第 47 卷 第 1 期 西南师范大学学报(自然科学版) 2022 年 1 月
Vol. 47 No. 1 Journal of Southwest China Normal University (Natural Science Edition) Jan. 2022

DOI:10.13718/j.cnki.xsxb.2022.01.007

抛物型 Baouendi-Grushin Laplace 方程解的 $W_{\gamma}^{1,p}$ 估计①

元琛， 黄小涛

南京航空航天大学 理学院，南京 211106

摘要： 拟研究一类退化抛物 Baouendi-Grushin Laplace 方程. 通过构造与 Baouendi-Grushin 向量场相对应的抛物 Carnot-Carathéodory 度量，利用极大值函数的强 p-p 估计、L^p 函数的几何测度估计以及改进后的 Vitali 覆盖定理来证明方程解梯度的 L^p 估计. 本结论推广了二阶抛物方程解的正则性理论.

关 键 词： $W_{\gamma}^{1,p}$ 估计；抛物 Baouendi-Grushin 方程；Carnot-Carathéodory 度量

中图分类号： O175.26 **文献标志码：** A **文章编号：** 1000-5471(2022)01-0043-10

$W_{\gamma}^{1,p}$ Regularity for Parabolic Baouendi-Grushin Laplace Equations

YUAN Chen， HUANG Xiaotao

College of Science, Nanjing University of Aeronautics and Astronautics, Nanjing 211106, China

Abstract: In this paper, a class of degenerate parabolic Baouendi-Grushin Laplace equations have been investigated. By introducing the parabolic Carnot-Caratheodory metric which is associated with the geometry of the Baouendi-Grushin vector fields, the strong (p, p) estimates of Maximal functions, the geometry measure theory for L^p functions and modified Vitali covering theorem have been used to prove the L^p regularity estimates for the gradient of solutions of parabolic Baouendi-Grushin Laplace equations. Our result generalizes the gradient estimates for the second order parabolic equations.

Key words: $W_{\gamma}^{1,p}$ estimate; parabolic Baouendi-Grushin equations; Carnot-Carathéodory metric

令 $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$，$\boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^m$，$\gamma > 0$，Baouemdi-Grushin(B-G) 向量场[1] 为

$$\boldsymbol{X}_i = \frac{\partial}{\partial x_i},\ i = 1, \cdots, n,\ \boldsymbol{X}_j = |\boldsymbol{x}|^{\gamma} \frac{\partial}{\partial y_j},\ j = 1, \cdots, m$$

B-G 梯度可定义为

$$\nabla_{\gamma} = (\nabla_x, |\boldsymbol{x}|^{\gamma} \nabla_y) = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \cdots, \frac{\partial}{\partial x_n}, |\boldsymbol{x}|^{\gamma} \frac{\partial}{\partial y_1}, \cdots, |\boldsymbol{x}|^{\gamma} \frac{\partial}{\partial y_m}\right)$$

① 收稿日期：2020-05-27
基金项目：南京航空航天大学青年科技创新基金(NS2019044).
作者简介：元琛，硕士研究生，主要从事偏微分方程正则性研究.
通信作者：黄小涛，副教授，博士.

对应的 B-G 型拉普拉斯算子为

$$\Delta_\gamma u = (\nabla_\gamma \cdot \nabla_\gamma) u = \Delta_x u + |\boldsymbol{x}|^{2\gamma} \Delta_y u$$

其中 Δ_x,Δ_y 分别是 $\mathbb{R}^n$ 和 $\mathbb{R}^m$ 空间上的拉普拉斯算子.

当 $\gamma = 1$ 时,文献[2] 研究了方程

$$\Delta_1 u_1 = \Delta_x u_1 + |\boldsymbol{x}|^2 \Delta_y u_1 = g_1(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \tag{1}$$

此方程与 Cauchy-Riemann Yamabe 问题有密切关系.

当 γ 是正整数时,向量场 $\boldsymbol{X}_i$ 和 $\boldsymbol{X}_j$ 满足 Hörmander 条件[3]. 由此得到方程的 H^ϵ 正则性估计.

若 γ 为任意的正数时,向量场 $\boldsymbol{X}_i$ 和 $\boldsymbol{X}_j$ 仅为 Hölder 连续,不满足 Hörmander 条件,所以不能得到 H^ϵ 正则性. 文献[4-6] 通过研究与 B-G 向量场相关的加权 Sobolev-Poincare 不等式,证明了 Harnack 不等式和方程解的 C^α 估计.

特别地,当 $\gamma = \frac{1}{2}$ 时,文献[7] 研究了与跨声速流相关的方程

$$(u_2)_{xx} + x(u_2)_{yy} = g_2(x, y),\ x \in \mathbb{R}^1,\ y \in \mathbb{R}^1 \tag{2}$$

并通过构造与 B-G 向量场相对应的椭圆 Carnot-Carathéodory(C-C) 度量,给出了方程解的 $C_*^{2,\alpha}$ 正则性估计. 文献[8] 建立了方程解梯度的 L^p 估计. 文献[9] 研究了半线性的椭圆 Baouendi-Grushin 方程,并利用 kelvin 变换给出方程正解的球对称结果. 文献[10] 用约束重排的方法研究了 Baouendi-Grushin 方程解的存在性和对称性. 文献[11] 研究了 Baouendi-Grushin 向量场下退化椭圆方程组弱解梯度的 L^p 估计. 其他关于 B-G 算子的研究可参考文献[12-13].

退化抛物 B-G 方程也引起了众多学者的关注[3,14]. 随后,文献[15] 研究了抛物 p-Laplace 类型的 B-G 方程并证明了一些存在性结论. 文献[16] 研究了带有初值问题的分数阶 p-Laplace B-G 方程,通过引入与 B-G 向量场相关的内在度量,用紧方法证明了方程解的 L^q 正则性估计.

对于抛物型 B-G 方程,假设 $\Omega \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ 是一个有界开区域,抛物区域为 $\Omega_* = \Omega \times (0, T]$,则抛物边界为 $\partial\Omega_* = (\partial\Omega \times (0, T]) \cup (\Omega \times \{t = 0\})$. 我们将研究下述抛物 B-G 拉普拉斯方程

$$Lu(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, t) := u_t - \Delta_\gamma u = \sum_{i=1}^{n} l_{x_i} + \sum_{j=1}^{m} |\boldsymbol{x}|^\gamma l_{y_j} := \mathrm{div}_\gamma \boldsymbol{f},\ (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, t) \in \Omega_* \tag{3}$$

其中 $\boldsymbol{f} = (l^1, \cdots, l^n, l^{n+1}, \cdots, l^{n+m})$.

本文主要证明的结论如下:

定理 1 设 $u \in W_\gamma^{1,2}(\Omega'_*)$ 为方程(3) 的弱解,如果 $\boldsymbol{f} \in L^p(\Omega_*)(p \geqslant 2)$ 且$(\boldsymbol{0}, \boldsymbol{0})$ 为内点,则 $\nabla_\gamma u \in L^p(\Omega'_*)$,其中 $\Omega'_* \subset\subset \Omega_*$. 进一步,有估计

$$\| \nabla_\gamma u \|_{L^p(\Omega'_*)} \leqslant C(\| \boldsymbol{f} \|_{L^p(\Omega_*)} + \| \boldsymbol{u} \|_{L^p(\Omega_*)})$$

在区域$\{(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, t) \in \Omega_* : \boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}\}$ 附近,此方程为退化抛物方程;如果远离$\{\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}\}$ 区域,则方程没有退化性. 我们将分别研究在$\{\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}\}$ 附近区域和远离$\{\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}\}$ 的区域的解的正则性,并给出方程解的一致性估计.

