第 47 卷 第 2 期 西南师范大学学报(自然科学版) 2022 年 2 月
Vol. 47 No. 2 Journal of Southwest China Normal University (Natural Science Edition) Feb. 2022

DOI:10.13718/j.cnki.xsxb.2022.02.003

Gorenstein 内射 Phantom 态射①

王小妹， 王占平

西北师范大学 数学与统计学院，兰州 730070

摘要：本文引入了 Gorenstein 内射 Phantom 态射和高维 Gorenstein 内射 Phantom 态射的概念，研究了 Gorenstein 内射 Phantom 态射的性质：在 H(R)中，Gorenstein 内射 Phantom 态射的类关于直积和 ME-扩张封闭. 证明了：R-模态射φ：$X \longrightarrow X'$是高维 Gorenstein 内射 Phantom 态射当且仅当在态射范畴中存在 φ 的 Gorenstein 内射分解，使得它的 n 次余合冲是 Gorenstein 内射 Phantom 态射.

关 键 词：Gorenstein 内射 Phantom 态射；态射范畴；内射模

中图分类号：O153.3 **文献标志码**：A **文章编号**：1000－5471(2022)02－0011－05

Gorenstein Injective Phantom Morphism

WANG Xiaomei， WANG Zhanping

College of Mathematics and Statistics，Northwest Normal University，Lanzhou 730070，China

Abstract：In this thesis，the concepts of Gorenstein injective Phantom morphism and higher Gorenstein injective Phantom morphism have been introduced，some properties of Gorenstein injective Phantom morphism been studied，and the class of Gorenstein injective Phantom morphisms been closed under direct product and ME-extensions in H(R). It is proved that a morphism φ:$X \longrightarrow X'$ of R-modules is higher Gorenstein injective Phantom morphism if and only if there is a Gorenstein injective resolution of φ in H(R) such that its n-th cosyzygy is a Gorenstein injective Phantom morphism.

Key words：Gorenstein injective Phantom morphism；morphism category；injective modules

Phantom 态射起源于代数拓扑 CW-复形之间的映射[1]. 文献[2]首次定义了三角范畴上的 Phantom 态射. 在文献[3-6]中，Phantom 态射的理论在有限群环的稳定模范畴中得到了发展. 文献[7]利用有限表示模和 $\mathrm{Tor}_1^R(-,-)$ 将 Phantom 态射的概念推广到了任意环的模范畴上. 文献[8]引入了 n-Phantom 态射和 n-Ext-Phantom 态射的概念，证明了：在 R-Mod 中，f：$M \longrightarrow N$ 是n-Phantom 态射($n>1$)当且仅当存在态射范畴中的正合序列 $0 \longrightarrow k_{n-1} \longrightarrow p_{n-2} \longrightarrow p_{n-1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow p_0 \longrightarrow f \longrightarrow 0$，其中 p_i 是投射的，k_{n-1} 是 Phantom 态射. 文献[9]定义了 Gorenstein 平坦 Phantom 态射和高维 Gorenstein 平坦 Phantom 态射，并研究了其同调性质，证明了：R-模态射 φ：$X \longrightarrow X'$ 是高维 Gorenstein 平坦 Phantom 态射当且仅当在态射范畴中存在 φ 的 Gorenstein 平坦分解，使得它的 n 次合冲是 Gorenstein 平坦 Phantom 态射. 与其相关

① 收稿日期：2021－03－23
基金项目：国家自然科学基金项目(11561061).
作者简介：王小妹，硕士研究生，主要从事环的同调理论的研究.

的研究课题还得到了许多其他有意义的结论(参见文献[10-11]).

受以上结论的启发，本文主要研究 Gorenstein 内射 Phantom 态射.

1 预备知识

本文中所提到的环均指有单位元的结合环，模均指左 R-模. R-Mod(Mod-R)表示左(右)R-模范畴.

定义 1 用 H(R)表示 R-Mod 的态射范畴，其中：

(a) H(R)中的对象是左 R-模同态；

(b) H(R)中从($A \xrightarrow{f_1} B$)到($A' \xrightarrow{f_2} B'$)的态射为 R-Mod 中态射的对子(g_1, g_2)

$$(A \xrightarrow{g_1} A',\ B \xrightarrow{g_2} B')$$

使得图

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "g_1"] \arrow[d, "f_1"] & A' \arrow[d, "f_2"] \\ B \arrow[r, "g_2"] & B' \end{tikzcd}$$

交换.

由文献[12]可得，态射范畴 H(R)是局部有限表示的 Grothendieck 范畴.

2 Gorenstein 内射 Phantom 态射

文献[13]在一般环上引入了 Gorenstein 内射模的概念.

