

DOI:10.13718/j.cnki.xsxb.2022.01.005

无标度网络上一类具有隔离项的 时滞传染病模型研究^①

赵润东, 孙梅慈, 刘启明

陆军工程大学石家庄校区 军政基础系, 石家庄 050003

摘要: 为了研究隔离周期对传染病传播的影响, 在无标度网络上建立了一类具有隔离项的时滞传染病模型, 计算了疾病传播的基本再生数; 其次通过建立适当的 Lyapunov 函数, 证明了该系统无病平衡点和地方病平衡点的全局稳定性; 最后用数值模拟验证了结论的正确性.

关键词: 传染病模型; 网络; 时滞; 稳定性

中图分类号: O29

文献标志码: A

文章编号: 1000-5471(2022)01-0028-08

On a Delayed Epidemic Model with Quarantine on Scale-Free Networks

ZHAO Rundong, SUN Meici, LIU Qiming

Department of Scientific Culture, Shijiazhuang Branch, Army Engineering University, Shijiazhuang 050003, China

Abstract: To study the effects of quarantine period on infectious diseases, a novel delayed epidemic model with quarantine on scale-free networks has been proposed. And the basic reproduction number, which is independent of time delay, been presented. By constructing appropriate Lyapunov functions, the global stability of disease-free equilibrium and endemic equilibrium has been investigated. And numerical simulations been performed to verify the correctness of the main results.

Key words: epidemic model; network; delay; stability

传染病历来是危害人类健康的大敌, 为了遏制疾病传播, 许多学者通过建立数学模型来研究其传播过程, 其中主要使用的是“仓室”(Compartment)模型. 1927年, 文献[1]建立了著名的 SIR 传染病仓室模型. 其后, 经过许多学者的不断研究, 建立了适用不同疾病的传染病模型, 如 SIS^[2], SEIR^[3], SEIRS^[4]等.

遏制疾病的传播, 我们通常采用疫苗接种和隔离两种方法. 但是针对新出现的传染病, 疫苗的研发和生产往往需要很长时间, 因此在疾病传播初期最为有效的方法就是对人群进行隔离^[5]. 1995年, 文献[6]首

① 收稿日期: 2020-09-14

基金项目: 陆军工程大学基础学科科研基金项目(KYSZJQZL2011).

作者简介: 赵润东, 硕士研究生, 主要从事微分方程理论及应用研究.

通信作者: 刘启明, 教授, 博士.

次在传染病模型中考虑隔离的影响, 建立了 SIQR 模型; 2002 年, 文献[7] 在随机网络传染病模型中加入隔离项, 建立并研究了 SIQS 传染病模型. 上述研究都是基于随机网络研究的, 其特点是每个个体是均匀接触的.

然而, 文献[8] 发现现实中大多数网络的节点分布符合无标度性(异质性), 也就是服从幂律分布 $p(k) = Ck^{-\gamma} (2 < \gamma \leq 3)$, 因此基于异质复杂网络来建立模型就更加贴合实际. 2001 年, 文献[9] 首次在无标度网络上对一类 SIS 传染病模型进行了研究. 此后, 许多学者开始研究复杂网络上的传染病动力学. 另一方面, 现实中许多传染病当前的传播状态会受到过去状态的影响, 因此, 建立时滞传染病模型就更具有现实意义, 其中时滞可以用来描述病人的平均感染周期、潜伏周期、免疫周期和隔离周期等^[10]. 近期许多学者将网络的无标度性和时滞结合在一起研究传染病模型, 取得了丰富成果. 2012 年, 文献[11] 建立了时滞 SEIRS 网络传染病模型, 其中时滞代表平均免疫周期. 2018 年, 文献[12] 建立并研究了时滞 SEIR 网络传染病模型, 其时滞代表疾病的平均潜伏周期. 2019 年, 文献[13] 研究了复杂网络上类新的时滞 SIS 模型, 其时滞代表病人的平均感染周期. 但是鲜有人在网络上用时滞表示隔离周期来建立数学模型对传染病动力学性态进行研究.

根据以上分析, 本文基于无标度网络建立一类新的具有时滞的 SIQR 传染病模型, 其中时滞代表平均隔离周期. 通过泛函微分方程稳定性理论, 研究了该模型的动力学行为, 得到疾病传播的基本再生数, 分析了平衡点的全局稳定性, 并通过数值模拟验证了研究结果的正确性.