1 预备知识

本节我们给出弱解的定义和一些重要的引理.

1.1 内在度量

首先为了能对 B-G 向量场进行分析,我们引入 C-C 度量.

对任意的 $\boldsymbol{Z}_1 = (\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{y}_1, t_1)$,$\boldsymbol{Z}_2 = (\boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{y}_2, t_2) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \times [0, +\infty)$,定义与 B-G 向量场相对应的抛物 C-C 度量为 $\mathrm{d}_1 s^2 = \mathrm{d}t^2 - \mathrm{d}x^2 - \frac{\mathrm{d}y^2}{|\boldsymbol{x}|^{2\gamma}}$,相对应的距离为

$$d_\gamma(\boldsymbol{Z}_1, \boldsymbol{Z}_2) = |t_1 - t_2|^{\frac{1}{2}} + |\boldsymbol{x}_1 - \boldsymbol{x}_2| + \frac{2|\boldsymbol{y}_1 - \boldsymbol{y}_2|}{|\boldsymbol{x}_1|^\gamma + |\boldsymbol{x}_2|^\gamma}$$

当 $|\boldsymbol{x}|$,$|\boldsymbol{y}| \sim 1$ 时,抛物 C-C 距离可看成经典的抛物距离

$$d_\gamma(\boldsymbol{Z}_1, \boldsymbol{Z}_2) \sim d(\boldsymbol{Z}_1, \boldsymbol{Z}_2) = |t_1 - t_2|^{\frac{1}{2}} + |\boldsymbol{x}_1 - \boldsymbol{x}_2| + |\boldsymbol{y}_1 - \boldsymbol{y}_2|$$

令 $\boldsymbol{Z} = (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, t)$，$r\boldsymbol{Z} = (r\boldsymbol{x}, r^{1+\gamma}\boldsymbol{y}, r^2 t)$，在抛物 C-C 度量下，算子 L 满足性质

$$L(u(r\boldsymbol{x}, r^{1+\gamma}\boldsymbol{y}, r^2 t)) = r^2(\mathrm{L}u)(r\boldsymbol{x}, r^{1+\gamma}\boldsymbol{y}, r^2 t) \tag{4}$$

本文记

$$S_r(\boldsymbol{z}_0) = \{(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}): |x^i - x_0^i| < r, |y^j - y_0^j| < r^{1+\gamma}\} \qquad i = 1, \cdots, n;\ j = 1, \cdots, m$$

$$Q_r(\boldsymbol{Z}_0) = \{(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, t): (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \in S_r(\boldsymbol{z}_0), -r^2 < t - t_0 < r^2\}$$

为方便书写，记 $S_r = S_r(\boldsymbol{0})$，$Q_r = Q_r(\boldsymbol{0})$. 另外对 $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$，$\boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^m$，$\boldsymbol{z} \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$，

记 $\mathrm{d}x = \mathrm{d}x_1 \mathrm{d}x_2 \cdots \mathrm{d}x_n$，$\mathrm{d}y = \mathrm{d}y_1 \mathrm{d}y_2 \cdots \mathrm{d}y_m$，$\mathrm{d}z = \mathrm{d}x_1 \mathrm{d}x_2 \cdots \mathrm{d}x_n \mathrm{d}y_1 \mathrm{d}y_2 \cdots \mathrm{d}y_m$.

1.2 Sobolev 空间

设 $2 \leqslant p < \infty$，Ω_* 为有界抛物区域. 定义 Sobolev 空间 $W_\gamma^{1,p}(\Omega_*)$ 为

$$W_\gamma^{1,p}(\Omega_*) := \{u \in L^p(\Omega_*), \nabla_\gamma u \in L^p(\Omega_*)\}$$

其范数定义为

$$\| u \|_{W_\gamma^{1,p}(\Omega_*)} := \left\{\int_{\Omega_*} |u|^p \mathrm{d}z\mathrm{d}t + \int_{\Omega_*} |\nabla_\gamma u|^p \mathrm{d}z\mathrm{d}t\right\}^{\frac{1}{p}}, 2 \leqslant p < \infty$$

本文中令 $Q = n + (1+\gamma)m + 2$. 文献[7,17]证明了椭圆情形下有界区域上的嵌入定理. 在抛物情形下有类似的嵌入定理成立，即当 $2 < q < \dfrac{pQ}{Q-p}$ 时，

$$W_\gamma^{1,p}(\Omega_*) \hookrightarrow L^q(\Omega_*) \tag{5}$$

且在有界区域上此嵌入为紧嵌入.

方程(3)的弱解可定义如下：

定义 1 如果 $u \in W_\gamma^{1,2}(\Omega_*)$ 且对任意 $\varphi \in C_0^\infty(\Omega_*)$ 满足

$$\int_{\Omega_*} u\varphi_t \mathrm{d}z\mathrm{d}t - \int_{\Omega_*} \nabla_\gamma u \cdot \nabla_\gamma \varphi \mathrm{d}z\mathrm{d}t = \int_{\Omega_*} \boldsymbol{f} \cdot \nabla_\gamma \varphi \mathrm{d}z\mathrm{d}t \tag{6}$$

那么称 u 是方程(3)的弱解.

1.3 引理

定义局部可积函数 $v \in L^1(\Omega_*)$ 的极大值函数为

$$\mathscr{M}v(\boldsymbol{Z}) = \sup_{r>0} \frac{1}{|Q_r(\boldsymbol{Z})|}\int_{Q_r(\boldsymbol{Z})} |v(\boldsymbol{z}, t)| \mathrm{d}z\mathrm{d}t$$

对于极大值函数，有以下结论：

引理 1[18] (1) 如果 $v \in L^1(\Omega_*)$，那么对任意 $\lambda > 0$，有 $|\{\boldsymbol{Z} \in \Omega_*: \mathscr{M}v > \lambda\}| \leqslant \dfrac{C}{\lambda} \| v \|_{L^1(\Omega_*)}$.

(2) 如果 $v \in L^p(\Omega_*)$，其中 $1 < p < \infty$，则 $\mathscr{M}v \in L^p(\Omega_*)$. 进一步有

$$|\{\boldsymbol{Z} \in \Omega_*: \mathscr{M}v > \lambda_*\}| \leqslant \frac{C}{\lambda^p} \| v \|_{L^p(\Omega_*)}$$

以及

$$\frac{1}{C} \| v \|_{L^p(\Omega_*)} \leqslant \| \mathscr{M}v \|_{L^p(\Omega_*)} \leqslant C \| v \|_{L^p(\Omega_*)}$$

文献[19]证明了 L^p 函数的一个测度估计.

