第 47 卷 第 2 期　　西南师范大学学报(自然科学版)　　2022 年 2 月
Vol. 47 No. 2　　Journal of Southwest China Normal University (Natural Science Edition)　　Feb. 2022

DOI:10.13718/j.cnki.xsxb.2022.02.002

有限群的局部化 $\mathscr{H}C$-子群[①]

周红，　刘建军

西南大学 数学与统计学院，重庆 400715

摘要：H 是有限群 G 的子群，如果存在 G 的正规子群 T，使得 $G=HT$ 且 $H^g\cap N_T(H)\leqslant H$ 对任意 $g\in G$ 都成立，则称 H 为 G 的 $\mathscr{H}C$-子群. 本文研究了 Sylow 子群的极大子群是局部子群的 $\mathscr{H}C$ -子群时群的结构，给出了有限群为 p -幂零群以及超可解群的一些条件.

关　键　词：$\mathscr{H}C$ -子群；p -幂零群；超可解群；饱和群系

中图分类号：**O152.1**　　**文献标志码**：**A**　　**文章编号**：1000－5471(2022)02－0007－04

On Local $\mathscr{H}C$-Subgroups of Finite Groups

ZHOU Hong，　LIU Jianjun

School of Mathematics and Statistics，Southwest University，Chongqing 400715，China

Abstract：A subgroup H of a finite group G is called an $\mathscr{H}C$-subgroup of G if there exists a normal subgroup T of G such that $G=HT$ and $H^g\cap N_T(H)\leqslant H$ for all $g\in G$. In this paper, the structure of finite groups has been investigated based on assumption that all maximal subgroups of Sylow subgroups are $\mathscr{H}C$-subgroups in local subgroup, and give some conditions for finite groups to be p-nilpotent and supersolvable.

Key words：$\mathscr{H}C$-subgroups；p-nilpotent groups；supersolvable groups；saturated formations

本文所讨论的群皆为有限群. 许多学者利用子群的广义正规性来研究有限群的结构，并得到了非常有意义的结果[1-2]. 在这方面，文献[3]引入了 $\mathscr{H}$-子群：设 H 是群 G 的子群，如果 $H^g\cap N_G(H)\leqslant H$ 对任意 $g\in G$ 都成立，则称 H 是 G 的 $\mathscr{H}$-子群，并通过 $\mathscr{H}$-子群对有限群的结构进行了刻画. 文献[4]对这个概念进行了推广，并定义了 $\mathscr{H}C$ -子群：设 H 是群 G 的子群，如果存在 G 的正规子群 T，使得 $G=HT$ 且 $H^g\cap N_T(H)\leqslant H$ 对任意 $g\in G$ 都成立，则称 H 是 G 的 $\mathscr{H}C$ -子群. 应用此概念，文献[5-8]研究了有限群 G 的某些素数幂阶子群是 $\mathscr{H}C$ -子群时有限群的结构，获得了非常丰富的研究成果.

本文是以上研究的延伸，考虑有限群 G 的 Sylow p -子群 P 的正规化子 $N_G(P)$ 的 $\mathscr{H}C$ -子群对群 G 的影响.

引理 1[4]　设 H 和 K 是群 G 的子群，

(i) 如果 $H\leqslant K$ 且 H 是 G 的 $\mathscr{H}C$ -子群，则 H 是 K 的 $\mathscr{H}C$ -子群；

(ii) 如果 $N\trianglelefteq G$，使得 $N\leqslant H$，则 H 是 G 的 $\mathscr{H}C$ -子群当且仅当 H/N 是 G/N 的 $\mathscr{H}C$ -子群.

---

① 收稿日期：2021－06－22

基金项目：国家自然科学基金项目(11301426)；中央高校基本科研业务费项目(XDJK2020B052)；西南大学教改项目(2019JY096).

作者简介：周红，硕士研究生，主要从事群论的研究.

通信作者：刘建军，副教授.

引理 2[4] 设 H 是群 G 的 $\mathscr{H}C$ -子群，且 H 是 G 的 p -子群. 如果 N 是 G 的正规子群且 $(p, |N|)=1$，则 HN 与 HN/N 分别是 G 与 G/N 的 $\mathscr{H}C$ -子群.

引理 3 设 N 是群 G 的正规子群，P 是 G 的 Sylow p -子群. 假设 P 的每个极大子群是 $N_G(P)$ 的 $\mathscr{H}C$ -子群. 当以下条件之一成立时：

(i) N 是 P 的子群；

(ii) $(p, |N|)=1$.