1 模型建立

假设总人群的接触网络是一个无标度网络, 一个节点表示一个人, 网络上的连边表示人与人之间的接触. 我们作如下假设:

1) 整个网络的出生率和自然死亡率分别为 A 和 d , 并且出生的个体都为易感染者. 依据文献[14], 添加和删除节点和边在网络中只占很小的比例, 对网络结构的改变很小, 因此可以假设网络上的总节点数 N 是不变的, 是静态的, 也就是 $A = d$.

2) 网络上的人分为 4 类: 易感染者 S (Susceptible)、感染者 I (Infected)、隔离者 Q (Quarantine)、恢复者 R (Recovered). 令 $S_k(t), I_k(t), Q_k(t)$ 和 $R_k(t)$ 分别代表度为 k 的易感染者、感染者、隔离者和恢复者在 t 时刻的相对密度. 标准化后, $S_k(t) + I_k(t) + Q_k(t) + R_k(t) = 1$.

3) 每个易感染者 S 都有概率 $\lambda(k)$ (与节点的度 k 有关) 被感染者感染, 成为感染者 I . 感染者 I 有概率 δ 被隔离, 成为隔离者 Q . 感染者 I 同时有概率 γ 恢复健康, 成为恢复者 R . 隔离者 Q 经过 τ 时间的隔离治疗后, 成为恢复者 R .

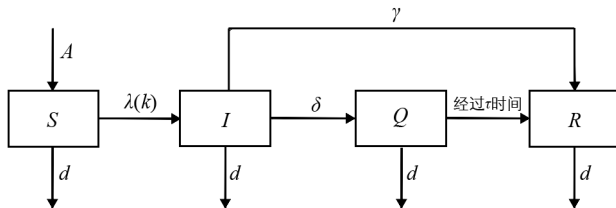


图 1 时滞 SIQR 模型的仓室框图

基于以上假设, 可建立 SIQR 模型的仓室框图(图 1), 对应的微分方程系统如下:

$$\begin{cases} \frac{dS_k(t)}{dt} = A - \lambda(k)S_k(t)\Theta(t) - dS_k(t) \\ \frac{dI_k(t)}{dt} = \lambda(k)S_k(t)\Theta(t) - (\gamma + \delta + d)I_k(t) \\ \frac{dQ_k(t)}{dt} = \delta I_k(t) - \delta I_k(t - \tau)e^{-\tau d} - dQ_k(t) \\ \frac{dR_k(t)}{dt} = \delta I_k(t - \tau)e^{-\tau d} + \gamma I_k(t) - dR_k(t) \end{cases} \quad (1)$$

其中 $\lambda(k)$ 为感染率, 其形式一般有如下两种^[14]: $\lambda k, \lambda c(k)$. $\Theta(t)$ 代表一个度为 k 的易感染者每次接触感染者的概率^[14], 其形式如下:

$$\Theta(t) = \frac{1}{\langle k \rangle} \sum_{k=1}^n \varphi(k) p(k) I_k(t) \quad (2)$$

其中 $p(k)$ 是网络的度分布; $\langle k \rangle = \sum_{k=1}^n k p(k)$ 是网络的平均度; $\varphi(k) = ak^a \cdot (1 + bk^a)^{-1}$ 是度为 k 的感染者的非线性传染系数, 其参数 $0 \leq c \leq 1, a > 0, b \geq 0$.

给出系统(1)的初始条件

$$S_k(\eta) = \varphi_1^k(\eta), I_k(\eta) = \varphi_2^k(\eta), Q_k(\eta) = \varphi_3^k(\eta), R_k(\eta) = \varphi_4^k(\eta) \quad (3)$$

其中

$$\varphi_i^k(\eta) \geq 0 (\eta \in [-\tau, 0], i=1,2,3,4, k=1,2,\dots,n)$$

由泛函微分方程的基本理论^[18] 易知在初始条件(3)下, 系统(1)存在唯一解, 并且当 $t \geq 0$ 时, 系统(1)存在唯一正解. 同时, 不难得出区域 Ω 是系统(1)的正向不变集, 本文将在 Ω 内讨论系统(1)的性态.

$$\Omega = \left\{ (S_1, I_1, Q_1, R_1, \dots, S_n, I_n, Q_n, R_n) \in \mathbb{R}_+^n : 0 \leq S_k, I_k, Q_k, R_k \leq \frac{A}{d} = 1, k=1,2,\dots,n \right\} \quad (4)$$

2 模型动力学分析

建立模型后, 需得出疾病的基本再生数 R_0 ^[18], 即单位病程内一个病人所传染的人数. 当 $R_0 < 1$ 时, 一个病人在单位病程能传染的人数小于 1, 疾病将自然消失, 不会流行; 当 $R_0 > 1$ 时, 一个病人在单位病程能传染的人数大于 1, 疾病将持久存在, 成为流行病.