引理 2[19] 若函数 u 是区域 Ω_* 中的一个可测函数，常数 $\theta > 0$，$\lambda > 1$，$2 \leqslant p < \infty$，则

$$u \in L^p(\Omega_*) \Leftrightarrow T := \sum_{k=1}^{\infty} \lambda^{kp} |\{\boldsymbol{Z} \in \Omega_*: |u(\boldsymbol{Z})| > \theta\lambda^k\}| < \infty$$

且有估计

$$\frac{1}{C} T \leqslant \| u \|_{L^p(\Omega_*)}^p \leqslant C(|\Omega_*| + T)$$

为了研究解的梯度估计，我们还需引入改进的 Vitali 覆盖引理.

引理 3[20] 设 $0<\varepsilon<1$，$A\subset B\subset Q_1$ 是 Q_1 中的两个可测集，满足 $|A|<\varepsilon|Q_1|$. 如果对任意的 $\boldsymbol{z}\in A$，$r<1$，只要 $|A\cap Q_r(\boldsymbol{z})|\geqslant\varepsilon|Q_r(\boldsymbol{z})|$，都有 $Q_r(z)\cap Q_1\subset B$. 那么存在常数 C，使得

$$|A|\leqslant C\varepsilon|B|$$

2 正则性估计

本节证明方程(3)的内部 $W_\gamma^{1,p}$ 估计. 参考文献[21]的思路，主要证明步骤如下：首先利用 C-C 度量的性质(4)及能量估计，来研究在区域$\{\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}\}$附近的正则性，然后利用经典的抛物方程的正则性来得到方程解在远离$\{\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}\}$区域时的 $W_\gamma^{1,p}$ 估计，最终得到在 Q_1 内的一致 $W_\gamma^{1,p}$ 估计.

2.1 $\{(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},t)\in Q_1:\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}\}$ 区域附近的估计

本小节我们研究在区域$\{(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},t)\in Q_1:\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}\}$附近的正则性. 由 C-C 度量可知，不妨假设 u 满足方程

$$u_t-\Delta_\gamma u=\operatorname{div}_\gamma\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},t)$$

则 $v(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},t)=u(r\boldsymbol{x},r^{1+\gamma}\boldsymbol{y},r^2t)$ 在$\{\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}\}$附近满足方程

$$v_t-\Delta_\gamma v=r^2\operatorname{div}_\gamma\boldsymbol{f}(r\boldsymbol{x},r^{1+\gamma}\boldsymbol{y},r^2t)$$

首先给出在 Q_1 内的能量不等式.

引理 4 设 u 是方程(3)的弱解，那么有

$$\int_{Q_1}|\nabla_\gamma u|^2\mathrm{d}z\mathrm{d}t\leqslant C\int_{Q_2}(|u|^2+|\boldsymbol{f}|^2)\mathrm{d}z\mathrm{d}t \tag{7}$$

证 取 $\eta=\zeta^2u\in C_0^\infty(Q_2)$ 且满足 $0\leqslant\zeta\leqslant1$ 和 $\nabla_\gamma\zeta\leqslant1$. 根据弱解的定义，可得

$$\int_{S_2}u_t(\zeta^2u)\mathrm{d}z+\int_{S_2}\nabla_\gamma u\cdot\nabla_\gamma(\zeta^2u)\mathrm{d}z=-\int_{S_2}\boldsymbol{f}\cdot\nabla_\gamma(\zeta^2u)\mathrm{d}z$$

那么

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{S_2}\zeta^2\frac{|u|^2}{2}\mathrm{d}z-\int_{S_2}\zeta|u|^2\zeta_t\mathrm{d}z+\int_{S_2}\zeta^2|\nabla_\gamma u|^2\mathrm{d}z+2\int_{S_2}u|\nabla_\gamma u|\zeta\cdot\nabla_\gamma u\mathrm{d}z=$$
$$-\int_{S_2}\zeta^2\zeta\cdot\nabla_\gamma u\mathrm{d}z-2\int_{S_2}\zeta u\boldsymbol{f}\cdot\nabla_\gamma\zeta\mathrm{d}z$$

根据 τ-Cauchy 不等式：对任意的 $\tau>0$，$\int f(x)g(x)\mathrm{d}x\leqslant\tau\int f^2(x)\mathrm{d}x+C(\tau)\int g^2(x)\mathrm{d}x$，可知，

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{S_2}\zeta^2\frac{|u|^2}{2}\mathrm{d}z+\int_{S_2}\zeta^2|\nabla_\gamma u|^2\mathrm{d}z\leqslant{}&\int_{S_2}(|\boldsymbol{f}||\zeta|)(|\zeta||\nabla_\gamma u|)\mathrm{d}z+2\int_{S_2}(|\boldsymbol{f}||\zeta|)(|u||\nabla_\gamma\zeta|)\mathrm{d}z+\\&2\int_{S_2}(|\zeta||\nabla_\gamma u|)(|u||\nabla_\gamma\zeta|)\mathrm{d}z+\int_{S_2}\zeta|u|^2\zeta_t\mathrm{d}z\leqslant\\&C(\tau)\int_{S_2}(|f||\zeta|)^2\mathrm{d}z+\tau\int_{S_2}(|\nabla_\gamma u||\zeta|)^2\mathrm{d}z+C(\tau)\int_{S_2}(|\boldsymbol{f}||\zeta|)^2\mathrm{d}z+\\&C(\tau)\int_{S_2}(|u||\nabla_\gamma\zeta|)^2\mathrm{d}z+\tau\int_{S_2}(|\nabla_\gamma u||\zeta|)^2\mathrm{d}z+\tau\int_{S_2}(|u||\nabla_\gamma\zeta|)^2\mathrm{d}z\end{aligned}$$

取 $\tau=\dfrac{1}{8}$，那么

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{S_2}\zeta^2\frac{|u|^2}{2}\mathrm{d}z+\int_{S_2}\zeta^2|\nabla_\gamma u|^2\mathrm{d}z\leqslant C\int_{S_2}(|u|^2+|\boldsymbol{f}|^2)\mathrm{d}z$$

对时间 t 积分，整理可得

$$\int_{Q_1}|\nabla_\gamma u|^2\mathrm{d}z\mathrm{d}t\leqslant C\int_{Q_2}(|u|^2+|\boldsymbol{f}|^2)\mathrm{d}z\mathrm{d}t$$

定理 2 设 u 是方程(3)的弱解. 若对任意的 $\varepsilon_1>0$，都存在一个 $\delta(\varepsilon_1)>0$，满足条件

$$\int_{Q_2}|\nabla_\gamma u|^2\mathrm{d}z\mathrm{d}t\leqslant1,\ \int_{Q_2}|\boldsymbol{f}|^2\mathrm{d}z\mathrm{d}t\leqslant|\delta|^2$$

则存在函数 h 使得

$$h_t-\Delta_\gamma h=0,\ \boldsymbol{Z}\in Q_1 \tag{8}$$

且有

$$\int_{Q_1} |u-h|^2 \mathrm{d}z\,\mathrm{d}t \leqslant \varepsilon_1^2$$

证　我们用反证法来证明. 假设存在一个 $\varepsilon_0>0$，对任意的 $\delta=\dfrac{1}{n}$，存在 u_n 和 $\boldsymbol{f}_n$ 满足

$$\int_{Q_2} u_n\varphi_t \mathrm{d}z\,\mathrm{d}t-\int_{Q_2} \nabla_\gamma u_n \cdot \nabla_\gamma \varphi \mathrm{d}z\,\mathrm{d}t=\int_{Q_2} \nabla_\gamma \varphi \cdot \boldsymbol{f}_n \mathrm{d}z\,\mathrm{d}t \tag{9}$$