则 PN/N 的每个极大子群是 $N_{G/N}(PN/N)$ 的 $\mathscr{H}C$ -子群.

证 若 $N \leqslant P$，则由引理 1 直接验证可得.

现在假设 $(p, |N|)=1$. 令 M/N 是 PN/N 的极大子群，则

$$M = N(M \cap P)$$

$$|(PN/N):(M/N)| = |PN:N(M \cap P)| = |P:M \cap P| = p$$

故 $P_1 = M \cap P$ 是 P 的极大子群. 由已知可得 P_1 是 $N_G(P)$ 的 $\mathscr{H}C$ -子群，则存在 $N_G(P)$ 的正规子群 T，使得

$$N_G(P) = P_1 T \qquad (P_1)^g \cap N_T(P_1) \leqslant P_1$$

对任意 $g \in N_G(P)$ 都成立. 从而

$$N_G(P)N = (P_1 N)T$$

$$(P_1 N)^{gn} \cap N_T(P_1 N) = (P_1^g \cap N_T(P_1)N)N \leqslant (P_1^g \cap N_T(P_1))N \leqslant P_1 N$$

对任意 $g \in N_G(P)$，$n \in \mathbb{N}$ 都成立. 于是 $P_1 N$ 是 $N_G(P)N$ 的 $\mathscr{H}C$ -子群. 由引理 1 可知，$P_1 N/N = M/N$ 是 $N_{G/N}(PN/N) = N_G(P)N/N$ 的 $\mathscr{H}C$ -子群.

引理 4[4] 设 N 是群 G 的极小正规子群，且 H 是 N 的子群. 如果 H 是 G 的 $\mathscr{H}C$ -子群，则 H 是 G 的 $\mathscr{H}$-子群.

引理 5[3] 设 H 是群 G 的 $\mathscr{H}$-子群. 如果 $H \trianglelefteq\trianglelefteq K \leqslant G$，则 $H \trianglelefteq K$.

定理 1 设 p 是群 G 的阶的最小素因子，P 是 G 的 Sylow p -子群. 如果 P 的每个极大子群是 $N_G(P)$ 的 $\mathscr{H}C$ -子群，且存在 $H \leqslant G$ 使得 H 是 G 的 $\mathscr{H}C$ -子群，并满足 $P' \leqslant H \leqslant \Phi(P)$，则 G 是 p -幂零的.

证 假设结论不真，且设 G 为极小阶反例，分以下几步完成证明：

步骤 1 $O_{p'}(G)=1$.

假设 $O_{p'}(G) \neq 1$. 根据引理 2 和引理 3，$G/O_{p'}(G)$ 满足定理 1 的条件. 由 G 的极小性，$G/O_{p'}(G)$ 是 p -幂零的，从而 G 是 p -幂零的，矛盾.

步骤 2 若 $P \leqslant K < G$，则 K 是 p -幂零的. 特别地，$N_G(P)$ 是 p -幂零的.

因为

$$N_K(P) = N_G(P) \cap K \leqslant N_G(P)$$

所以由引理 1 可得，P 的每个极大子群都是 $N_K(P)$ 的 $\mathscr{H}C$ -子群，且存在 $H \leqslant K$，使得 H 是 K 的 $\mathscr{H}C$ -子群，并满足 $P' \leqslant H \leqslant \Phi(P)$，因此 K 满足定理 1 的假设条件. 由 G 的极小性知，K 是 p -幂零的. 如果 $N_G(P)=G$，则由文献[3]的引理 2.7 得到 G 是 p -幂零的. 故 $N_G(P) < G$，且 $N_G(P)$ 是 p -幂零的.

步骤 3 $H \neq 1$.

假设 $H=1$，则 $P'=1$，即 P 是交换 p -群. 由步骤 2 可知，$N_G(P)$ 是 p -幂零的. 设任意的 $Q \in \mathrm{Syl}_q(N_G(P))$，其中 $q \neq p$，那么 $PQ \leqslant N_G(P)$，因此 PQ 是 p -幂零的且 $PQ = P \times Q$，即 $Q \leqslant C_G(P)$. 因为 P 是交换 p -群，所以 $P \leqslant C_G(P)$. 由 q 的任意性得 $N_G(P) = C_G(P)$. 由 Burnside 定理知，G 是 p -幂零的，矛盾.

步骤 4 G' 是 p -幂零的.