定理 1 令

$$R_0 = \frac{A \langle \lambda(k) \varphi(k) \rangle}{d \langle k \rangle (\gamma + \delta + d)}$$

其中 $\langle \lambda(k) \varphi(k) \rangle = \sum_{k=1}^n \lambda(k) \varphi(k) p(k)$, 则以下结论成立:

1) 系统存在无病平衡点 \mathbf{E}^0

$$\mathbf{E}^0 = (S_1^0, I_1^0, Q_1^0, R_1^0, S_2^0, I_2^0, Q_2^0, R_2^0, \dots, S_k^0, I_k^0, Q_k^0, R_k^0, \dots, S_n^0, I_n^0, Q_n^0, R_n^0)$$

其中 $S_k^0 = \frac{A}{d}, I_k^0 = 0, Q_k^0 = 0, R_k^0 = 0, k=1,2,3,\dots,n$.

2) 当 $R^0 > 0$ 时, 系统(1)存在地方病平衡点 \mathbf{E}^*

$$\mathbf{E}^* = (S_1^*, I_1^*, Q_1^*, R_1^*, S_2^*, I_2^*, Q_2^*, R_2^*, \dots, S_k^*, I_k^*, Q_k^*, R_k^*, \dots, S_n^*, I_n^*, Q_n^*, R_n^*), k=1,2,3,\dots,n$$

证 由系统(1)中的方程组, 不难得出系统(1)始终存在无病平衡点 \mathbf{E}^0

$$\mathbf{E}^0 = (S_1^0, I_1^0, Q_1^0, R_1^0, S_2^0, I_2^0, Q_2^0, R_2^0, \dots, S_k^0, I_k^0, Q_k^0, R_k^0, \dots, S_n^0, I_n^0, Q_n^0, R_n^0) = \left(\frac{A}{d}, 0, 0, 0, \frac{A}{d}, 0, 0, 0, \dots, \frac{A}{d}, 0, 0, 0, \dots, \frac{A}{d}, 0, 0, 0 \right)$$

接下来, 假设系统存在地方病平衡点 \mathbf{E}^* ,

$$\mathbf{E}^* = (S_1^*, I_1^*, Q_1^*, R_1^*, S_2^*, I_2^*, Q_2^*, R_2^*, \dots, S_k^*, I_k^*, Q_k^*, R_k^*, \dots, S_n^*, I_n^*, Q_n^*, R_n^*)$$

则 \mathbf{E}^* 满足系统(1)

$$\begin{cases} A - \lambda(k) S_k^* \Theta^* - d S_k^* = 0 \\ \lambda(k) S_k^* \Theta^* - (\gamma + \delta + d) I_k^* = 0 \\ \delta I_k^* - \delta I_k^* e^{-\tau d} - d Q_k^* = 0 \\ \delta I_k^* e^{-\tau d} + \gamma I_k^* - d R_k^* = 0 \end{cases} \quad (5)$$

其中,

$$\Theta^* = \frac{1}{\langle k \rangle} \sum_{k=1}^n \varphi(k) p(k) I_k^* \quad (6)$$

解方程组(5), 得到

$$\begin{aligned} S_k^* &= \frac{A}{\lambda(k)\Theta^* + d}, \quad I_k^* = \frac{A\lambda(k)\Theta^*}{(\lambda(k)\Theta^* + d)(\gamma + \delta + d)}, \\ Q_k^* &= \frac{A\lambda(k)\Theta^* \delta(1 - e^{-\tau d})}{d(\lambda(k)\Theta^* + d)(\gamma + \delta + d)}, \quad R_k^* = \frac{A\lambda(k)\Theta^* (\delta e^{-\tau d} + \gamma)}{d(\lambda(k)\Theta^* + d)(\gamma + \delta + d)} \end{aligned} \quad (7)$$

将 I_k^* 代入(6)式, 得到

$$\Theta^* = \frac{1}{\langle k \rangle} \sum_{k=1}^n \varphi(k) p(k) \frac{A\lambda(k)\Theta^*}{(\lambda(k)\Theta^* + d)(\gamma + \delta + d)} \quad (8)$$

