHENG B D，BU C J，et al. Moore-Penrose Inverse of Tensors via Einstein Product [J]. Linear and Multilinear Algebra，2016，64(4)：686-698.
[13] PENG Y X，HU X Y，ZHANG L. An Iteration Method for the Symmetric Solutions and the Optimal Approximation Solution of the Matrix Equation AXB=C [J]. Applied Mathematics and Computation，2005，160(3)：763-777.
[14] HIGHAM N J. Computing a Nearest Symmetric Positive Semidefinite Matrix [J]. Linear Algebra and Its Applications，1988，103：103-118.
[15] YUAN Y X，DAI H. The Nearness Problems for Symmetric Matrix with a Submatrix Constraint [J]. Journal of Computational and Applied Mathematics，2008，213(1)：224-231.
[16] HUANG G X，NOSCHESE S，REICHEL L. Regularization Matrices Determined by Matrix Nearness Problems [J]. Linear Algebra and Its Applications，2016，502：41-57.
[17] ZHANG T，GOLUB G H. Rank-One Approximation to High Order Tensors [J]. SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications，2001，23(2)：534-550.
[18] GANDY S，RECHT B，YAMADA I. Tensor Completion and Low-n-Rank Tensor Recovery via Convex Optimization [J]. Inverse Problems，2011，27(2)：025010.
[19] LIANG M L，ZHENG B. Further Results on Moore-Penrose Inverses of Tensors with Application to Tensor Nearness Problems [J]. Computers & Mathematics With Applications，2019，77(5)：1282-1293.
[20] BADER B，KOLDA T，MAYO J，et al. MATLAB Tensor Toolbox Version 3. 2 [EB/OL]. (2015-02-18)[2020-12-15]. http：//www. tensortoolbox. org.

责任编辑 张栒