DOI:10.13718/j.cnki.xsxb.2022.02.004

箭图表示的绝对 Clean 性质[①]

孙情，　杨刚

兰州交通大学 数理学院，兰州 730070

摘要： 设 Rep(Q，$\mathscr{M}$)是线性箭图 $Q=(\bullet\longrightarrow\bullet\longrightarrow\cdots\longrightarrow\bullet)$的模表示范畴，其中 $\mathscr{M}$ 表示左 R-模范畴. 本文研究并刻画了表示范畴 Rep(Q，$\mathscr{M}$)中的 n 有限表现表示与绝对 Clean 表示.

关　键　词： 箭图表示；n 有限表现表示；超有限表现表示；绝对 Clean 表示

中图分类号：O154.2　　**文献标志码：A**　　**文章编号：** 1000-5471(2022)02-0016-05

Absolutely Cleanness of Quiver Representations

SUN Qing，　YANG Gang

School of Mathematics and Physics，Lanzhou Jiaotong University，Lanzhou 730070，China

Abstract: Let Rep(Q,$\mathscr{M}$) be the category of representations of the linear quiver $Q=(\bullet\longrightarrow\bullet\longrightarrow\cdots\longrightarrow\bullet)$. Where $\mathscr{M}$ denotes the category of left R-modules. In the paper, the finitely n-presented representations and absolutely Clean representations in Rep(Q,$\mathscr{M}$) have mainly been studied and characterized.

Key words: quiver representations; finitely n-presented representations; super finitely presented representations; absolutely Clean representations

20 世纪 70 年代，Gabriel、Auslander 和 Reiten 建立了箭图表示理论. 经过近 50 年的发展，箭图表示理论不仅趋于完善，而且与群表示论、李代数和量子群、代数几何、数学物理等其他学科有深刻的联系.

根据文献[1]，箭图 Q 是一个有向图，即由四元组(Q_0，Q_1，s，t)构成，其中 Q_0，Q_1 分别为顶点与箭向的集合，s，t：$Q_1\longrightarrow Q_0$ 是映射. $s(\alpha)_{\alpha\in Q_1}$ 表示箭向 α 的源点，$t(\alpha)_{\alpha\in Q_1}$ 表示箭向 α 的终点. 箭图 Q 的 R-模表示 X 由 R-模簇 $(X_i)_{i\in Q_0}$ 和 R-模的同态簇 X_α：$X_{s(\alpha)}\longrightarrow X_{t(\alpha)}$ 构成($\forall\alpha\in Q_1$). 表示 X 与 X' 间的同态 θ：$X\longrightarrow X'$ 为同态簇 θ_i：$X_i\longrightarrow X'_i$($i\in Q_0$)，并且 $X'_\alpha\theta_{s(\alpha)}=\theta_{t(\alpha)}X_\alpha$($\forall\alpha\in Q_1$). 之后，众多学者将箭图的表示理论与模范畴、Abel 范畴等建立了联系. 例如，文献[2]研究了线性箭图的投射表示，得到 $m(\geqslant 2)$ 点线性箭图的投射表示与投射模之间的关系. 文献[3]通过超限归纳法建立了 Abel 范畴中的余挠对与表示范畴中的余挠对的关系，即得到 Abel 范畴中的余挠对($\mathscr{A}$，$\mathscr{B}$)可以诱导出表示范畴中形如(Rep(Q，$\mathscr{A}$)，$\Psi(B)$)和($\Phi(\mathscr{A})$，Rep(Q，$\mathscr{B}$))的两对余挠对，其中 $\mathscr{A}$,$\mathscr{B}$ 是 Abel 范畴中的对象类，

$$\Phi(\mathscr{A})=\{X\in \mathrm{Rep}(Q，\mathscr{M})：\varphi_i^X \text{ 是单同态，且 } X_i,\mathrm{Coker}\,\varphi_i^X\in\mathscr{A}，\forall i\in Q_0\}$$

---

① 收稿日期：2021-03-04
基金项目：国家自然科学基金项目(11561039)；甘肃省自然科学基金项目(17JR5RA091).
作者简介：孙情，硕士研究生，主要从事同调代数的研究.
通信作者：杨刚，教授，博士.

$$\Psi(\mathscr{B})=\{X\in \mathrm{Rep}(Q,\mathscr{M}):\psi_i^X \text{ 是满同态，且 } X_i, \mathrm{Ker}\,\psi_i^X\in\mathscr{B},\ \forall i\in Q_0\}$$

并研究了表示范畴中余挠对的遗传性. 文献[4]研究了箭图的表示范畴中的余挠对$(\Phi(\mathscr{A}),\Phi(\mathscr{A})^{\perp})$和$({}^{\perp}\Psi(\mathscr{B}),\Psi(\mathscr{B}))$的完全性.

绝对Clean模类作为R-模范畴中一类特殊有限表现模类，关于Ext函子的右正交子范畴在同调代数的研究中有着重要应用. 文献[5]引入了绝对Clean的概念，从而引入了Gorenstein AC投射模和Gorenstein AC内射模的概念，并研究了Gorenstein同调理论是如何扩展到任意环R上的. 后来，文献[6]定义了绝对Clean复形，并且进一步研究了相关的Gorenstein同调理论.