显然, $\Theta^* = 0$ 是平凡解. 当 $\Theta^* \neq 0$ 时对(8)式两边同除以 Θ^* , 研究函数

$$f(\Theta^*) = 1 - \frac{1}{\langle k \rangle} \sum_{k=1}^n \varphi(k) p(k) \frac{A\lambda(k)}{(\lambda(k)\Theta^* + d)(\gamma + \delta + d)}$$

注意到 $f(\Theta^*) > 0$, 且 $\lim_{\Theta^* \rightarrow +\infty} f(\Theta^*) = 1$. 根据零点定理, 如下条件成立时, 方程 $f(\Theta) = 0$ 存在唯一正解,

$$f(0) = 1 - \frac{1}{\langle k \rangle} \sum_{k=1}^n \varphi(k) p(k) \frac{A\lambda(k)}{d(\gamma + \delta + d)} < 0$$

因此, 我们定义基本再生数 R_0 如下

$$R_0 = \frac{A \langle \lambda(k)\varphi(k) \rangle}{d \langle k \rangle (\gamma + \delta + d)}$$

综合上述分析, 当 $R_0 > 1$ 时, 系统(1) 存在地方病平衡点 \mathbf{E}^* .

注 1 由 R_0 的表达式得出, R_0 与出生率 A , 感染率 $\lambda(k)$ 和非线性传染系数 $\varphi(k)$ 正相关, 与死亡率 d , 恢复率 γ 和隔离率 δ 负相关.

注 2 由(7)中正平衡点的表达式, 不难看出 τ 不影响 I_k^* 和 S_k^* 的值, 而影响 Q_k^* 和 R_k^* 的值. 也就是说, 隔离周期的长短影响隔离者和恢复者的最终人数. Q_k^* 随着 τ 的增大而增大, R_k^* 随着 τ 的增大而减小.

定理 2 当 $R_0 < 1$ 时, 系统(1) 的无病平衡点 \mathbf{E}^0 全局渐近稳定.

证 由(4)式知, $0 \leq S_k(t) \leq \frac{A}{d}$, 定义 Lyapunov 函数

$$V(t) = \frac{\Theta(t)}{\gamma + \delta + d}$$

计算 $V(t)$ 沿系统(1) 的导数可得

$$\begin{aligned} \dot{V}(t) &= \frac{1}{\langle k \rangle (\gamma + \delta + d)} \sum_{k=1}^n \varphi(k) p(k) [\lambda(k) S_k(t) \Theta(t) - (\gamma + \delta + d) I_k(t)] \leq \\ &= \frac{1}{\langle k \rangle (\gamma + \delta + d)} \sum_{k=1}^n \varphi(k) p(k) \left[\lambda(k) \Theta(t) \frac{A}{d} - (\gamma + \delta + d) I_k(t) \right] = \\ &= \Theta(t) \left[\frac{A \langle \lambda(k)\varphi(k) \rangle}{d \langle k \rangle (\gamma + \delta + d)} - 1 \right] = \\ &= \Theta(t) (R_0 - 1) \end{aligned}$$

因此, 当 $R_0 < 1$ 时, 有 $\dot{V}(t) |_{(1)} \leq 0$. 并且, 当且仅当 $I_k(t) = 0$ 时, $\dot{V}(t) |_{(1)} = 0$, 根据(1)式得 $\lim_{t \rightarrow +\infty} S_k(t) = 1$, $\lim_{t \rightarrow +\infty} Q_k(t) = 0$, $\lim_{t \rightarrow +\infty} R_k(t) = 0$. 根据 LaSalle 不变集原理^[20], 系统(1) 的无病平衡点 \mathbf{E}^0 是全局渐近稳定的.

定理 3 当 $R_0 > 1$ 时, 系统(1) 的地方病平衡点 \mathbf{E}^* 全局渐近稳定.

证 注意到, 系统(1) 中的前两个方程不涉及 $Q(t)$ 和 $R(t)$, 由此, 只需考虑如下系统:

$$\begin{cases} \dot{S}_k(t) = A - \sum_{l=1}^n \beta_{kl} S_k(t) I_l(t) - d S_k(t) \\ \dot{I}_k(t) = \sum_{l=1}^n \beta_{kl} S_k(t) I_l(t) - (\gamma + \delta + d) I_k(t) \end{cases} \quad (9)$$

其中

$$\beta_{kl} = \frac{\lambda(k)\varphi(l)p(l)}{\langle k \rangle}, \quad l=1,2,\dots,n$$