定义 2[13] 如果存在内射模的正合列 $\cdots \longrightarrow I_1 \longrightarrow I_0 \longrightarrow I^0 \longrightarrow I^1 \longrightarrow \cdots$，使得 $M \cong \mathrm{Ker}(I_0 \longrightarrow I^0)$，且对任意的内射模 I，该序列在函子 $H\mathrm{om}_R(I, -)$ 作用下仍是正合的，则称 R-模 M 是 Gorenstein 内射模.

Gorenstein 内射模的类记为 ΓI.

由此我们引入 Gorenstein 内射 Phantom 态射的概念.

定义 3 如果对任意的内射左 R-模 E，$\mathrm{Ext}_R^1(E, \varphi) = 0$，其中 $\mathrm{Ext}_R^1(E, \varphi)$：$\mathrm{Ext}_R^1(E, A) \longrightarrow \mathrm{Ext}_R^1(E, B)$，则称 R-模态射 $\varphi: A \longrightarrow B$ 是 Gorenstein 内射 Phantom，简称为 ΓI-Phantom 态射.

ΓI-Phantom 态射的类记为 $\Phi_{\Gamma I}$. 由定义可知：$\Phi_{\Gamma I}$ 是 R-Mod 的理想，并包含所有 R-模同态 $M \longrightarrow G$，其中 G 为 Gorenstein 内射模.

命题 1 在 H(R)中，ΓI-Phantom 态射的类关于直积封闭.

证 设$(f_i: M_i \longrightarrow N_i)_{i \in I}$ 是一族 ΓI-Phantom 态射. 下证$\prod_{i \in I}$：$\prod_{i \in I} M_i \longrightarrow \prod_{i \in I} N_i$ 是 ΓI-Phantom 态射. 对任意的内射模 E，考虑交换图

$$\begin{tikzcd} \prod_{i \in I}\mathrm{Ext}^1(E, M_i) \arrow[r, "\prod_{i\in I}\mathrm{Ext}^1(E, f_i)"] \arrow[d, "\cong"] & \prod_{i \in I}\mathrm{Ext}^1(E, N_i) \arrow[d, "\cong"] \\ \mathrm{Ext}^1(E, \prod_{i \in I} M_i) \arrow[r, "\mathrm{Ext}^1(E, \prod_{i\in I} f_i)"] & \mathrm{Ext}^1(E, \prod_{i \in I} N_i) \end{tikzcd}$$

因为 $\mathrm{Ext}^1(E, f_i) = 0$，所以$\prod_{i \in I} \mathrm{Ext}^n(E, f_i) = 0$，即 $\mathrm{Ext}^1(E, \prod_{i \in I} f_i) = 0$. 故$\prod_{i \in I}$：$\prod_{i \in I} M_i \longrightarrow \prod_{i \in I} N_i$ 是 ΓI-Phantom 态射.

命题 2 设 R 是环，$f: M \longrightarrow N$ 是 R-Mod 中的 $\Gamma\Phi$-Phantom 态射当且仅当 f^+：$N^+ \longrightarrow M^+$ 是 Mod-R 中的 ΓI-Phantom 态射.

证 对任意的内射左 R-模 E，考虑交换图

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Tor}_1(N,E)^+ & \xrightarrow{\mathrm{Tor}_1(N,f)^+} & \mathrm{Tor}_1(M,E)^+ \\ \downarrow \alpha & & \downarrow \beta \\ \mathrm{Tor}^1(E,N^+) & \xrightarrow{\mathrm{Ext}^1(E,f^+)} & \mathrm{Ext}^1(E,M^+) \end{array}$$

由文献[14]知，α 和 β 是同构的，所以 $\mathrm{Tor}_1(N,f)^+=0$ 当且仅当 $\mathrm{Ext}^1(E,f^+)=0$. 因此 $f: M \longrightarrow N$ 是 R-Mod 中的 $\Gamma\Phi$-Phantom 态射当且仅当 $f^+: N^+ \longrightarrow M^+$ 是 Mod-R 中的 ΓI-Phantom 态射.

令 Λ 表示 R -模的所有短正合序列 $0 \longrightarrow X \longrightarrow Y \longrightarrow Z \longrightarrow 0$ 的类，使得对任意的内射左 R -模 E，当函子 $\mathrm{Hom}_R(E,-)$ 作用时仍保持正合. 由文献[15]的引理 1.1 知，Λ 是 Ext 的加法子函子.

