DOI:10.13718/j.cnki.xsxb.2022.02.001

四元数矩阵的直积分解及最佳逼近①

黄敬频，　白瑞，　徐云，　赵耿威

广西民族大学 数学与物理学院，南宁 530006

摘要：讨论了直积意义下四元数矩阵的分解问题，即对于给定的四元数矩阵 $\boldsymbol{A}$，讨论是否存在两个四元数矩阵 $\boldsymbol{X}$，$\boldsymbol{Y}$，满足 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{X}\otimes\boldsymbol{Y}$，同时给出 $\boldsymbol{A}$ 的二次方根的存在条件及计算方法. 首先利用 $\boldsymbol{A}$ 的分块矩阵及其拉直矩阵的秩，获得 $\boldsymbol{A}$ 具有 Kronecker 积分解的充要条件及分解方法. 当此类分解不存在时，利用拉直矩阵的奇异值分解得到相应的最佳逼近分解. 然后应用直积的定义导出了 $\boldsymbol{X}\otimes\boldsymbol{X}=\boldsymbol{A}$ 成立的充要条件及二次方根 $\boldsymbol{X}$ 的计算公式. 最后通过两个数值算例，检验了所给方法的有效性及可行性.

关 键 词：四元数矩阵；Kronecker 积分解；秩；最佳逼近；二次方根

中图分类号：O151.21　　**文献标志码**：A　　**文章编号**：1000-5471(2022)02-0001-06

Kronecker Product Decomposition of Quaternion Matrix and Its Optimal Approximation

HUANG Jingpin，　BAI Rui，　XU Yun，　ZHAO Gengwei

School of Mathematics and Physics, Guangxi University for Nationalities, Nanning 530006, China

Abstract: The decomposition problem of a quaternion matrix has been discussed in Kronecker product sense, namely for a given quaternion matrix $\boldsymbol{A}$, whether two quaternion matrices $\boldsymbol{X}$, $\boldsymbol{Y}$ exists so as to $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{X}\otimes\boldsymbol{Y}$, and the existence conditions of square root of $\boldsymbol{A}$ and its calculation method have been found out. In the whole process, it is mainly used partitioning of $\boldsymbol{A}$ and rank of a vectorized matrix, the necessary and sufficient conditions exists Kronecker product decomposition of $\boldsymbol{A}$ and its decomposition method have been obtained. When the above decomposition does not exist, optimal approximation is given by singular value decomposition of a vectorized matrix. Meanwhile, the conditions for equality $\boldsymbol{X}\otimes\boldsymbol{X}=\boldsymbol{A}$ and the formula for calculating square root $\boldsymbol{X}$ has been deduced by the definition of Kronecker product. Finally, two simulation examples have been given to illustrate the validity and feasibility of the method.

Key words: quaternion matrix; Kronecker product decomposition; rank; optimal approximation; square root

四元数在图像处理及数学基础理论的研究方面均有重要作用[1-2]. 作为矩阵关联运算的普通乘积和直积(也称 Kronecker 积或张量积)，具有广泛的应用性和普适性[3-5]. 文献[6]利用直积理论提出了群对称原

① 收稿日期：2021-02-27
基金项目：国家自然科学基金项目(11661011)；广西民族大学研究生创新项目(gxun-chxps202071).
作者简介：黄敬频，教授，本科，主要从事矩阵计算及应用的研究.

子或分子轨道中产生对称轨道的标准方法与封闭公式. 文献[7]根据 Toeplitz 矩阵可分解为 Kronecker 积的和的性质，提出了一种基于卷积核矩阵的图像迭代复原方法. 文献[8]以直积为主要工具研究了四元数矩阵方程 $\boldsymbol{AXB}+\boldsymbol{CXD}=\boldsymbol{E}$ 的 $\boldsymbol{M}$ 自共轭解. 文献[9-10]讨论了有关 Kronecker 积的最小二乘问题及其在二元多项式回归中的应用. 多年来，关于矩阵 Kronecker 积性质的研究已有丰富的成果[11-13]. 关于矩阵方根的求解方面，文献[14-15]分别采用 Schur 分解和牛顿迭代方法给出了实矩阵的方根计算，文献[16]运用幂法给出了复矩阵的方根计算，文献[17]利用拉直算子讨论了复矩阵 Kronecker 方根的存在性，文献[18]利用牛顿迭代方法给出了 Einstein 积意义下实张量的方根计算. 目前未见关于四元数矩阵的 Kronecker 积分解问题的研究报导，针对这一问题，本文着重考虑直积意义下四元数矩阵的分解及最佳逼近问题.