联合(9)式和(5)式,得到

$$\begin{cases} \dot{S}_k(t) = \sum_{l=1}^n \beta_{kl} S_k^* I_l^* - \sum_{l=1}^n \beta_{kl} S_k(t) I_l(t) - d(S_k(t) - S_k^*) \\ \dot{I}_k(t) = \sum_{l=1}^n \beta_{kl} S_k(t) I_l(t) - \sum_{l=1}^n \beta_{kl} S_k^* I_l^* \frac{I_k(t)}{I_k^*} \end{cases}$$

考虑如下函数

$$U(t) = S_k(t) - S_k^* - S_k^* \ln \frac{S_k(t)}{S_k^*} + I_k(t) - I_k^* - I_k^* \ln \frac{I_k(t)}{I_k^*} \quad (10)$$

$U(t)$ 沿系统(9)求导,得

$$\begin{aligned} \dot{U}(t) &= \left(1 - \frac{S_k^*}{S_k(t)}\right) \dot{S}_k(t) + \left(1 - \frac{I_k^*}{I_k(t)}\right) \dot{I}_k(t) = \\ &= -d \frac{(S_k(t) - S_k^*)^2}{S_k^*} + \sum_{l=1}^n \beta_{kl} S_k^* I_l^* \left[2 - \frac{S_k^*}{S_k(t)} + \frac{I_l(t)}{I_l^*} - \frac{I_k^*}{I_k(t)} - \frac{I_k^* S_k(t) I_l(t)}{I_k(t) S_k^* I_l^*}\right] \leq \\ &= \sum_{l=1}^n \beta_{kl} S_k^* I_l^* \left[2 - \frac{S_k^*}{S_k(t)} + \frac{I_l(t)}{I_l^*} - \frac{I_k^*}{I_k(t)} - \frac{I_k^* S_k(t) I_l(t)}{I_k(t) S_k^* I_l^*}\right] \end{aligned} \quad (11)$$

定义函数

$$H(x) = -x + \ln x, \quad G(x) = x - 1 - \ln x$$

注意到当 $x > 0$ 时, $G(x) \geq 0$, 当且仅当 $x = 1$ 时, 等号成立. 则(11)式可化为

$$\begin{aligned} & \sum_{l=1}^n \beta_{kl} S_k^* I_l^* \left[2 - \frac{S_k^*}{S_k(t)} + \frac{I_l(t)}{I_l^*} - \frac{I_k^*}{I_k(t)} - \frac{I_k^* S_k(t) I_l(t)}{I_k(t) S_k^* I_l^*}\right] = \\ & \sum_{l=1}^n \beta_{kl} S_k^* I_l^* \left[\left(H\left(\frac{I_k(t)}{I_k^*}\right) - H\left(\frac{I_l(t)}{I_l^*}\right)\right) - G\left(\frac{S_k^*}{S_k(t)}\right) - G\left(\frac{S_k(t) I_l(t) I_k^*}{S_k^* I_l I_k^*}\right)\right] \leq \\ & \sum_{l=1}^n \beta_{kl} S_k^* I_l^* \left[H\left(\frac{I_k(t)}{I_k^*}\right) - H\left(\frac{I_l(t)}{I_l^*}\right)\right] \end{aligned} \quad (12)$$

考虑如下两个矩阵

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} \beta_{11} S_m^* I_l^* & \beta_{21} S_2^* I_1^* & \cdots & \beta_{n1} S_n^* I_1^* \\ \beta_{12} S_1^* I_2^* & \beta_{22} S_2^* I_l^* & \cdots & \beta_{n2} S_n^* I_2^* \\ \cdots & \cdots & \ddots & \cdots \\ \beta_{1n} S_1^* I_n^* & \beta_{2n} S_2^* I_n^* & \cdots & \beta_{nn} S_n^* I_l^* \end{pmatrix}$$

$$\bar{\mathbf{B}} = \begin{pmatrix} \sum_{l \neq 1} \beta_{1l} S_m^* I_l^* & -\beta_{21} S_2^* I_1^* & \cdots & -\beta_{n1} S_n^* I_1^* \\ -\beta_{12} S_1^* I_2^* & \sum_{l \neq 2} \beta_{2l} S_2^* I_l^* & \cdots & -\beta_{n2} S_n^* I_2^* \\ \cdots & \cdots & \ddots & \cdots \\ -\beta_{1n} S_1^* I_n^* & -\beta_{2n} S_2^* I_n^* & \cdots & \sum_{l \neq n} \beta_{nl} S_n^* I_l^* \end{pmatrix}$$