受上述结论的启发，本文主要研究m点线性箭图$Q=(\bullet\longrightarrow\bullet\longrightarrow\cdots\longrightarrow\bullet\longrightarrow\bullet)$的$n$有限表现表示和绝对Clean表示，给出了$n$有限表现表示与$n$有限表现模之间的关系，并给出了绝对Clean表示与绝对Clean模之间的关系. 相关概念及结论可参见文献[7-11].

1　准备知识

定义 1　令$n\geqslant 0$是整数. 如果存在正合列

$$F_n\longrightarrow F_{n-1}\longrightarrow\cdots\longrightarrow F_1\longrightarrow F_0\longrightarrow M\longrightarrow 0$$

其中每个F_i是有限生成的投射模$(i=1,2,\cdots,n)$，则称模M是n有限表现模. 特别地，当$n=1$时，则称M为有限表现模. 如果存在正合列

$$\cdots\longrightarrow F_n\longrightarrow\cdots\longrightarrow F_1\longrightarrow F_0\longrightarrow M\longrightarrow 0$$

使得每个F_i是有限生成的投射模$(i=1,2,\cdots)$，则称M是超有限表现模.

定义 2　设$\mathscr{C}$是范畴$\mathscr{A}$中的对象类，且$\mathscr{A}$中存在足够多的投射对象(内射对象). 如果$\mathscr{C}$包含所有投射(内射)对象，并且$\mathscr{C}$关于扩张和满同态的核(单同态的余核)封闭，则称$\mathscr{C}$是可解(余可解)的.

本文中的环R均指有单位元的结合环，以$\mathscr{M}$表示左R-模范畴，除非特别声明，本文中的模均是左R-模. 令$Q=(\underset{1}{\bullet}\longrightarrow\underset{2}{\bullet}\longrightarrow\underset{3}{\bullet}\longrightarrow\cdots\longrightarrow\underset{m}{\bullet})$是$m$点线性箭图，$\mathrm{Rep}(Q,\mathscr{M})$是$Q$的$R$-模表示范畴，这里$m$是正整数. 设$M$是$R$-模. 本文以$S_i(M)=(0\longrightarrow\cdots\longrightarrow M\longrightarrow 0\longrightarrow\cdots\longrightarrow 0)$表示范畴$\mathrm{Rep}(Q,\mathscr{M})$中的对象，这里$M$位于第$i$个位置，$i=1,2,\cdots,m$.

2　n有限表现表示与绝对Clean表示

令$X=(X_1\xrightarrow{d_1}X_2\xrightarrow{d_2}\cdots\longrightarrow X_{m-1}\xrightarrow{d_{m-1}}X_m)$是$\mathrm{Rep}(Q,\mathscr{M})$中的表示. 由文献[2]可知，$X$是投射表示当且仅当$X_1,X_2,\cdots,X_m$是投射$R$-模，并且每个$R$-同态$d_i: X_i\longrightarrow X_{i+1}$是可裂单同态$(i=1,2,\cdots,m-1)$. 特别地，$X$是有限生成投射表示当且仅当$X$是投射表示，并且每个$X_i$是有限生成$R$-模$(i=1,2,\cdots,m)$. 对偶地，$X$是内射表示当且仅当$X_1,X_2,\cdots,X_m$是内射$R$-模，并且每个$R$-同态$d_i: X_i\longrightarrow X_{i+1}$是可裂满同态$(i=1,2,\cdots,m-1)$.

定义 3　令$i\geqslant 0$是整数，$M\in\mathrm{Rep}(Q,\mathscr{M})$. 如果存在正合列

$$F_n\longrightarrow F_{n-1}\longrightarrow\cdots\longrightarrow F_0\longrightarrow M\longrightarrow 0$$

其中F_i是$\mathrm{Rep}(Q,\mathscr{M})$中有限生成的投射表示$(i=1,2,\cdots,n)$，则称$M$是$n$有限表现表示. 特别地，当$n=1$时，称$M$是有限表现表示. 如果存在正合列

$$\cdots\longrightarrow F_n\longrightarrow\cdots\longrightarrow F_1\longrightarrow F_0\longrightarrow M\longrightarrow 0$$

使得每个F_i是有限生成的投射表示$(i=1,2,\cdots)$，则称M是超有限表现表示.

定理 1　设$M\in\mathrm{Rep}(Q,\mathscr{M})$. 则$M$是$n$有限表现表示当且仅当每个$M_i$是$n$有限表现模$(i=1,2,\cdots,m)$.