为讨论方便，用 $Q^{m\times n}$ 表示 $m\times n$ 四元数矩阵全体，$\mathrm{Vec}(\boldsymbol{A})$ 表示矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的按列拉直向量，$\mathrm{rank}(\boldsymbol{A})$ 表示四元数矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的秩，$\|\boldsymbol{A}\|=(\mathrm{tr}\,\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{A})^{\frac{1}{2}}$ 表示四元数矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的 Frobenius 范数.

定义 1 设 $\boldsymbol{X}=(x_{ij})\in Q^{m\times n}$，$\boldsymbol{Y}=(y_{ij})\in Q^{s\times t}$，称

$$\boldsymbol{X}\otimes\boldsymbol{Y}=\begin{pmatrix} x_{11}\boldsymbol{Y} & \cdots & x_{1n}\boldsymbol{Y}\\ \vdots & & \vdots\\ x_{m1}\boldsymbol{Y} & \cdots & x_{mn}\boldsymbol{Y}\end{pmatrix}\in Q^{ms\times nt} \tag{1}$$

是 $\boldsymbol{X}$ 与 $\boldsymbol{Y}$ 的 Kronecker 积. 当 $\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y}$ 中有一个是实矩阵时，称 $\boldsymbol{X}\otimes\boldsymbol{Y}$ 为弱直积[2].

本文具体讨论如下 2 个问题：

问题 1 给定四元数矩阵 $\boldsymbol{A}\in Q^{m^2\times n^2}$，寻找 $\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y}\in Q^{m\times n}$ 使得 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{X}\otimes\boldsymbol{Y}$. 当此分解式不存在时，求 $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y})=\|\boldsymbol{X}\otimes\boldsymbol{Y}-\boldsymbol{A}\|$ 的最佳逼近值.

问题 2 对问题 1 给定的四元数矩阵 $\boldsymbol{A}$，求直积意义下满足 $\boldsymbol{X}\otimes\boldsymbol{X}=\boldsymbol{A}$ 的二次方根 $\boldsymbol{X}$ 的存在条件及计算公式.

1 主要结果

引理 1 设四元数 $q=a_0+a_1i+a_2j+a_3k\in Q\backslash\mathbb{R}$，则 q 的方根总存在，并可表示为

$$\sqrt{q}=x_0+\frac{a_1}{2x_0}i+\frac{a_2}{2x_0}j+\frac{a_3}{2x_0}k \tag{2}$$

其中 $x_0=\pm\sqrt{\dfrac{a_0+\sqrt{a_0^2+a_1^2+a_2^2+a_3^2}}{2}}$，$Q\backslash\mathbb{R}$ 表示非实四元数集.

证 设 $x=x_0+x_1i+x_2j+x_3k$，且 $q=x^2$，直接展开比较可得

$$x_0^2-x_1^2-x_2^2-x_3^2=a_0 \qquad 2x_0x_1=a_1 \qquad 2x_0x_2=a_2 \qquad 2x_0x_3=a_3 \tag{3}$$

将(3)式的第一式两边乘 $4x_0^2$，并将(3)式的第二、三、四式两边平方，得

$$4x_0^4-4a_0x_0^2-(a_1^2+a_2^2+a_3^2)=0 \tag{4}$$

由于 $q\in Q\backslash\mathbb{R}$，所以 $a_1^2+a_2^2+a_3^2\neq 0$，因此由(3)，(4)式容易得 $\sqrt{q}$ 的表达式(2). 证毕.

注 1 当 $q=a_0\in\mathbb{R}$ 时，$\sqrt{q}$ 的存在性是显然的.