因为矩阵 \mathbf{B} 是一个不可约矩阵, $\bar{\mathbf{B}}$ 是 \mathbf{B} 的 Laplacian 矩阵, 根据文献[21]的结论, $\bar{\mathbf{B}}$ 也是不可约矩阵. 则线

性系统 $\bar{\mathbf{B}}\mathbf{v} = 0$, 存在正解

$$\mathbf{v} = (v_1, v_2, \dots, v_n) = (C_{11}, C_{22}, \dots, C_{nn})$$

其中 C_{kk} 是矩阵 $\bar{\mathbf{B}}$ 的第 k 个对角线元素, $k = 1, 2, 3, \dots, n$. 由此得到

$$\sum_{l=1}^n v_l \beta_{lk} S_l^* I_k^* = v_k \sum_{l=1}^n \beta_{kl} S_k^* I_l^* \quad k = 1, 2, \dots, n$$

即

$$\sum_{k=1}^n v_k \sum_{l=1}^n \beta_{kl} S_k^* I_l^* \left[H\left(\frac{I_k(t)}{I_k^*}\right) - H\left(\frac{I_l(t)}{I_l^*}\right) \right] = 0 \tag{13}$$

现在定义 Lyapunov 函数

$$V(t) = \sum_{k=1}^n v_k U(t)$$

根据(11), (12) 和(13) 式, 得到 $\dot{V}(t) \Big|_{(1)} \leq 0$. 当且仅当 $S_k(t) = S_k^*$ 和 $I_k(t) = I_k^*$ 时, 等号成立, 同时由(1) 式得 $\lim_{t \rightarrow +\infty} Q_k(t) = Q_k^*$, $\lim_{t \rightarrow +\infty} R_k(t) = R_k^*$. 根据 LaSalle 不变集原理^[20], 系统(1) 的地方病平衡点 \mathbf{E}^* 是全局渐进稳定的.

注 3 当 $A = 0, d = 0, \lambda(k) = \lambda k, \varphi(k) = k$, 并取时滞 $\tau = \varepsilon^{-1}$, 时滞微分系统(1) 简化为文献[22] 中的常微分系统(1). 此时基本再生数的表达式 $R_0 = \lambda \langle k^2 \rangle \cdot [\langle k \rangle (\gamma + \delta)]^{-1}$, 结论与文献[22] 一致.

3 数值模拟

为验证结论的正确性, 我们对模型(1) 进行数值模拟. 取节点最大度值 $n = 200$, 最小度值 $m = 1$, 总节点数 $N = 20\ 000$. 网络上的度分布符合幂律分布 $p(k) = Ck^{-\gamma} (2 < \gamma \leq 3)$, 其中 $\gamma = 2.5$, 经过计算, 节点度为 $1 \sim 200$ 的截断误差为 0.04% , 在合理范围之内. 取 $C \approx 0.7455$ 以满足 $\sum_{k=m}^n p(k) = 1$. 非线性传染系数 $\varphi(k) = ak^\alpha \cdot (1 + bk^\alpha)^{-1}$, 取 $a = 0.5, \alpha = 0.75, b = 0.02$, 感染率 $\lambda(k) = \lambda k$.

令 $I(t) = \sum_{k=m}^n p(k) I_k(t)$, 表示感染者的平均密度, 类似地, $S(t), Q(t), R(t)$ 分别代表易感染者、隔离者、恢复者的平均密度. 取初始值如下: $I_5(\eta) = 0.1, I_6(\eta) = 0.1, I_k(\eta) = 0, k \neq 5, 6$.

取 $\lambda = 0.1, A = 0.1, d = 0.1, \tau = 3, \delta = 0.1, \gamma = 0.03$, 则 $R_0 \approx 0.7741 < 1$. $I_{40}(t), I_{80}(t), I_{120}(t), I_{160}(t)$ 和 $I(t)$ 随时间 t 的变化趋势见图 2, 可以看出当 $R_0 < 1$ 时, 疾病逐渐消失. 取 $\lambda = 0.2, A = 0.1, d = 0.1, \tau = 3, \delta = 0.1, \gamma = 0.03$, 则 $R_0 \approx 1.5482 > 1$. $I_{40}(t), I_{80}(t), I_{120}(t), I_{160}(t)$ 和 $I(t)$ 随时间 t 的变化趋势见图 3, 可以看出当 $R_0 > 1$ 时, 疾病持续存在, 并且逐渐趋向到一个稳定值. 图 2 和图 3 分别验证了定理 2 和定理 3.