命题 3　对 R -模态射 $\varphi: A \longrightarrow B$，以下条件等价：

(i)　φ 是 ΓI-Phantom 态射；

(ii)　如果 $A \longrightarrow I$ 是 A 的态射包，那么对任意的内射左 R -模 E，沿着 φ 的推出

$$\begin{array}{rccccccccc} \xi: & 0 & \longrightarrow & A & \longrightarrow & I & \longrightarrow & C & \longrightarrow & 0 \\ & & & \downarrow \varphi & & \downarrow & & \| & & \\ \tau: & 0 & \longrightarrow & B & \xrightarrow{\gamma} & G & \longrightarrow & C & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

是 $\mathrm{Hom}_R(E,-)$ -正合的.

证　(i)⇒(ii)　若 $A \longrightarrow I$ 是 A 的态射包，则存在短正合序列 $\xi: 0 \longrightarrow A \longrightarrow I \longrightarrow C \longrightarrow 0$，其中 I 是内射. 又由态射 $\varphi: A \longrightarrow B$，则有推出图

$$\begin{array}{rccccccccc} \xi: & 0 & \longrightarrow & A & \longrightarrow & I & \longrightarrow & C & \longrightarrow & 0 \\ & & & \downarrow \varphi & & \downarrow & & \| & & \\ \tau: & 0 & \longrightarrow & B & \xrightarrow{\gamma} & G & \longrightarrow & C & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

因为 $\varphi: A \longrightarrow B$ 是 ΓI-Phantom 态射，所以对任意的内射左 R -模 E，$\mathrm{Ext}^1(E,\varphi)=0$. 因此有交换图

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Hom}_R(E,C) & \xrightarrow{\zeta} & \mathrm{Ext}^1(E,A) \\ \| & & \downarrow \mathrm{Ext}^1(\varphi,E) \\ \mathrm{Hom}_R(E,C) & \xrightarrow{\theta} & \mathrm{Ext}^1(E,B) \end{array}$$

这就表明 $0 \longrightarrow B \longrightarrow G \longrightarrow C \longrightarrow 0$ 是 $\mathrm{Hom}_R(E,-)$ -正合的.

(ii)⇒(i)　假设(ii)成立，则对任意的内射左 R -模 E，考虑交换图

$$\begin{array}{ccccc} \mathrm{Hom}_R(E,C) & \xrightarrow{\alpha} & \mathrm{Ext}^1(E,A) & \longrightarrow & \mathrm{Ext}^n(E,I)=0 \\ \| & & \downarrow \mathrm{Ext}^1(E,\varphi) & & \downarrow \\ \mathrm{Hom}_R(E,C) & \xrightarrow{\beta} & \mathrm{Ext}^1(E,B) & \xrightarrow{\delta} & \mathrm{Ext}^1(E,G) \end{array}$$

有 $\delta\mathrm{Ext}^1(E,\varphi)=0$. 因为 δ 是单的，所以 $\mathrm{Ext}^1(E,\varphi)=0$，即 φ 是 ΓI-Phantom 态射.

3　高维 Gorenstein 内射 Phantom 态射

下面引入高维 Gorenstein 内射 Phantom 态射的概念，即 n-Gorenstein 内射 Phantom 态射($n \in \mathbb{N}_+$).

定义 4　如果对任意的内射左 R -模 E，$\mathrm{Ext}_R^n(E,\varphi)=0$，其中 $\mathrm{Ext}_R^n(E,\varphi): \mathrm{Ext}_R^n(E,A) \longrightarrow \mathrm{Ext}_R^n(E,B)$，则称 R -模态射 $\varphi: A \longrightarrow B$ 是 n-Gorenstein 内射 Phantom，简称为 n-ΓI-Phantom 态射.

n-ΓI-Phantom 态射的类记为 $\Phi_{n-\Gamma I}$.

注 1　当 $n=1$ 时，1-ΓI-Phantom 态射就叫作 Gorenstein 内射 Phantom 态射，即 ΓI-Phantom 态射.

众所周知，态射范畴 H(R) 等价于三角矩阵环 $\begin{pmatrix} R & 0 \\ R & R \end{pmatrix}$ 上的模范畴. 由文献[16]的定理 2.6 知，H(R)

中的对象 $\Gamma = G_1 \xrightarrow{f} G_2$ 是 Gorenstein 内射当且仅当 f 是满的，且 G_1, G_2 和 $\operatorname{Ker} f$ 是 Gorenstein 内射左 R-模.