对 $\boldsymbol{A}\in Q^{m^2\times n^2}$ 作如下分块

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}_{11} & \cdots & \boldsymbol{A}_{1n}\\ \vdots & & \vdots\\ \boldsymbol{A}_{m1} & \cdots & \boldsymbol{A}_{mn}\end{pmatrix} \tag{5}$$

其中 $\boldsymbol{A}_{st}=(a_{ij}^{(s,t)})\in Q^{m\times n}(i,s=1,2,\cdots,m;\ j,t=1,2,\cdots,n)$. 并记

$$\boldsymbol{L}=(\mathrm{Vec}(\boldsymbol{A}_{11}),\ \cdots,\ \mathrm{Vec}(\boldsymbol{A}_{1n}),\ \cdots,\ \mathrm{Vec}(\boldsymbol{A}_{m1}),\ \cdots,\ \mathrm{Vec}(\boldsymbol{A}_{mn}))\in Q^{mn\times mn} \tag{6}$$

于是关于问题 1 的解，有如下结果：

定理 1 设非零矩阵 $\boldsymbol{A}\in Q^{m^2\times n^2}$ 有分块式(5)，则存在 $\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y}\in Q^{m\times n}$，使得 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{X}\otimes\boldsymbol{Y}$ 的充要条件是 $\mathrm{rank}(\boldsymbol{L})=1$，其中 $\boldsymbol{L}$ 如(6)式所示.

证 若存在 $\boldsymbol{X}_0=(x_{ij})$，$\boldsymbol{Y}_0\in Q^{m\times n}$，使得 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{X}_0\otimes\boldsymbol{Y}_0$，则由 Kronecker 积的定义及(5)式可得

$$\boldsymbol{A}_{ij}=x_{ij}\boldsymbol{Y}_0 \qquad i=1,2,\cdots,m;\ j=1,2,\cdots,n$$

当且当

$$\mathrm{Vec}(\boldsymbol{A}_{ij})=x_{ij}\mathrm{Vec}(\boldsymbol{Y}_0)$$

因此

$$\boldsymbol{L}=(x_{11}\mathrm{Vec}(\boldsymbol{Y}_0),\ \cdots,\ x_{1n}\mathrm{Vec}(\boldsymbol{Y}_0),\ \cdots,\ x_{m1}\mathrm{Vec}(\boldsymbol{Y}_0),\ \cdots,\ x_{mn}\mathrm{Vec}(\boldsymbol{Y}_0))\in Q^{mn\times mn}$$

由于 $\boldsymbol{A}\neq 0$，因此 $\boldsymbol{X}_0\neq 0$，$\boldsymbol{Y}_0\neq 0$，从而 $\mathrm{rank}(\boldsymbol{L})=1$. 反之，若 $\mathrm{rank}(\boldsymbol{L})=1$，不妨设 $\mathrm{Vec}(\boldsymbol{A}_{11})\neq 0$，则 $\boldsymbol{L}$ 各列有比例关系

$$\mathrm{Vec}(\boldsymbol{A}_{ij})=k_{ij}\mathrm{Vec}(\boldsymbol{A}_{11})$$

因此有

$$\boldsymbol{A}_{ij}=k_{ij}\boldsymbol{A}_{11} \qquad i=1,2,\cdots,m;\ j=1,2,\cdots,n$$

取 $\boldsymbol{X}_0=(k_{ij})$，$\boldsymbol{Y}_0=\boldsymbol{A}_{11}$，则存在分解式 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{X}_0\otimes\boldsymbol{Y}_0$. 证毕.

注 2　由定理 1 的证明过程可知，当 $\boldsymbol{A}$ 的 Kronecker 积分解存在时，只要确定 $\boldsymbol{Y}_0$ 以及所有 $\boldsymbol{A}_{ij}$ 的左比例系数 k_{ij}，那么 $\boldsymbol{X}_0=(k_{ij})$ 和 $\boldsymbol{Y}_0$ 就是 $\boldsymbol{A}$ 的一组分解.

同时可得如下推论：

推论 1　在定理 1 的条件下，四元数矩阵 $\boldsymbol{A}$ 存在 Kronecker 积分解的充要条件是存在四元数向量 $\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}\in Q^{mn\times 1}$ 使得 $\boldsymbol{L}=\boldsymbol{u}\boldsymbol{v}^{\mathrm{T}}$.