且有

$$\frac{1}{|Q_2|}\int_{Q_2} |\nabla_\gamma u_n|^2 \mathrm{d}z\,\mathrm{d}t \leqslant 1,\ \frac{1}{|Q_2|}\int_{Q_2} |\boldsymbol{f}_n|^2 \mathrm{d}z\,\mathrm{d}t \leqslant \frac{1}{n^2} \tag{10}$$

但是

$$\frac{1}{Q_2}\int_{Q_2} |u_n-h|^2 \mathrm{d}z\,\mathrm{d}t \geqslant \varepsilon_0 \tag{11}$$

由于 $W_\gamma^{1,2}(Q_2)$ 紧嵌入 $L^2(Q_2)$ 及有界性条件 $\dfrac{1}{|Q_2|}\displaystyle\int_{Q_2} |\nabla_\gamma u_n|^2 \mathrm{d}z\,\mathrm{d}t \leqslant 1$，则存在一个子序列，不妨仍记为 $\{u_n\}$ 使得 u_n 在 $L^2(Q_2)$ 中强收敛于 u_∞，$\nabla_\gamma u_n$ 在 $L^2(Q_2)$ 中弱收敛于 $\nabla_\gamma u_\infty$.

令 $n\to\infty$，由(9) 式和(10) 式可得

$$\int_{Q_2} u_\infty\varphi_t \mathrm{d}z\,\mathrm{d}t-\int_{Q_2} \nabla_\gamma u_\infty \cdot \nabla_\gamma \varphi \mathrm{d}z\,\mathrm{d}t=0$$

这说明了 u_∞ 和 h 都是方程(8) 的弱解. 这与(11) 式矛盾，证毕.

定理 3　对任意的 $\varepsilon>0$，存在一个 $\delta(\varepsilon)$，如果

$$u_t-\Delta_\gamma u=\mathrm{div}_\gamma \boldsymbol{f},\ \boldsymbol{Z}\in Q_2$$

且有

$$\int_{Q_2} |\nabla_\gamma u|^2 \mathrm{d}z\,\mathrm{d}t \leqslant 1,\ \int_{Q_2} |\boldsymbol{f}|^2 \mathrm{d}z\,\mathrm{d}t \leqslant \delta^2$$

则存在一个函数 h 满足

$$h_t-\Delta_\gamma h=0,\ \boldsymbol{Z}\in Q_2$$

使得

$$\int_{Q_1} |\nabla_\gamma(u-h)|^2 \mathrm{d}z\,\mathrm{d}t \leqslant \varepsilon^2$$

证　取 $\varphi=\eta^2(u-h)$ 并带入(6) 式，那么有

$$\int_{S_2} \nabla_\gamma u \cdot \nabla_\gamma(u-h)\eta^2 \mathrm{d}z+2\int_{S_2} \eta(u-h)\nabla_\gamma u \cdot \nabla_\gamma \eta \mathrm{d}z=$$
$$\int_{S_2} u(\eta^2(u-h))_t \mathrm{d}z-\int_{S_2} \eta^2 \boldsymbol{f} \cdot \nabla_\gamma(u-h)\mathrm{d}z-2\int_{S_2} \eta(u-h)\boldsymbol{f} \cdot \nabla_\gamma \eta \mathrm{d}z$$

以及

$$\int_{S_2} \nabla_\gamma h \cdot \nabla_\gamma(u-h)\eta^2 \mathrm{d}z+2\int_{S_2} \eta(u-h)\nabla_\gamma h \cdot \nabla_\gamma \eta \mathrm{d}z=\int_{S_2} (\eta^2(u-h))_t h \mathrm{d}z$$

同样的由 τ-Cauchy 不等式可得

$$\begin{aligned}\int_{S_2} \eta^2(\nabla_\gamma u-\nabla_\gamma h)\cdot\nabla_\gamma(u-h)\mathrm{d}z=\int_{S_2} \eta^2\nabla_\gamma u\cdot\nabla_\gamma(u-h)\mathrm{d}z-\int_{S_2} \eta^2\nabla_\gamma h\cdot\nabla_\gamma(u-h)\mathrm{d}z=&\\ -2\int_{S_2} \eta(u-h)\nabla_\gamma u\cdot\nabla_\gamma\eta\mathrm{d}z-\int_{S_2} \eta^2\boldsymbol{f}\cdot\nabla_\gamma(u-h)\mathrm{d}z-2\int_{S_2} \eta(u-h)\nabla_\gamma\eta\cdot\boldsymbol{f}\mathrm{d}z+&\\ 2\int_{S_2} \eta(u-h)\nabla_\gamma\eta\cdot\nabla_\gamma h\mathrm{d}z-\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{S_2}[\eta^2(u-h)^2]\mathrm{d}z-\int_{S_2} \eta(u-h)^2\eta_t\mathrm{d}z\leqslant&\\ \int_{S_2}(|\boldsymbol{f}||\eta|)(|\eta||\nabla_\gamma(u-h)|)\mathrm{d}z+2\int_{S_2}(|\boldsymbol{f}||\eta|)(|\nabla_\gamma\eta||u-h|)\mathrm{d}z+&\\ 2\int_{S_2}(|\nabla_\gamma u||\eta|)(|u-h||\nabla_\gamma\eta|)\mathrm{d}z+2\int_{S_2}(|\nabla_\gamma h||\eta|)(|\nabla_\gamma\eta||u-h|)\mathrm{d}z+&\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{S_2}(\eta^2(u-h)^2)\mathrm{d}z+\int_{S_2}|\eta||(u-v)^2\eta_t|\mathrm{d}z \leqslant \\
&C(\tau)\int_{S_2}\eta^2|\boldsymbol{f}|^2\mathrm{d}z+\tau\int_{S_2}|\eta\nabla_\gamma(u-h)|^2\mathrm{d}z+2C(\tau)\int_{S_2}\eta^2|\boldsymbol{f}|^2\mathrm{d}z+ \\
&2\tau\int_{S_2}(|u-h||\nabla_\gamma\eta|)^2\mathrm{d}z+2C(\tau)\int_{S_2}(|u-h||\nabla_\gamma\eta|)^2\mathrm{d}z+ \\
&\tau\int_{S_2}(|u-h||\nabla_\gamma\eta|)^2\mathrm{d}z+2\tau\int_{S_2}(|\eta||\nabla_\gamma u|)^2\mathrm{d}z+C(\tau)\int_{S_2}(|\eta||\nabla_\gamma h|)^2\mathrm{d}z+ \\
&\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{S_2}(\eta^2(u-h)^2)\mathrm{d}z+\int_{S_2}|\eta||u-v|^2|\eta_t\mathrm{d}z
\end{aligned}
$$

对任意的 $\tau>0$，取 τ 足够小使得 $0<\tau<\delta^2$，上式两端对时间 t 积分，又由于

$$
\int_{Q_1}|\nabla_\gamma(u-h)|^2\mathrm{d}z\mathrm{d}t \leqslant \int_{Q_2}\eta^2(\nabla_\gamma u-\nabla_\gamma h)\cdot\nabla_\gamma(u-h)\mathrm{d}z\mathrm{d}t
$$