定理 1 设 R 是一个环且 $n>1$，对 $\mathrm{H}(R)$ 中的对象 Ξ：$X \xrightarrow{\varphi} X'$，以下条件等价：

(i) φ 是 n-ΓI-Phantom 态射；

(ii) 若有 $\mathrm{H}(R)$ 中的任意正合序列 $0 \longrightarrow \Xi \longrightarrow \Gamma_0 \longrightarrow \Gamma_1 \longrightarrow \cdots \longrightarrow \Gamma_{n-2} \longrightarrow K_{n-1} \longrightarrow 0$，其中 Γ_i 是 Gorenstein 内射，则 K_{n-1} 是 ΓI-Phantom 态射；

(iii) 若有 $\mathrm{H}(R)$ 中的任意正合序列 $0 \longrightarrow \Xi \longrightarrow I_0 \longrightarrow I_1 \longrightarrow \cdots \longrightarrow I_{n-2} \longrightarrow K_{n-1} \longrightarrow 0$，其中 I_i 是内射，则 K_{n-1} 是 ΓI-Phantom 态射；

(iv) 存在 $\mathrm{H}(R)$ 中的正合序列 $0 \longrightarrow \Xi \longrightarrow I_0 \longrightarrow I_1 \longrightarrow \cdots \longrightarrow I_{n-2} \longrightarrow K_{n-1} \longrightarrow 0$ 使得 I_i 是内射，则 K_{n-1} 是 ΓI-Phantom 态射；

(v) 存在 $\mathrm{H}(R)$ 中的正合序列 $0 \longrightarrow \Xi \longrightarrow \Gamma_0 \longrightarrow \Gamma_1 \longrightarrow \cdots \longrightarrow \Gamma_{n-2} \longrightarrow K_{n-1} \longrightarrow 0$ 使得 Γ_i 是 Gorenstein 内射，K_{n-1} 是 ΓI-Phantom 态射.

证 (i)⇒(ii) 设任意 $i \in \{0, 1, \cdots, n-1\}$，$\Gamma_i$：$G_i \xrightarrow{\varphi_i} G'_i$ 和 K_{n-1}：$K_{n-1} \xrightarrow{k_{n-1}} K'_{n-1}$，考虑在 $\mathrm{H}(R)$ 中的正合序列

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & X \arrow[r] \arrow[d, "\varphi"] & G_0 \arrow[r] \arrow[d, "\varphi_0"] & \cdots \arrow[r] & G_{n-2} \arrow[r] \arrow[d, "\varphi_{n-2}"] & K_{n-1} \arrow[r] \arrow[d, "k_{n-1}"] & 0 \\
0 \arrow[r] & X' \arrow[r] & G'_0 \arrow[r] & \cdots \arrow[r] & G'_{n-2} \arrow[r] & K'_{n-1} \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

其中态射 φ_i：$G_i \longrightarrow G'_i$ 是 Gorenstein 内射. 令 k_1：$K_1 \longrightarrow K'_1$ 是 $\Xi \longrightarrow \Gamma_0$ 的余核. 对任意的内射左 R-模 E，我们有行正合的交换图

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Ext}^{n-1}(E, G_0) \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{Ext}^{n-1}(E, K_1) \arrow[r] \arrow[d, "\mathrm{Ext}^{n-1}(E, k_1)"] & \mathrm{Ext}^{n}(E, X) \arrow[d, "\mathrm{Ext}^{n}(E, \varphi)"] \\
\mathrm{Ext}^{n-1}(E, G'_0) \arrow[r] & \mathrm{Ext}^{n-1}(E, K'_1) \arrow[r, "\alpha"] & \mathrm{Ext}^{n}(E, X')
\end{tikzcd}$$

因为 φ_i 是 Gorenstein 内射态射，所以 G_0, G'_0 是 Gorenstein 内射模，即 $\mathrm{Ext}^{n-1}(E, G_0)=0$，$\mathrm{Ext}^{n-1}(E, G'_0)=0$. 又因为 φ 是 n-ΓI-Phantom 态射，所以对任意的内射左 R-模 E，$\mathrm{Ext}^{n}(E, \varphi)=0$. 则 $\alpha\,\mathrm{Ext}^{n-1}(E, k_1)=0$. 由于 α 是单射，故 $\mathrm{Ext}^{n-1}(E, k_1)=0$. 重复上述过程，可得 K_{n-1} 是 ΓI-Phantom 态射.

(ii)⇒(iii)⇒(iv)⇒(v) 显然.