证　根据定理 1 及 $\mathrm{rank}(\boldsymbol{L})=1$ 可知，存在可逆矩阵 $\boldsymbol{P},\boldsymbol{Q}\in Q^{mn\times mn}$，使得

$$\boldsymbol{L}=\boldsymbol{P}\begin{pmatrix}1&\boldsymbol{0}\\\boldsymbol{0}&\boldsymbol{0}\end{pmatrix}\boldsymbol{Q}=\boldsymbol{P}\begin{pmatrix}1&\boldsymbol{0}\\\boldsymbol{0}&\boldsymbol{0}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&\boldsymbol{0}\\\boldsymbol{0}&\boldsymbol{0}\end{pmatrix}\boldsymbol{Q}=\boldsymbol{u}\boldsymbol{v}^{\mathrm{T}}$$

其中 $\begin{pmatrix}1&\boldsymbol{0}\\\boldsymbol{0}&\boldsymbol{0}\end{pmatrix}$ 表示(1，1)元为 1，其余元素为 0 的 $mn\times mn$ 矩阵，$\boldsymbol{u}=\boldsymbol{P}(\cdot,1)$，$\boldsymbol{v}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{Q}(1,\cdot)$ 分别是 $\boldsymbol{P},\boldsymbol{Q}$ 的第 1 列和第 1 行. 证毕.

当 $\boldsymbol{A}$ 的 Kronecker 积分解不存在时，我们讨论它的最佳逼近问题. 对此，假设(6)式中 $\boldsymbol{L}$ 的奇异值分解为

$$\boldsymbol{L}=\boldsymbol{U}\begin{pmatrix}\Sigma_r&\boldsymbol{0}\\\boldsymbol{0}&\boldsymbol{0}\end{pmatrix}\boldsymbol{V}^{*} \tag{7}$$

其中 $\boldsymbol{U},\boldsymbol{V}\in U^{mn\times mn}$ 均为四元数酉阵，$r=\mathrm{rank}(\boldsymbol{L})$，$\Sigma_r=\mathrm{diag}(d_1,\cdots,d_r)$，$d_1\geq\cdots\geq d_r>0$. 根据推论 1 可知，求 $F(\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y})=\|\boldsymbol{X}\otimes\boldsymbol{Y}-\boldsymbol{A}\|$ 的最佳逼近值，等价于求 $\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}\in Q^{mn\times 1}$ 使得

$$\|\boldsymbol{u}\boldsymbol{v}^{\mathrm{T}}-\boldsymbol{L}\|=\min \tag{8}$$

记 $\tilde{\boldsymbol{u}}=\boldsymbol{U}^{*}\boldsymbol{u}=(u_1,u_2,\cdots,u_{mn})^{\mathrm{T}}$，$\tilde{\boldsymbol{v}}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{v}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{V}=(v_1,v_2,\cdots,v_{mn})$. 于是有：

定理 2　设非零矩阵 $\boldsymbol{A}\in Q^{m^2\times n^2}$ 有分块式(5)和(6)，则存在 $\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}\in Q^{mn\times 1}$ 使得(8)式成立，其中

$$\boldsymbol{u}=\pm\sqrt{d_1}\boldsymbol{U}(\cdot,1) \qquad \boldsymbol{v}^{\mathrm{T}}=\pm\sqrt{d_1}\boldsymbol{V}^{*}(1,\cdot) \tag{9}$$

$\boldsymbol{U}(\cdot,1)$，$\boldsymbol{V}^{*}(1,\cdot)$ 分别是(7)式中 $\boldsymbol{U},\boldsymbol{V}^{*}$ 的第 1 列和第 1 行，d_1 是 $\boldsymbol{L}$ 的最大奇异值.