则有结论

$$
\begin{aligned}
\int_{Q_1}|\nabla_\gamma(u-h)|^2\mathrm{d}z\mathrm{d}t &\leqslant C\int_{Q_2}[|u-h|^2+|\boldsymbol{f}|^2+\tau|\nabla_\gamma u|^2+\tau|\nabla_\gamma h|^2]\mathrm{d}z\mathrm{d}t \leqslant \\
&C\left(\int_{Q_2}|u-h|^2\mathrm{d}z\mathrm{d}t+3\delta^2\right)\leqslant \varepsilon^2
\end{aligned}
$$

定理 4 设 $u\in W_\gamma^{1,2}(Q_4)$ 是方程(3)的弱解. 存在常数 $N_1>0$，对任意的 $\varepsilon>0$，都存在 $\delta=\delta(\varepsilon)>0$，如果

$$
Q_1\cap\{\mathscr{M}(|\nabla_\gamma u|^2)\leqslant 1\}\cap\{\mathscr{M}(|\boldsymbol{f}|^2)\leqslant\delta^2\}\neq\varnothing \tag{12}
$$

那么

$$
|\{\boldsymbol{Z}\in Q_1:\mathscr{M}(|\nabla_\gamma u|^2)\geqslant N_1^2\}|\cap Q_1<\varepsilon|Q_1| \tag{13}
$$

证 由(12)式，假设存在一个点 $\boldsymbol{Z}_0\in Q_1$，使得对任意的 $0<r<1$，有

$$
\frac{1}{|Q_r(\boldsymbol{Z}_0)|}\int_{Q_r(\boldsymbol{Z}_0)}|\nabla_\gamma u|^2\mathrm{d}z\mathrm{d}t\leqslant 1,\ \frac{1}{|Q_r(\boldsymbol{Z}_0)|}\int_{Q_r(\boldsymbol{Z}_0)}|\boldsymbol{f}|^2\mathrm{d}z\mathrm{d}t\leqslant\delta^2
$$

由于 $Q_2\subset Q_4(\boldsymbol{Z}_0)$，所以

$$
\frac{1}{|Q_2|}\int_{Q_2}|\nabla_\gamma u|^2\mathrm{d}z\mathrm{d}t\leqslant 2^Q,\ \frac{1}{|Q_2|}\int_{Q_2}|\boldsymbol{f}|^2\mathrm{d}z\mathrm{d}t\leqslant 2^Q\delta^2 \tag{14}
$$

由定理 3 可知，对任意的 $\varepsilon=\eta>0$，存在一个 $\delta(\eta)$ 和弱解 h 满足

$$
h_t-\Delta_\gamma h=0,\ \boldsymbol{Z}\in Q_2
$$

以及

$$
\int_{Q_2}|\boldsymbol{f}|^2\mathrm{d}z\mathrm{d}t\leqslant\delta^2
$$

那么

$$
\int_{Q_1}|\nabla_\gamma(u-h)|^2\mathrm{d}z\mathrm{d}t\leqslant\eta^2 \tag{15}
$$

引理 4 表明存在一个常数 N_0，使得

$$
\|\nabla_\gamma h\|_{L^2(Q_2)}\leqslant N_0^2
$$

对任意的 $\boldsymbol{Z}_1\in\{Q_1:\mathscr{M}_{Q_4}(|\nabla_\gamma(u-h)|^2\leqslant N_0^2)\}$，分以下两种情况讨论：

当 $r\leqslant 2$，有

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{|Q_r(\boldsymbol{Z}_1)|}\int_{Q_r(\boldsymbol{Z}_1)}|\nabla_\gamma u|^2\mathrm{d}z\mathrm{d}t &\leqslant \frac{2}{|Q_r(\boldsymbol{Z}_1)|}\int_{Q_r(\boldsymbol{Z}_1)}(|\nabla_\gamma(u-h)|^2+|\nabla_\gamma h|^2)\mathrm{d}z\mathrm{d}t\leqslant \\
&\frac{2}{|Q_r(\boldsymbol{Z}_1)|}\int_{Q_r(\boldsymbol{Z}_1)}|\nabla_\gamma(u-h)|^2\mathrm{d}z\mathrm{d}t+ \\
&\frac{2}{|Q_r(\boldsymbol{Z}_1)|}\int_{Q_r(\boldsymbol{Z}_1)}|\nabla_\gamma h|^2\mathrm{d}z\mathrm{d}t\leqslant 4N_0^2
\end{aligned}
$$

当 $r>2$ 时，注意到 $Q_r(\boldsymbol{Z}_1)\subset Q_{2r}(\boldsymbol{Z}_0)$，有

$$\frac{1}{|Q_r(\boldsymbol{Z}_1)|}\int_{Q_r(\boldsymbol{Z}_1)}|\nabla_\gamma u|^2\mathrm{d}z\mathrm{d}t\leqslant\frac{1}{|Q_r(\boldsymbol{Z}_1)|}\int_{Q_{2r}(\boldsymbol{Z}_0)}|\nabla_\gamma u|^2\mathrm{d}z\mathrm{d}t\leqslant 2^Q$$

进一步可得

$$\boldsymbol{Z}_1\in\{\boldsymbol{Z}\in Q_1:\mathscr{M}(|\nabla_\gamma u|^2)\leqslant N_1^2\}\tag{16}$$

其中 $N_1^2:=\max\{4N_0^2,\ 2^Q\}$.

综上可知

$$\{\boldsymbol{Z}\in Q_1:\mathscr{M}(|\nabla_\gamma u|^2>N_1^2)\}\subset\{\boldsymbol{Z}\in Q_1:\mathscr{M}_{Q_4}(|\nabla_\gamma(u-h)|^2>N_0^2)\}$$

取 $\delta=\delta(\eta)$ 充分小，可以得到

$$|\{\boldsymbol{Z}\in Q_1:\mathscr{M}(|\nabla_\gamma u|^2>N_1^2)\}|\leqslant|\{\boldsymbol{Z}\in Q_2:\mathscr{M}(|\nabla_\gamma(u-h)|^2>N_0^2)\}|\leqslant$$

$$\frac{C}{N_0^2}\int_{Q_1}|\nabla_\gamma(u-h)|^2\mathrm{d}z\mathrm{d}t\leqslant\frac{C\delta^2}{N_0^2}<\varepsilon|Q_1|$$

定理 4 给出了方程(3)解在$(\boldsymbol{0},\boldsymbol{0},t)$点附近的正则性估计. 同样可以得到在区域$\boldsymbol{Y}=(\boldsymbol{0},\boldsymbol{y},t)$附近解的估计.

推论 1　设 u 是方程(3)在 $Q_r(\boldsymbol{Y})$ 内的弱解. 存在一个常数 $N_1>0$，对任意的 $\varepsilon>0$，存在一个 $\delta>0$，如果

$$Q_r(\boldsymbol{Y})\cap\{\mathscr{M}(|\nabla_\gamma u|^2)\leqslant 1\}\cap\{\mathscr{M}(|\boldsymbol{f}|^2)\leqslant\delta^2\}\neq\varnothing$$

那么

$$|\{\boldsymbol{Z}\in Q_1:\mathscr{M}(|\nabla_\gamma u|^2)\geqslant N_1^2\}\cap Q_r(\boldsymbol{Y})|<\varepsilon|Q_r(\boldsymbol{Y})|$$

2.2　远离$\{(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},t)\in Q_1:\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}\}$区域估计

2.1 节得到了在$\{(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},t)\in Q_1:\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}\}$附近的估计. 接下来研究在 $Q_1\subset\Omega_*$ 内的任意一点的估计.