(v)⇒(i) 考虑行正合的交换图

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & X \arrow[r] \arrow[d, "\varphi"] & G_0 \arrow[r] \arrow[d, "\varphi_0"] & \cdots \arrow[r] & G_{n-2} \arrow[r] \arrow[d, "\varphi_{n-2}"] & K_{n-1} \arrow[r] \arrow[d, "k_{n-1}"] & 0 \\
0 \arrow[r] & X' \arrow[r] & G'_0 \arrow[r] & \cdots \arrow[r] & G'_{n-2} \arrow[r] & K'_{n-1} \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

使得对任意 $i \in \{0, 1, \cdots, n-1\}$，态射 φ_i：$G_i \longrightarrow G'_i$ 是 Gorenstein 内射，并且 k_{n-1}：$K_{n-1} \longrightarrow K'_{n-1}$ 是 ΓI-Phantom 态射. 因此对任意的内射左 R-模 E，$\mathrm{Ext}^1(E, k_{n-1})=0$. 令 k_1：$K_1 \longrightarrow K'_1$ 是 $\Xi \longrightarrow \Gamma_0$ 的余核. 考虑行正合的交换图

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Ext}^{1}(E, K_{n-1}) \arrow[r, "\beta"] \arrow[d, "\mathrm{Ext}^{1}(E, k_{n-1})"] & \mathrm{Ext}^{2}(E, K_{n-2}) \arrow[r] \arrow[d, "\mathrm{Ext}^{2}(E, k_{n-2})"] & \mathrm{Ext}^{2}(E, G_{n-2}) \arrow[d] \\
\mathrm{Ext}^{1}(E, K'_{n-1}) \arrow[r] & \mathrm{Ext}^{2}(E, K'_{n-2}) \arrow[r] & \mathrm{Ext}^{2}(E, G'_{n-2})
\end{tikzcd}$$

因为 φ_{n-2} 是 Gorenstein 内射态射，所以 G_{n-2}, G'_{n-2} 是 Gorenstein 内射模，即 $\mathrm{Ext}^2(E, G_{n-2})=0$，$\mathrm{Ext}^2(E, G'_{n-2})=0$. 则 β 是满射，所以 $\mathrm{Ext}^2(E, k_{n-2})\beta=0$. $\mathrm{Ext}^2(E, k_{n-2})=0$. 重复上述过程，有 $\mathrm{Ext}^n(E, \varphi)=0$. 所以 φ 是 n-ΓI-Phantom 态射.

参考文献：

[1] MCGIBBON C A. Phantom Maps [M]//Handbook of Algebraic Topology，1995：1209-1257.

[2] NEEMAN A. The Brown Representability Theorem and Phantomless Triangulated Categories [J]. Journal of Algebra，1992，151(1)：118-155.

[3] BENSON D J. Phantom Maps and Purity in Modular Representation Theory，III [J]. Journal of Algebra，2002，248(2)：747-754.

[4] BENSON D J，GNACADJA G P. Phantom Maps and Purity in Modular Representation Theory，I [J]. Fundamenta Mathematicae，1999，161(1/2)：37-91.

[5] BENSON D J，GNACADJA G P. Phantom Maps and Purity in Modular Representation Theory，II [J]. Algebras and Representation Theory，2001，4(4)：395-404.

[6] GNACADJA G P. Phantom Maps in the Stable Module Category [J]. Journal of Algebra，1998，201(2)：686-702.

[7] HERZOG I. The Phantom Cover of a Module [J]. Advances in Mathematics，2007，215(1)：220-249.

[8] MAO L X. Higher Phantom and Ext-Phantom Morphisms [J]. Journal of Algebra and Its Applications，2018，17(1)：1850012.

[9] ASADOLLAHI J，HEMAT S，VAHED R. Gorenstein Flat Phantom Morphisms [J]. Communications in Algebra，2020，48(5)：2167-2182.

[10] 王兴，杨刚. Gorenstein AC-投射模的函子伴随性 [J]. 西南大学学报(自然科学版)，2020，42(10)：101-108.

[11] 张健芳，高增辉. Gorenstein FP_n-投射模 [J]. 西南师范大学学报(自然科学版)，2020，45(8)：12-17.

[12] ESTRANDA S，GUIL ASENSIO P A，OZBEK F. Covering Ideals of Morphisms and Module Representations of the Quiver $\mathbb{A}_2$ [J]. Journal of Pure and Applied Algebra，2014，218(10)：1953-1963.

[13] ENOCHS E E，JENDA O M G. Gorenstein Injective and Projective Modules [J]. Mathematische Zeitschrift，1995，220(1)：611-633.

[14] ROTMAN J J. An Introduction to Homoligical Algebra [M]. New York：Springer，1979.

[15] AUSLANDER M，SOLBERG Ø. Relative Homology and Representation Theory 1 [J]. Communications in Algebra，1993，21(9)：2995-3031.

[16] WANG Z P，MU T，WANG X M. Recollements of Stable Categories of Gorenstein Injective Modules [J]. Journal of Algebra and Its Applications，2021，20(10)：2150190.

责任编辑　廖坤