证　根据 $\boldsymbol{L}$ 的奇异值分解(7)式以及 Frobenius 范数酉乘积不变性得

$$\begin{aligned}\|\boldsymbol{u}\boldsymbol{v}^{\mathrm{T}}-\boldsymbol{L}\|^2=&\left\|\boldsymbol{u}\boldsymbol{v}^{\mathrm{T}}-\boldsymbol{U}\begin{pmatrix}\Sigma_r&\boldsymbol{0}\\\boldsymbol{0}&\boldsymbol{0}\end{pmatrix}\boldsymbol{V}^{*}\right\|^2=\\&\left\|\boldsymbol{U}^{*}\boldsymbol{u}\boldsymbol{v}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{V}-\begin{pmatrix}\Sigma_r&\boldsymbol{0}\\\boldsymbol{0}&\boldsymbol{0}\end{pmatrix}\right\|^2=\\&\left\|\tilde{\boldsymbol{u}}\tilde{\boldsymbol{v}}^{\mathrm{T}}-\begin{pmatrix}\Sigma_r&\boldsymbol{0}\\\boldsymbol{0}&\boldsymbol{0}\end{pmatrix}\right\|^2\end{aligned} \tag{10}$$

于是由(10)式可得 $\|\boldsymbol{u}\boldsymbol{v}^{\mathrm{T}}-\boldsymbol{L}\|=\min$ 等价于 $\|\tilde{\boldsymbol{u}}\tilde{\boldsymbol{v}}^{\mathrm{T}}-\mathrm{diag}(\Sigma_r,\boldsymbol{0})\|^2=\min$，即

$$\|(u_1,u_2,\cdots,u_{mn})^{\mathrm{T}}(v_1,v_2,\cdots,v_{mn})-\mathrm{diag}(d_1,\cdots,d_r,0,\cdots,0)\|^2=\min \tag{11}$$

根据 $\mathrm{diag}(d_1,\cdots,d_r,0,\cdots,0)$ 的对称半正定性，可取

$$u_i = v_i \in \mathbb{R} \qquad i = 1, \cdots, r$$

$$u_i = v_i = 0 \qquad i = r+1, \cdots, mn$$

因此由(11)式得

$$f(u_1, \cdots, u_r) = \sum_{i,j=1}^{r} (u_i u_j - \delta_{ij} d_i)^2 = \min \tag{12}$$

其中 $\delta_{ij} \in \{0, 1\}$. 对(12)式中函数 $f(u_1, \cdots, u_r)$ 求偏导数，得

$$\frac{\partial f}{\partial u_i} = \sum_{j=1}^{r} 2(u_i u_j - \delta_{ij} d_i) 2u_j = 0 \qquad i = 1, 2, \cdots, r \tag{13}$$

方程组(13)等价于

$$u_i(u_1^2 + u_2^2 + \cdots + u_r^2 - d_i) = 0 \qquad i = 1, 2, \cdots, r$$

由此可得

$$u_i = 0$$

或

$$u_1^2 + u_2^2 + \cdots + u_r^2 = d_i \qquad i = 1, 2, \cdots, r$$

由 $d_1 \geqslant \cdots \geqslant d_r > 0$ 得 $f(u_1, \cdots, u_r)$ 的最小值点为 $u_1 = \pm\sqrt{d_1}$, $u_2 = u_3 = \cdots = u_r = 0$，这时

$$f_{\min}(u_1, \cdots, u_r) = f(\pm\sqrt{d_1}, 0, \cdots, 0) = d_2^2 + \cdots + d_r^2$$

再由 $\boldsymbol{U}^* \boldsymbol{u} = (u_1, u_2, \cdots, u_{mn})^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{v}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{V} = (v_1, v_2, \cdots, v_{mn})$，可得

$$\boldsymbol{u} = \boldsymbol{U}(\pm\sqrt{d_1}, 0, \cdots, 0)^{\mathrm{T}} = \pm\sqrt{d_1}\boldsymbol{U}(\cdot, 1)$$

$$\boldsymbol{v}^{\mathrm{T}} = (\pm\sqrt{d_1}, 0, \cdots, 0)\boldsymbol{V}^* = \pm\sqrt{d_1}\boldsymbol{V}^*(1, \cdot)$$

即表达式(9)成立. 证毕.