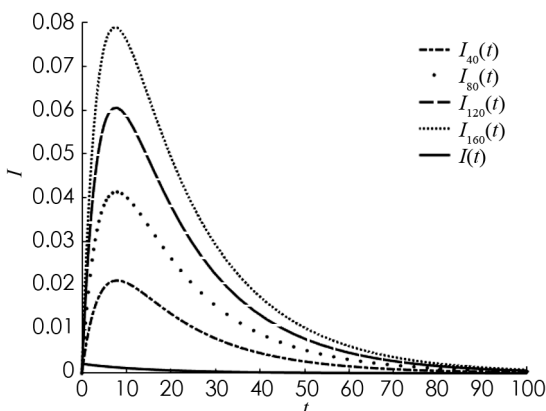


图 2 $R_0 < 1$ 时不同度值的感染者随时间 t 的变化趋势

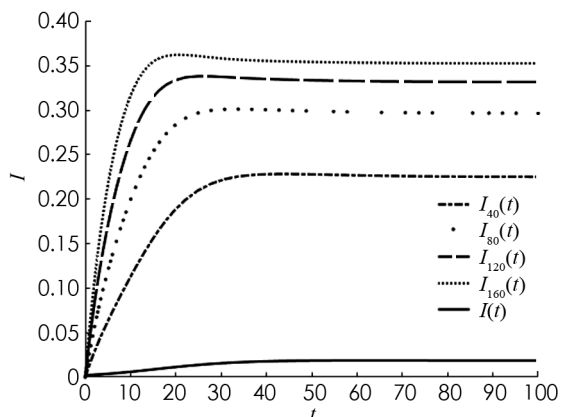


图 3 $R_0 > 1$ 时不同度值的感染者随时间 t 的变化趋势

最后, 我们进行参数敏感性分析, 用 $PRCC$ (偏秩相关系数) 检测基本再生数 R_0 对于参数的依赖性. 取样本空间 $n=1200$, 计算 6 个影响 R_0 参数的 $PRCC$ 值. 如图 4 所示, λ 和 A 对 R_0 有正影响, d, γ, δ 对 R_0 负影响, 而 R_0 对 τ 不敏感. 图 4 验证了注 1 中对 R_0 表达式的说明. 因此, 增大隔离率 δ , 提高恢复率 γ , 降低感染率 λ 可以控制疾病传播.

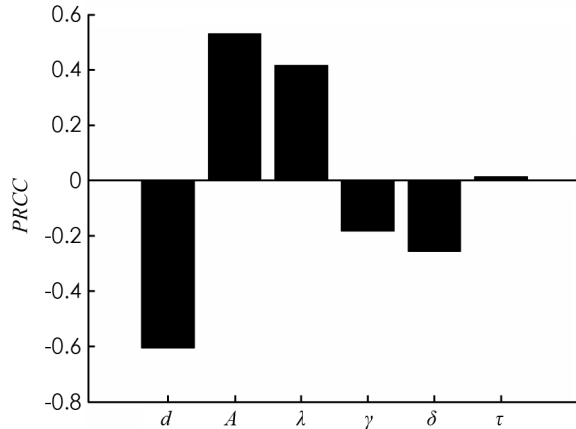


图 4 R_0 关于不同参数的 $PRCC$ 值

4 结论

为了研究隔离周期对传染病的影响, 本文基于无标度网络建立了具有时滞的 SIQR 传染病模型, 其中时滞代表平均隔离周期. 通过微分方程定性及稳定性理论, 得到了疾病传播的基本再生数. 通过构造 Lyapunov 函数, 证明了当 $R_0 < 1$ 时, 无病平衡点是全局渐近稳定的; 当 $R_0 > 1$ 时, 地方病平衡点是全局渐近稳定的. 最后, 对模型进行数值模拟, 验证了结论的正确性, 并对不同参数进行了敏感性分析. 研究结果表明隔离周期的长短不影响易感染者和感染者的最终人数, 但是影响隔离者和恢复者的最终人数. 基于 R_0 的表达式以及不同参数的 $PRCC$ 值, 得出控制疾病传播的有效方法为增大隔离率, 提高恢复率和降低感染率.