因为 H 是 G 的 $\mathscr{H}C$ -子群，所以存在 G 的正规子群 T，使得

$$G = HT \qquad H^g \cap N_T(H) \leqslant H$$

对于任意 $g \in G$ 都成立. 因为

$$P = P \cap G = P \cap HT = P \cap T$$

所以 $P \leqslant T$，从而 $G = T$. 由于 $P' \leqslant H$，且 P/P' 是交换的，因此 $H/P' \trianglelefteq P/P'$，故 $H \trianglelefteq P$. 于是

$$P \cap (P')^g \leqslant P \leqslant N_G(H)$$

又因为 $P \cap (P')^g \leqslant H^g$，所以

$$P \cap (P')^g \leqslant H^g \cap N_G(H)$$

因此

$$P \cap (P')^g = T \cap P \cap (P')^g \leqslant T \cap H^g \cap N_G(H) = H^g \cap N_T(H) \leqslant H \leqslant \Phi(P)$$

由文献[9] 的 Grün 定理，可得

$$P \cap G' = \langle P \cap (P')^g ,\ P \cap (N_G(P))' \mid g \in G \rangle$$

根据 $N_G(P)$ 的 p -幂零性，可得

$$P \cap G' = \langle P \cap (P')^g \mid g \in G \rangle \leqslant \Phi(P)$$

应用文献[10] 的 Tate 定理，G' 是 p -幂零的.

步骤 5

由步骤 4，可以假设 B 是 G' 的正规 p -补，则 $B \trianglelefteq G$，这与步骤 1 的结论矛盾，因此 $G' \leqslant P$. 这时

$$G' = P \cap G' \leqslant \Phi(P)$$

故 $G' \leqslant \Phi(G)$，从而 G 是 p -幂零的.

注 1

(i)　定理 1 中的假设“H 是 G 的 $\mathscr{H}C$ -子群”是必不可少的. 例如，令 $G = S_4$ 且 $P \in \mathrm{Syl}_2(G)$. 因为 $P = N_G(P)$，所以 P 的每个极大子群都是 $N_G(P)$ 的 $\mathscr{H}C$ -子群，且 $P' = \Phi(P)$ 是 $\mathscr{H}C$ -子群. 但 G 不是 2 -幂零的.

(ii)　定理 1 中的假设“p 是 $|G|$ 的最小素因子”也是必不可少的. 例如，设 P 是 A_5 的 Sylow 3 -子群. 显然 P 的每个极大子群都是 $N_G(P)$ 的 $\mathscr{H}C$ -子群，且 $P' = \Phi(P)$ 是 $\mathscr{H}C$ -子群. 但 A_5 不是 3 -幂零的.

推论 1　设 p 是整除群 G 的阶的素因子. 如果对任意的 p，都存在 G 的 Sylow p -子群 P，使得 P 的每个极大子群是 $N_G(P)$ 的 $\mathscr{H}C$ -子群，且存在 $H \leqslant G$，使得 H 是 G 的 $\mathscr{H}C$ -子群，并满足 $P' \leqslant H \leqslant \Phi(P)$，那么 G 是超可解型的 Sylow 塔群.

证　当 p 是群 G 的阶的最小素因子时，G 是 p -幂零的. 设 K 是 G 的正规 p -补，显然 K 满足假设，由归纳法可知 K 是超可解型的 Sylow 塔群. 因此 G 是超可解型的 Sylow 塔群.

定理 2　设 $\mathscr{F}$ 是包含超可解群系 $\mathscr{U}$ 的饱和群系，N 是群 G 的正规子群，且 $G/N \in \mathscr{F}$. 如果对 N 的任一 Sylow p -子群 P，P 的每个极大子群是 $N_G(P)$ 的 $\mathscr{H}C$ -子群，且存在 $H \leqslant G$，使得 H 是 G 的 $\mathscr{H}C$ -子群并满足 $P' \leqslant H \leqslant \Phi(P)$，则 $G \in \mathscr{F}$.

证　假设定理 2 不真，且设 G 为极小阶反例. 接下来我们分情况进行讨论：

情形 1　N 是 p -群.

假设 $\Phi(N) \neq 1$. 根据

$$\Phi(N) \trianglelefteq G \qquad G/\Phi(N) \cong (G/\Phi(N))/(N/\Phi(N))$$

并应用引理 2 和引理 3，可得 $G/\Phi(N)$ 满足定理 2 的假设条件. 由 G 的极小性得 $G/\Phi(N) \in \mathscr{F}$，故 $G/\Phi(G) \in \mathscr{F}$，从而 $G \in \mathscr{F}$，矛盾. 因此 $\Phi(N) = 1$.