根据四元数方根总存在的特点，可得问题 2 的解如下：

定理 3 设非零矩阵 $\boldsymbol{A} \in Q^{m^2 \times n^2}$ 有分块式(5)，则存在 $\boldsymbol{X} \in Q^{m \times n}$，使得 $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{X} \otimes \boldsymbol{X}$ 的充要条件是(5)式中存在非零块 $\boldsymbol{A}_{pq}$(其中 $a_{pq}^{(p,q)} \neq 0$)，使得$(a_{pq}^{(p,q)})^{-\frac{1}{2}} \boldsymbol{A}_{pq} = \boldsymbol{B}$，且满足

$$\boldsymbol{A}_{st} = b_{st} \boldsymbol{B} \qquad s = 1, 2, \cdots, m;\ t = 1, 2, \cdots, n \tag{14}$$

这时 $\boldsymbol{X}_0 = \boldsymbol{B} \in Q^{m \times n}$ 就是 $\boldsymbol{A}$ 的二次方根.

证 充分性是显然的. 下证必要性. 若存在 $\boldsymbol{X}_0 = \boldsymbol{B} = (b_{ij}) \in Q^{m \times n}$ 使得 $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{B} \otimes \boldsymbol{B}$，则由分块式(5)可得

$$\boldsymbol{A}_{st} = b_{st} \boldsymbol{B} \qquad s = 1, 2, \cdots, m;\ t = 1, 2, \cdots, n \tag{15}$$

由于 $\boldsymbol{A} \neq \boldsymbol{0}$，因此 $\boldsymbol{B} \neq \boldsymbol{0}$. 根据引理 1，四元数方根总存在，所以存在 $b_{pq} = (a_{pq}^{(p,q)})^{\frac{1}{2}} \neq 0$，于是由(15)式，令 $s = p$, $t = q$，可得 $\boldsymbol{B} = (a_{pq}^{(p,q)})^{-\frac{1}{2}} \boldsymbol{A}_{pq}$，即(14)式成立. 证毕.

注 3 当(14)式成立时，显然有 $\mathrm{rank}(\boldsymbol{L}) = 1$，因此 $\mathrm{rank}(\boldsymbol{L}) = 1$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的二次方根存在的必要条件，但不是充分的(见算例 1).

注 4 (14)式包含有 $a_{st}^{(s,t)} = 0$ 时 $\boldsymbol{A}_{st} = 0$ 的条件. 因此，当存在某个 $a_{st}^{(s,t)} = 0$ 但对应的 $\boldsymbol{A}_{st} \neq \boldsymbol{0}$ 时，$\boldsymbol{A}$ 的二次方根不存在.

2 数值算例

例 1 已知四元数矩阵

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} -k & j & 0 & i & 1 & 0 & j & k & 0 \\ i & -j & -1 & k & -1 & j & -1 & -k & -i \\ -i & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & i & 0 \\ -k & 1 & -j & 0 & 0 & 0 & -j & -i & k \end{pmatrix} \in Q^{2^2 \times 3^2}$$

试讨论是否存在 $\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y} \in Q^{2 \times 3}$，使得 $\boldsymbol{A}$ 具有 Kronecker 积分解.

解 对 $\boldsymbol{A}$ 作分解式(5)，得

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}_{11} & \boldsymbol{A}_{12} & \boldsymbol{A}_{13}\\ \boldsymbol{A}_{21} & \boldsymbol{A}_{22} & \boldsymbol{A}_{23}\end{pmatrix}$$

其中

$$\boldsymbol{A}_{11}=\begin{pmatrix}-k & j & 0\\ i & -j & -1\end{pmatrix}\qquad \boldsymbol{A}_{12}=\begin{pmatrix}i & 1 & 0\\ k & -1 & j\end{pmatrix}\qquad \boldsymbol{A}_{13}=\begin{pmatrix}j & k & 0\\ -1 & -k & -i\end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{A}_{21}=\begin{pmatrix}-i & -1 & 0\\ -k & 1 & -j\end{pmatrix}\qquad \boldsymbol{A}_{22}=\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\qquad \boldsymbol{A}_{23}=\begin{pmatrix}-1 & i & 0\\ -j & -i & k\end{pmatrix}$$

直接计算可知

$$\operatorname{rank}(\boldsymbol{L})=\operatorname{rank}(\operatorname{Vec}(\boldsymbol{A}_{11}),\operatorname{Vec}(\boldsymbol{A}_{12}),\operatorname{Vec}(\boldsymbol{A}_{13}),\operatorname{Vec}(\boldsymbol{A}_{21}),\operatorname{Vec}(\boldsymbol{A}_{22}),\operatorname{Vec}(\boldsymbol{A}_{23}))=1$$