引理 5　设 $u\in W_\gamma^{1,2}(\Omega_1)$ 是方程(3)的弱解，N_1 定义如定理 4，对任意的 $\varepsilon>0$，存在 $\delta>0$，对任意的 $\boldsymbol{Z}_0\in Q_1$ 和 $r\in(0,1)$，若

$$|\{\boldsymbol{Z}\in Q_1:\mathscr{M}(|\nabla_\gamma u|^2)\geqslant N_1^2\}\cap Q_r(\boldsymbol{Z}_0)|\geqslant\varepsilon|Q_r(\boldsymbol{Z}_0)|\tag{17}$$

则有

$$Q_r(\boldsymbol{Z}_0)\subset\{\boldsymbol{Z}\in Q_1:\mathscr{M}(|\nabla_\gamma u|^2)>1\}\cap\{\boldsymbol{Z}\in Q_1:\mathscr{M}(|\boldsymbol{f}|^2)>\delta^2\}$$

证　当 $\mathrm{d}(Q_r(\boldsymbol{Z}_0),\{\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}\})\leqslant 10r$ 时，可以通过反证法证明. 假设结论不对，即

$$Q_r(\boldsymbol{Z}_0)\cap\{\boldsymbol{Z}\in Q_2:\mathscr{M}(|\nabla_\gamma u|^2)\leqslant 1\}\cap\{\boldsymbol{Z}\in Q_2:\mathscr{M}(|\boldsymbol{f}|^2)>\delta^2\}\neq\varnothing$$

令 $\boldsymbol{Y}_0=(\boldsymbol{0},\boldsymbol{y}_0,t_0)$，那么 $Q_r(\boldsymbol{Z}_0)\subset Q_{13r}(\boldsymbol{Y}_0)\subset Q_{30r}(\boldsymbol{Z}_0)$，也就是

$$Q_{13r}(\boldsymbol{Y}_0)\cap\{\boldsymbol{Z}\in Q_2:\mathscr{M}(|\nabla_\gamma u|^2)\leqslant 1\}\cap\{\boldsymbol{Z}\in Q_2:\mathscr{M}(|\boldsymbol{f}|^2)>\delta^2\}\neq\varnothing$$

根据推论 1，对任意的 $\varepsilon>0$，有

$$|\{\boldsymbol{Z}\in Q_1:\mathscr{M}(|\nabla_\gamma u|^2)\geqslant N_1^2\}\cap Q_{13r}(\boldsymbol{Y}_0)|<\varepsilon C_\gamma|Q_{13r}(\boldsymbol{Y}_0)|<\varepsilon C_\gamma|Q_{30r}(\boldsymbol{Y}_0)|$$

其中 $C_\gamma=30^{-n-m(\gamma+1)}$. 由此可得

$$|\{\boldsymbol{Z}\in Q_1:\mathscr{M}(|\nabla_\gamma u|^2)\geqslant N_1^2\}\cap Q_r(\boldsymbol{Z}_0)|<\varepsilon|Q_r(\boldsymbol{Z}_0)|$$

与(17)式矛盾，这就证明了第一种情况.

当 $\mathrm{d}(Q_r(\boldsymbol{Z}_0),\{\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}\})>10r$ 时，不妨假设 $\boldsymbol{x}_0\neq\boldsymbol{0}$. 记

$$\overline{\boldsymbol{Z}}_0=\left(\frac{\boldsymbol{x}_0}{|\boldsymbol{x}|_0},\ \frac{\boldsymbol{y}_0}{|\boldsymbol{x}_0|^{1+\gamma}},\ \frac{t_0}{|\boldsymbol{x}_0|^2}\right),\ \bar{u}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},t)=\frac{(|\boldsymbol{x}_0|\boldsymbol{x},\ |\boldsymbol{x}_0|^{1+\gamma}\boldsymbol{y},\ |\boldsymbol{x}_0|^2t)}{|\boldsymbol{x}_0|}$$

那么 $\bar{u}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},t)$ 满足

$$\bar{u}_t-\Delta_\gamma\bar{u}=\mathrm{div}_\gamma\overline{\boldsymbol{f}}\tag{18}$$

其中 $\overline{\boldsymbol{f}}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},t)=\boldsymbol{f}(|\boldsymbol{x}_0|\boldsymbol{x},\ |\boldsymbol{x}_0|^{1+\gamma}\boldsymbol{y},\ |\boldsymbol{x}_0|^2t)$.

前文已经指出，若 $|\boldsymbol{x}|,|\boldsymbol{y}|\sim 1$，那么

$$\mathrm{d}_1s^2\sim\mathrm{d}s^2=\mathrm{d}t^2-\mathrm{d}x^2-\mathrm{d}y^2\tag{19}$$

设 $u(\boldsymbol{Z})$ 定义在区域 $Q_r(\boldsymbol{Z}_0)\cap Q_1$ 内，可以验证 $\bar{u}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},t)$ 定义在区域 $Q_{\frac{r}{|\boldsymbol{x}_0|}}\left(\dfrac{\boldsymbol{Z}_0}{|\boldsymbol{x}_0|}\right)$ 内. 如果球 $Q_r(\boldsymbol{Z}_0)$ 到 $\{\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}\}$ 的距离大于 r，则球 $Q_{\frac{r}{|\boldsymbol{x}_0|}}\left(\dfrac{\boldsymbol{Z}_0}{|\boldsymbol{x}_0|}\right)$ 将接近于 $|\boldsymbol{x}|=1$ 并且直径会很小. (19) 式表明在区域 $Q_{\frac{r}{|\boldsymbol{x}_0|}}\left(\dfrac{\boldsymbol{Z}_0}{|\boldsymbol{x}_0|}\right)$ 内我们可以在 Minkowski 度量下研究方程的正则性.

根据二阶抛物方程经典的 L^p 理论[22] 可知存在常数 N_0 和 $\delta>0$，对任意的 $\varepsilon>0$，如果

$$\{\mathscr{M}(|\bar{\boldsymbol{f}}|^2)\leqslant\delta^2\}\cap\{\mathscr{M}(|\nabla_\gamma\bar{u}|^2)\leqslant 1\}\cap Q_{\frac{r}{|\boldsymbol{x}_0|}}\left(\frac{\boldsymbol{Z}_0}{|\boldsymbol{x}_0|}\right)\cap Q_1\neq\varnothing$$

那么

$$\left|\boldsymbol{Z}\in Q_{\frac{r}{|\boldsymbol{x}_0|}}\left(\frac{\boldsymbol{Z}_0}{|\boldsymbol{x}_0|}\right)\cap Q_1:\mathscr{M}(|\nabla_\gamma(\bar{u}-h)|^2)>N_0^2\right|\leqslant\varepsilon\left|Q_{\frac{r}{|\boldsymbol{x}_0|}}\left(\frac{\boldsymbol{Z}_0}{|\boldsymbol{x}_0|}\right)\right|$$