设 L 是 G 包含在 N 的极小正规子群，容易证得 G/L 满足定理 2 的假设条件. 由 G 的极小性，可得 $G/L \in \mathscr{F}$. 不难看出 $L \nleqslant \Phi(G)$. 由文献[11] 的引理 2.6，可以假定

$$N = L_1 \times L_2 \times \cdots \times L_s$$

这里 $L_1, \cdots, L_s$ 皆是 G 的极小正规子群. 易证 $G/L_i \in \mathscr{F}$，其中 $i \in \{1, \cdots, s\}$. 如果 $s > 1$，则

$$G \cong G/(L_1 \cap L_2) \in \mathscr{F}$$

因此 $N = L_1$ 是 G 唯一的极小正规子群. 令 N_1 是 N 的极大子群，根据假设条件，N_1 是 $N_G(N) = G$ 的 $\mathscr{H}C$ -子群. 由引理 4 可知，N_1 是 G 的 $\mathscr{H}$-子群. 再应用引理 5，可得 $N_1 \trianglelefteq G$. 由 N 的极小正规性得 $N_1 = 1$，故 N 是 p 阶循环群. 应用文献[12] 的引理 2.16，可以得出 $G \in \mathscr{F}$，矛盾.

情形 2　N 不是素数幂阶群.

由推论 1 可得，N 是一个超可解型的 Sylow 塔群. 令 q 是 N 的阶的最大素因子，Q 是 N 的 Sylow q -子

群，则

$$Q \trianglelefteq G \qquad (G/Q)/(N/Q) \cong G/N \in \mathscr{F}$$

显然 G/Q 对其正规子群 N/Q 满足定理2的假设条件. 由 G 的极小性得 $G/Q \in \mathscr{F}$，根据情形1可得 $G \in \mathscr{F}$. 定理2得证.

推论2　对于群 G 的任一 Sylow p-子群 P. 如果 P 的每个极大子群是 $N_G(P)$ 的 $\mathscr{H}C$-子群，且存在 $H \leqslant G$，使得 H 是 G 的 $\mathscr{H}C$-子群并满足 $P' \leqslant H \leqslant \Phi(P)$，则 G 是超可解群.

参考文献：

[1] 袁媛，唐康，刘建军. S-拟正规嵌入子群与有限群的 p-幂零性[J]. 西南师范大学学报(自然科学版)，2020，45(6)：1-4.

[2] 高建玲，毛月梅. 有限群的δ-置换子群[J]. 西南大学学报(自然科学版)，2021，43(10)：105-109.

[3] BIANCHI M，MAURI A G B，HERZOG M，et al. On Finite Sovlable Groups in Which Normality is Transitive Relation[J]. Journal of Group Theory，2000，3(2)：147-156.

[4] WEI X B，GUO X Y，On $\mathscr{H}C$-Subgroups and the Structure of Finite Groups[J]. Communications in Algebra，2012，40(9)：3245-3256.

[5] WEI X B. On $\mathscr{H}C$-Subgroups and its Influence on the Structure of Finite Groups[J]. Indagationes Mathematicae，2015，26(3)：468-475.

[6] GUO X Y，WU N. On Finite Groups with $\mathscr{H}C$-Subgroups[J]. Journal of Algebra and Its Applications，2015，14(5)：1550063(1-7).

[7] GAO J X，GUO X Y. A Note on $\mathscr{H}C$-Subgroups of Finite Groups[J]. Bulletin of the Iranian Mathematical Society，2018，44(2)：505-511.

[8] WEI X B. Finite Groups with Some Minimal Subgroups are $\mathscr{H}C$-Subgroups[J]. Journal of Algebra and Its Applications，2017，16(2)：1750062(1-12).

[9] 徐明曜. 有限群导引(上册)[M]. 北京：科学出版社，2001.

[10] TATE J. Nilpotent Quotient Groups[J]. Topology，1964，3(1)：109-111.

[11] LI D Y，GUO X Y. The Influence of c-Normality of Subgroups on the Structrue of Finite Groups[J]. Journal of Pure and Applied Algebra，2000，150(1)：53-60.

[12] SKIBA A N. On Weakly s-Permutable Subgroups of Finite Groups[J]. Journal of Algebra，2007，315(1)：192-209.

责任编辑　廖坤