参考文献:

- [1] KERMACK W O, MCKENDRICK A G. A Contribution to the Mathematical Theory of Epidemics [J]. Proceedings of the Royal Society of London Series A, Containing Papers of a Mathematical and Physical Character, 1927, 115(772): 700-721.
- [2] 王振国, 刘桂荣. 具有非线性传染率的 SIS 网络传染病模型的稳定性和分支分析 [J]. 西南师范大学学报(自然科学版), 2017, 42(3): 83-89.
- [3] LI M Y, WANG L C. Global Stability in some Seir Epidemic Models [C]//Mathematical Approaches for Emerging and Reemerging Infectious Diseases: Models, Methods, and Theory. Springer: New York, 2002.
- [4] KUNIYA T, NAKATA Y. Permanence and Extinction for a Nonautonomous SEIRS Epidemic Model [J]. Applied Mathematics and Computation, 2012, 218(18): 9321-9331.
- [5] SIEGEL J D, RHINEHART E, JACKSON M, et al. 2007 Guideline for Isolation Precautions: Preventing Transmission of Infectious Agents in Health Care Settings [J]. American Journal of Infection Control, 2007, 35(10 suppl 2): S65-S164.
- [6] FENG Z L, THIEME H R. Recurrent Outbreaks of Childhood Diseases Revisited: The Impact of Isolation [J]. Mathematical Biosciences, 1995, 128(1-2): 93-130.
- [7] HETHCOTE H, MA Z E, LIAO S B. Effects of Quarantine in Six Endemic Models for Infectious Diseases [J]. Mathematical Biosciences, 2002, 180(1-2): 141-160.
- [8] BARABÁSI A L, ALBERT R. Emergence of Scaling in Random Networks [J]. Science, 1999, 286(5439): 509-512.

- [9] PASTOR-SATORRAS R, VESPIGNANI A. Epidemic Spreading in Scale-Free Networks [J]. *Physical Review Letters*, 2001, 86(14): 3200-3203.
- [10] MA Z E, ZHOU Y C, WU J H. *Modeling and Dynamics of Infectious Diseases* [M]. Singapore: World Scientific, 2009.
- [11] LIU X, XU D J. Analysis of $SE^r IR^w S$ Epidemic Disease Models with Vertical Transmission in Complex Networks [J]. *Acta Mathematicae Applicatae Sinica, English Series*, 2012, 28(1): 63-74.
- [12] KANG H Y, SUN M F, YU Y J, et al. Spreading Dynamics of an SEIR Model with Delay on Scale-Free Networks [J]. *IEEE Transactions on Network Science and Engineering*, 2020, 7(1): 489-496.
- [13] ZHU L H, GUAN G, LI Y M. Nonlinear Dynamical Analysis and Control Strategies of a Network-Based SIS Epidemic Model with Time Delay [J]. *Applied Mathematical Modelling*, 2019, 70: 512-531.
- [14] LI C H, TSAI C C, YANG S Y. Analysis of Epidemic Spreading of an SIRS Model in Complex Heterogeneous Networks [J]. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 2014, 19(4): 1042-1054.
- [15] PASTOR-SATORRAS R, VESPIGNANI A. Epidemic Dynamics in Finite Size Scale-Free Networks [J]. *Physical Review E, Statistical, Nonlinear, and Soft Matter Physics*, 2002, 65(3): 035108.
- [16] OLINKY R, STONE L. Unexpected Epidemic Thresholds in Heterogeneous Networks: The Role of Disease Transmission [J]. *Physical Review E, Statistical, Nonlinear, and Soft Matter Physics*, 2004, 70(3): 030902.
- [17] ZHANG H F, FU X C. Spreading of Epidemics on Scale-Free Networks with Nonlinear Infectivity [J]. *Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications*, 2009, 70(9): 3273-3278.
- [18] HALE J K, LUNEL S M V. *Introduction to Functional Differential Equations* [M]. Berlin: Springer, 1993.
- [19] VAN DEN DRIESSCHE P. Reproduction Numbers of Infectious Disease Models [J]. *Infectious Disease Modelling*, 2017, 2(3): 288-303.
- [20] HALE J K. *Retarded Functional Differential Equations: Basic Theory* [M]//*Theory of Functional Differential Equations*. Berlin: Springer, 1977: 36-56.
- [21] GUO H B, LI M Y, ZS S. Global Stability of the Endemic Equilibrium of Multigroup SIR Epidemic Models [J]. *Canadian Applied Mathematics Quarterly*, 2006, 14(3): 259-284.
- [22] 叶志勇, 刘原, 赵彦勇. 一类 SIQR 传染病模型在无尺度网络上的传播行为分析 [J]. *计算机工程与科学*, 2014, 36(8): 1524-1527.

责任编辑 张枸