其中 $h(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},t)$ 满足方程

$$h_t-\Delta_\gamma h=0,\ \boldsymbol{Z}\in Q_{\frac{r}{|\boldsymbol{x}_0|}}\left(\frac{\boldsymbol{Z}_0}{|\boldsymbol{x}_0|}\right)$$

最后变换回来得 $u(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},t)$ 在球 $Q_r(\boldsymbol{Z}_0)$ 内的估计，即如果

$$\{\mathscr{M}(|\boldsymbol{f}|^2)\leqslant\delta^2\}\cap\{\mathscr{M}(|\nabla_\gamma u|^2)\leqslant 1\}\cap Q_r(\boldsymbol{Z}_0)\neq\varnothing$$

那么

$$|\boldsymbol{Z}\in Q_r(\boldsymbol{Z}_0):\mathscr{M}(|\nabla_\gamma(u-\bar{h})|^2)>\bar{N}_0^2|\leqslant\varepsilon|Q_r(\boldsymbol{Z}_0)|$$

其中 $\bar{h}=|\boldsymbol{x}_0|h\left(\dfrac{\boldsymbol{x}}{|\boldsymbol{x}_0|},\dfrac{\boldsymbol{y}}{|\boldsymbol{x}_0|^{1+\gamma}},\dfrac{t}{|\boldsymbol{x}_0|^2}\right)$.

2.3 主要定理的证明

引理 6 设 u 是方程(3) 在 Q_1 内的弱解. 如果

$$|\{\boldsymbol{Z}\in Q_1:\mathscr{M}(|\nabla_\gamma u|^2)>N_1^2\}|<\varepsilon|Q_1|$$

则存在 $\varepsilon_1=C(\gamma)\varepsilon$，使

$$|Q_1\cap\{\mathscr{M}(|\nabla_\gamma u|^2)>N_1^2\}|\leqslant\varepsilon_1(|Q_1\cap\{\mathscr{M}(|\nabla_\gamma u|^2)>1\}|+|Q_1\cap\{\mathscr{M}(|\boldsymbol{f}|^2)>\delta^2\}|)$$

证 记

$$A=\{\boldsymbol{Z}\in Q_1:\mathscr{M}(|\nabla_\gamma u|^2)>N_1^2\},\ B=\{\boldsymbol{Z}\in Q_1:\mathscr{M}(|\boldsymbol{f}|^2)>\delta^2\}\cup\{\boldsymbol{Z}\in Q_1:\mathscr{M}(|\nabla_\gamma u|^2)>N_1^2\}$$

由 Vitali 覆盖引理 3，再根据推论 1、引理 5 有

$$|Q_1\cap\{\mathscr{M}(|\nabla_\gamma u|^2)>N_1^2\}|\leqslant\varepsilon_1(|Q_1\cap\{\mathscr{M}(|\nabla_\gamma u|^2)>1\}|+|Q_1\cap\{\mathscr{M}(|\boldsymbol{f}|^2)>\delta^2\}|)$$

$$|Q_1\cap\{\mathscr{M}(|\nabla_\gamma u|^2)>N_1^2\}|\leqslant\varepsilon_1(|Q_1\cap\{\mathscr{M}(|\nabla_\gamma u|^2)>1\}|+|Q_1\cap\{\mathscr{M}(|\boldsymbol{f}|^2)>\delta^2\}|)$$

进一步用有限数量的 $Q_{r_i}(z_i)$ 去覆盖 Q_1 即可得结论.

推论 2 设 u 是方程(3) 的弱解. 存在 $\varepsilon_1=C(\gamma)\varepsilon$，使

$$|Q_1\cap\{\mathscr{M}(|\nabla_\gamma u|^2)>N_1^{2k}\}|\leqslant\varepsilon_1^k|Q_1\cap\{\mathscr{M}(|\nabla_\gamma u|^2)>1\}|+\sum_{i=1}^k\varepsilon_1^i|Q_1\cap\{\mathscr{M}(|\boldsymbol{f}|^2)>\delta^2N_1^{2(k-i)}\}|$$

证 下面用归纳法证明.

当 $k=1$ 时，由引理 6 知结论显然成立.

假设对某些 $k\geqslant 2$ 的整数成立. 现在令 $u_1=\dfrac{u}{N_1}$，$\boldsymbol{f}_1=\dfrac{\boldsymbol{f}}{N_1}$，由抛物 C-C 度量及性质(4) 可知，$u_1$ 是方程(3) 的弱解并且

$$|\{\boldsymbol{Z}\in Q_1:\mathscr{M}(|\nabla_\gamma u_1|^2)>N_1^2\}|<\varepsilon|Q_1|$$

根据归纳假设，

$$\begin{aligned}|\{\boldsymbol{Z}\in Q_1:\mathscr{M}(|\nabla_\gamma u|^2)>N_1^{2(k+1)}\}|=|\{\boldsymbol{Z}\in Q_1:\mathscr{M}(|\nabla_\gamma u_1|^2)>N_1^{2k}\}|\leqslant\\ \varepsilon_1^k|\{\boldsymbol{Z}\in Q_1:\mathscr{M}(|\nabla_\gamma u_1|^2)>1\}|+\end{aligned}$$

$$\sum_{i=1}^{k}\varepsilon_1^i\ |\ \boldsymbol{Z}\in Q_2:\{\mathcal{M}(|\ \boldsymbol{f}_1\ |^2)>\delta^2N_1^{2(k-i)}\}\ |\leqslant$$
$$\varepsilon_1^{k+1}\ |\ \{\boldsymbol{Z}\in Q_1:\mathcal{M}(|\ \nabla_\gamma \boldsymbol{u}\ |^2)>1\}\ |+$$
$$\sum_{i=1}^{k+1}\varepsilon_1^i\ |\ \{\boldsymbol{Z}\in Q_1:\mathcal{M}(|\ \boldsymbol{f}\ |^2)>\delta^2N_1^{2(k+1-i)}\}\ |$$

故对 $k+1$ 的情况也成立，易知结论成立.

定理 1 的证明　当 $p=2$ 时，由能量不等式可得结论.

令 $p>2$，根据假设

$$\boldsymbol{f}\in L^p(Q_1),\ \boldsymbol{u}\in W_\gamma^{1,2}(Q_1)$$

由条件可知存在一个常数 N_1，使得对任意的 $\varepsilon>0$，有一个 $\delta>0$，对任意的 $r\in(0,1)$，

$$Q_r\cap\{\mathcal{M}(|\ \nabla_\gamma \boldsymbol{u}\ |^2)\leqslant 1\}\cap\{\mathcal{M}(|\ \boldsymbol{f}\ |^2)\leqslant\delta^2\}\neq\varnothing$$

由引理 6 知

$$|\ \{\boldsymbol{Z}\in Q_r:\mathcal{M}(|\ \nabla_\gamma \boldsymbol{u}\ |^2)>N_1^2\}\cap Q_r\ |<\varepsilon\ |\ Q_r\ |$$