因此，根据定理 1 可知，存在 $\boldsymbol{X}_0,\boldsymbol{Y}_0\in Q^{2\times 3}$，使得 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{X}_0\otimes\boldsymbol{Y}_0$. 事实上，由

$$\boldsymbol{A}_{11}=j\cdot\begin{pmatrix}i & 1 & 0\\ k & -1 & j\end{pmatrix}\qquad \boldsymbol{A}_{12}=1\cdot\begin{pmatrix}i & 1 & 0\\ k & -1 & j\end{pmatrix}\qquad \boldsymbol{A}_{13}=k\cdot\begin{pmatrix}i & 1 & 0\\ k & -1 & j\end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{A}_{21}=-1\cdot\begin{pmatrix}i & 1 & 0\\ k & -1 & j\end{pmatrix}\qquad \boldsymbol{A}_{22}=0\cdot\begin{pmatrix}i & 1 & 0\\ k & -1 & j\end{pmatrix}\qquad \boldsymbol{A}_{23}=i\cdot\begin{pmatrix}i & 1 & 0\\ k & -1 & j\end{pmatrix}$$

得 Kronecker 积分解

$$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{X}_0\otimes\boldsymbol{Y}_0=\begin{pmatrix}j & 1 & k\\ -1 & 0 & i\end{pmatrix}\otimes\begin{pmatrix}i & 1 & 0\\ k & -1 & j\end{pmatrix}$$

在例 1 中，注意到 $a_{13}^{(1,3)}=0$，但 $\boldsymbol{A}_{13}\neq\boldsymbol{0}$，因此根据注 4，$\boldsymbol{A}$ 的二次方根不存在.

例 2　已知四元数矩阵

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2i & 0 & j+k & 0 & 0 & 0 & j-k & 0 & -1\\ -1+i & k-j & 1+i+j-k & 0 & 0 & 0 & -k & i & -i+j\\ -1+i & 0 & k & j+k & 0 & -i & 1+i-j-k & 0 & i+j\\ -1 & -j & i+j & j & -1 & 1+k & i-j & 1+k & -2k\end{pmatrix}\in Q^{2^2\times 3^2}$$

试讨论 $\boldsymbol{A}$ 的二次方根的存在性.

解　对 $\boldsymbol{A}$ 作分解式(5)，得

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}_{11} & \boldsymbol{A}_{12} & \boldsymbol{A}_{13}\\ \boldsymbol{A}_{21} & \boldsymbol{A}_{22} & \boldsymbol{A}_{23}\end{pmatrix}$$

其中

$$\boldsymbol{A}_{11}=\begin{pmatrix}2i & 0 & j+k\\ -1+i & -j+k & 1+i+j-k\end{pmatrix}\qquad \boldsymbol{A}_{12}=\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{A}_{13}=\begin{pmatrix}j-k & 0 & -1\\ -k & i & -i+j\end{pmatrix}\qquad \boldsymbol{A}_{21}=\begin{pmatrix}-1+i & 0 & k\\ -1 & -j & i+j\end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{A}_{22}=\begin{pmatrix}j+k & 0 & -i\\ j & -1 & 1+k\end{pmatrix}\qquad \boldsymbol{A}_{23}=\begin{pmatrix}1+i-j-k & 0 & i+j\\ i-j & 1+k & -2k\end{pmatrix}$$

注意到 $a_{21}^{(2,1)}=-1\neq 0$，取 $(a_{21}^{(2,1)})^{-\frac{1}{2}}=-i$，可得

$$\boldsymbol{B}=(a_{21}^{(2,1)})^{-\frac{1}{2}}\boldsymbol{A}_{21}=\begin{pmatrix}1+i & 0 & j\\ i & k & 1-k\end{pmatrix}$$

直接计算可知

$$\boldsymbol{A}_{st}=b_{st}\boldsymbol{B}\qquad s=1,2;\ t=1,2,3$$

根据定理 3，$\boldsymbol{A}$ 存在二次方根 $\boldsymbol{X}_0=\boldsymbol{B}$，即

$$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{X}_0\otimes\boldsymbol{X}_0=\begin{pmatrix}1+i & 0 & j\\ i & k & 1-k\end{pmatrix}\otimes\begin{pmatrix}1+i & 0 & j\\ i & k & 1-k\end{pmatrix}$$