再根据推论 2 得到

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{\infty}N_1^{kp}\ |\ \{\boldsymbol{Z}\in Q_1:\mathcal{M}(|\ \nabla_\gamma \boldsymbol{u}\ |^2)>N_1^{2k}\}\ |\leqslant&\sum_{k=1}^{\infty}N_1^{kp}\Big[\varepsilon_1^k\ |\ Q_1\cap\{\mathcal{M}(|\ \nabla_\gamma \boldsymbol{u}\ |^2)>1\}\ |+\\&\sum_{i=1}^{k}\varepsilon_1^i\ |\ Q_1\cap\{\mathcal{M}(|\ \boldsymbol{f}\ |^2)>\delta^2N_1^{2(k-i)}\}\ |\Big]\leqslant\\&\sum_{k=1}^{\infty}(N_1^p\varepsilon_1)^k(\boldsymbol{Z}\in Q_1:\mathcal{M}(|\ \nabla_\gamma \boldsymbol{u}\ |^2)>1)+\\&\sum_{i=1}^{\infty}(N_1^p\varepsilon_1)^i\Big[\sum_{k=i}^{\infty}(N_1^2)^{\frac{(k-i)p}{2}}\ |\ \{\boldsymbol{Z}\in Q_1:\mathcal{M}(|\ \boldsymbol{f}\ |^2)>\delta^2N_1^{2(k-i)}\}\ |\Big]\end{aligned}$$

从引理 1 知，存在一个常数 C 使得

$$\sum_{k=1}^{\infty}(N_1^2)^{\frac{(k-i)p}{2}}\ |\ \{\boldsymbol{Z}\in Q_1:\mathcal{M}(|\ \boldsymbol{f}\ |^2)>\delta^2N_1^{2(k-i)}\}\ |\leqslant C\ \|\ \mathcal{M}(|\ \boldsymbol{f}\ |^2)\ \|_{L^{\frac{p}{2}}(Q_1)}^{\frac{p}{2}}\leqslant C\ \|\ \boldsymbol{f}\ \|_{L^p(Q_1)}^p$$

因为 $\boldsymbol{f}\in L^p(Q_1)$ 并且 $\boldsymbol{u}\in W_\gamma^{1,2}(Q_1)$，所以

$$\sum_{k=1}^{\infty}N_1^{kp}\ |\ \{\boldsymbol{Z}\in Q_1:\mathcal{M}(|\ \nabla_\gamma \boldsymbol{u}\ |^2)>(N_1^2)^k\}\ |\leqslant C\sum_{k=1}^{\infty}(N_1^p\varepsilon_1)^k$$

取 ε 足够小使 $N_1^p\varepsilon_1<1$，因此可得

$$\sum_{k=1}^{\infty}N_1^{kp}\ |\ \{\boldsymbol{Z}\in Q_1:\mathcal{M}(|\ \nabla_\gamma \boldsymbol{u}\ |^2)>(N_1^2)^k\}\ |\leqslant C$$

也即

$$\mathcal{M}(|\ \nabla_\gamma \boldsymbol{u}\ |^2)\in L^{\frac{p}{2}}(Q_1)$$

于是有

$$\nabla_\gamma \boldsymbol{u}\in L^p(Q_1)$$

且满足

$$\|\ \nabla_\gamma \boldsymbol{u}\ \|_{L^p(Q_1)}\leqslant C(\ \|\ \boldsymbol{f}\ \|_{L^p(Q_2)}+\|\ \boldsymbol{u}\ \|_{L^p(Q_2)})$$

综上所述，结论得证.

参考文献：

［1］ BAOUENDI M S. Sur Une Classe D'opérateurs Elliptiques DÉGÉNÉRÉS［J］. Bulletin De La Société Mathématique De France，1967，79：45-87.

［2］ JERISON D，LEE J M. The Yamabe Problem on CR Manifolds［J］. Journal of Differential Geometry，1987，25(2)：

167-197.
[3] HÖRMANDER L. Hypoelliptic Second Order Differential Equations [J]. Acta Mathematica, 1967, 119(1): 147-171.
[4] FRANCHI B. Weighted Sobolev-Poincare Inequalities and Pointwise Estimates for a Class of Degenerate Elliptic Equations [J]. Transactions of the American Mathematical Society, 1991, 327(1): 125.
[5] FRANCHI B, LANCONELLI E. Hölder Regularity Theorem for a Class of Linear Nonuniformly Elliptic Operator with Measurable Coefficients [J]. Annali Della Scuola Normale Superiore Di Pisa-Classe Di Scienze, 1983, 10(4): 523-541.
[6] FRANCHI B, SERAPIONI R. Pointwise Estimates for a Class of Strongly Degenerate Elliptic Operators: a Geometrical Approach [J]. Annali Della Scuola Normale Superiore Di Pisa-Classe Di Scienze, 1987, 14(4): 527-568.
[7] WANG L H. Hölder Estimates for Subelliptic Operators [J]. Journal of Functional Analysis, 2003, 199(1): 228-242.
[8] SONG Q Z, LU Y, SHEN J Z, et al. Regularity Estimates for a Class of Degenerate Elliptic Equations [J]. Annali Scuola Normale Superiore-Classe Di Scienze, 2011(5): 645-667.
[9] MONTI R, MORBIDELLI D. Kelvin Transform for Grushin Operators and Critical Semilinear Equations [J]. Duke Mathematical Journal, 2006, 131(1): 167-202.
[10] 钱红丽，黄小涛. 一类 Baouendi-Grushin 方程解的对称性 [J]. 纺织高校基础科学学报，2019，32(3)：307-311.
[11] 董艳，钮鹏程. 由 Baouendi-Grushin 向量场构成的退化椭圆方程组弱解梯度的 L^p 估计 [J]. 纺织高校基础科学学报，2011，24(3)：373-376，381.
[12] KOMBE I, YENER A. General Weighted Hardy Type Inequalities Related to Baouendi-Grushin Operators [J]. Complex Variables and Elliptic Equations, 2018, 63(3): 420-436.
[13] 王胜军，韩亚洲. Baouendi-Grushin p-退化椭圆算子的广义 Picone 恒等式及其应用 [J]. 西南师范大学学报(自然科学版)，2018，43(3)：1-6.
[14] DIBENEDETTO E. Hölder Continuity of Solutions of Degenerate Parabolic Equations [M]//Universitext. New York: Springer, 1993: 41-76.
[15] KOMBE I. Nonlinear Degenerate Parabolic Equations for Baouendi-Grushin Operators [J]. Mathematische Nachrichten, 2006, 279(7): 756-773.
[16] HUANG X T, MA F Y, WANG L H. Lq Regularity for P-Laplace Type Baouendi-Grushin Equations [J]. Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications, 2015, 113: 137-146.
[17] TRI N M. Critical Sobolev Exponent for Degenerate Elliptic Operators [J]. Acta Mathematica Vietnamica, 1998, 23(1): 83-94.
[18] SOGGE C D. Hangzhou Lectures on Eigenfunctions of the Laplacian [M]. Princeton: Princeton University Press, 2014.
[19] CAFFARELLI L, CABRÉ X. Fully Nonlinear Elliptic Equations [M]. Providence: American Mathematical Society, 1995.
[20] BYUN S S, WANG L H. Elliptic Equations with BMO Coefficients in Reifenberg Domains [J]. Communications on Pure and Applied Mathematics, 2004, 57(10): 1283-1310.
[21] BYUN S S, WANG L H, ZHOU S L. Nonlinear Elliptic Equations with BMO Coefficients in Reifenberg Domains [J]. Journal of Functional Analysis, 2007, 250(1): 167-196.
[22] 陈亚浙. 二阶抛物型偏微分方程 [M]. 北京：北京大学出版社，2003.

责任编辑　张栒