3 结论

对于给定的$m^2 \times n^2$四元数矩阵$\boldsymbol{A}$，利用$\boldsymbol{A}$的分块矩阵(5)式，并由Vec构造的$mn \times mn$矩阵$\boldsymbol{L}$的秩，获得$\boldsymbol{A}$具有直积分解的充要条件及其分解方法. 当此类分解不存在时，由$\boldsymbol{L}$的奇异值分解，以及求$F(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y}) = \| \boldsymbol{X} \otimes \boldsymbol{Y} - \boldsymbol{A} \|$的最佳逼近解等价于求极小范数问题(8)，得到了问题1的解. 对于问题2，应用四元数方根的存在性与Kronecker积的定义，得到了$\boldsymbol{X} \otimes \boldsymbol{X} = \boldsymbol{A}$成立的充要条件及其直积意义下二次方根$\boldsymbol{X}$的计算公式.

参考文献:

[1] 杨建翠. 基于四元数离散Fourier变换的医学图像融合算法[J]. 西南师范大学学报(自然科学版), 2020, 45(2): 31-39.

[2] 李文亮. 四元数矩阵[M]. 长沙: 国防科技大学出版社, 2002: 24.

[3] 肖汉, 肖诗洋, 李彩林, 等. 异构平台上基于OpenCL的矩阵乘并行算法[J]. 西南大学学报(自然科学版), 2020, 42(11): 147-153.

[4] VAN LOAN C F. The Ubiquitous Kronecker Product [J]. Journal of Computational and Applied Mathematics, 2000, 123: 85-100.

[5] 兰美辉, 范全润, 高炜. 本体稀疏矩阵学习以及在相似度计算中的应用[J]. 西南大学学报(自然科学版), 2020, 42(1): 118-123.

[6] 周泰锦. 对称轨道及张量的新理论方法[J]. 中国科学(B辑), 1998, 28(3): 235-242.

[7] 张玉叶, 姜彬, 王春歆. Kronecker积重构卷积核矩阵的图像迭代复原方法[J]. 数据采集与处理, 2011, 26(1): 80-84.

[8] 蓝家新, 黄敬频, 王敏, 等. 四元数矩阵方程$AXB+CXD=E$的M自共轭解[J]. 西南师范大学学报(自然科学版), 2019, 44(8): 1-6.

[9] FAUSETT D W, FULTON C T, HASHISH H. Improved Parallel QR Method for Large Least Squares Problems Involving Kronecker Products [J]. Journal of Computational and Applied Mathematics, 1997, 78(1): 63-78.

[10] MARCO A, MARTINEZ J J, VIANA R. Least Squares Problems Involving Generalized Kronecker Products and Application to Bivariate Polynomial Regression [J]. Numerical Algorithms, 2019, 82(1): 21-39.

[11] 佟文廷. 关于矩阵张量积的谱[J]. 数学学报, 1980, 23(1): 128-134.

[12] 高磊, 井霞, 周锦涛. C-矩阵Kronecker积与Hadamard积的若干结论[J]. 西南师范大学学报(自然科学版), 2018, 43(4): 1-5.

[13] 李光辉, 燕飞. 矩阵的分块Kronecker积[J]. 数学的实践与认识, 2020, 50(5): 188-194.

[14] BJÖRCK A, HAMMARLIMG S. A Schur Method for the Square Root of A Matrix [J]. Linear Algebra and Its Applications, 1983, 52: 127-140.

[15] HIGHAM N J. Newton's Method for the Matrix Square Root [J]. Mathematics of Computation, 1986, 46(174): 537-549.

[16] HASAN M A. A Power Method for Computing Square Roots of Complex Matrices [J]. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 1997, 213(2): 393-405.

[17] OJEDA I. Kronecker Square Roots and the Block Vec Matrix [J]. The American Mathematical Monthly, 2015, 122(1): 60-64.

[18] DUAN X F, WANG C Y, LI C M. Newton's Method for Solving the Tensor Square Root Problem [J]. Applied Mathematics Letters, 2019, 98: 57-62.

责任编辑 廖坤