证　*必要性*　因为M是n有限表现表示，所以存在正合列

$$F_n\longrightarrow F_{n-1}\longrightarrow\cdots\longrightarrow F_0\longrightarrow M\longrightarrow 0$$

其中F_j是有限生成的投射表示$(j=1,2,\cdots,n)$，即存在行正合的交换图

$$\begin{tikzcd}
P_{1,n} \arrow[r] \arrow[d] & P_{1,n-1} \arrow[r] \arrow[d] & \cdots \arrow[r] & P_{1,0} \arrow[r] \arrow[d] & M_1 \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
P_{2,n} \arrow[r] \arrow[d] & P_{2,n-1} \arrow[r] \arrow[d] & \cdots \arrow[r] & P_{2,0} \arrow[r] \arrow[d] & M_2 \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
\vdots \arrow[d] & \vdots \arrow[d] & & \vdots \arrow[d] & \vdots \arrow[d] & \\
P_{m,n} \arrow[r] & P_{m,n-1} \arrow[r] & \cdots \arrow[r] & P_{m,0} \arrow[r] & M_m \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

其中 $P_{i,j}$ 是有限生成的投射模. 根据定义 1 知每个 M_i 是 n 有限表现模.

充分性 设 $M=(M_1 \longrightarrow M_2 \longrightarrow \cdots \longrightarrow M_m)$. 因为每个 M_i 都是 n 有限表现模，所以对于 M_1，存在有限生成的投射模 $P_{1,0}$，使得 $P_{1,0} \longrightarrow M_1$ 是满同态；对于 M_2，存在有限生成的投射模 $P_{2,0}$，使得 $P_{2,0} \longrightarrow M_2$ 是满同态. 依次得到 $P_{m,0} \longrightarrow M_m$ 是满同态. 由文献[2]可得 $P_{1,0} \longrightarrow P_{1,0} \oplus P_{2,0} \longrightarrow \cdots \longrightarrow P_{1,0} \oplus \cdots \oplus P_{m,0}$ 是有限生成的投射表示(不妨记为 F_0)，即存在行正合的交换图

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & K_{1,1} \arrow[r] \arrow[d] & P_{1,0} \arrow[r] \arrow[d] & M_1 \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & K_{2,1} \arrow[r] \arrow[d] & P_{1,0} \oplus P_{2,0} \arrow[r] \arrow[d] & M_2 \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & \vdots \arrow[d] & \vdots \arrow[d] & \vdots \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & K_{m,1} \arrow[r] & P_{1,0} \oplus \cdots \oplus P_{m,0} \arrow[r] & M_m \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

其中 $K_{i,1}=\mathrm{Ker}(P_{1,0} \oplus \cdots \oplus P_{i,0})$. 因为 M_i 是 n 有限表现模，且 $P_{1,0} \oplus \cdots \oplus P_{i,0}$ 是有限生成的投射模，所以 $K_{i,1}$ 是 $n-1$ 有限表现模. 对 $K_1=(K_{1,1} \longrightarrow K_{2,1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow K_{m,1})$ 重复以上方法，可得存在有限生成的投射表示 F_1 和 K_2，使得 $0 \longrightarrow K_2 \longrightarrow F_1 \longrightarrow K_1 \longrightarrow 0$ 正合，并且 $K_{i,2}$ 是 $n-2$ 有限表现模. 依次类推，可得正合列

$$F_n \longrightarrow F_{n-1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow F_0 \longrightarrow M \longrightarrow 0$$

其中 F_j 是有限生成的投射表示($j=1,2,\cdots,n$). 这便证得 M 是 n 有限表现表示.

例 1 设 $S_i(M)=(0 \longrightarrow \cdots \longrightarrow M \longrightarrow 0 \longrightarrow \cdots \longrightarrow 0) \in \mathrm{Rep}(Q, \mathscr{M})$. 则 $S_i(M)$ 是 n 有限表现表示当且仅当 M 是 n 有限表现模($i=1,2,\cdots,m$).

定理 2 设 $M \in \mathrm{Rep}(Q, \mathscr{M})$. 则 M 是超有限表现表示当且仅当每个 M_i 是超有限表现模($i=1,2,\cdots,m$).

证 类似于定理 1 可证.

如果对于任意的超有限表现模 M，有 $\mathrm{Ext}_R^1(M, X)=0$，则称 R-模 X 是绝对 Clean 模. 类似地，我们引入以下定义：

定义 4 设 $X \in \mathrm{Rep}(Q, \mathscr{M})$. 如果对于任意的超有限表现表示 M，有 $\mathrm{Ext}^1_{\mathrm{Rep}(Q, \mathscr{M})}(M, X)=0$，则称 X 是绝对 Clean 表示.

命题 1 设 $X \in \mathrm{Rep}(Q, \mathscr{M})$. 则 X 是绝对 Clean 表示当且仅当对于任意的超有限表现模 F，有 $\mathrm{Ext}^1_{\mathrm{Rep}(Q, \mathscr{M})}(S_i(F), X)=0$，其中 $i=1,2,\cdots,m$.

证 *必要性* 显然成立.

充分性 一般地，设 $M=(M_1 \longrightarrow M_2 \longrightarrow \cdots \longrightarrow M_{m-1} \longrightarrow M_m)$ 是超有限表现表示. 则由定理 2 知，每个 M_i 是超有现表现模. 记

$$M(k)=(M_1 \longrightarrow M_2 \longrightarrow \cdots \longrightarrow M_{k-1} \longrightarrow M_k \longrightarrow 0 \longrightarrow \cdots \longrightarrow 0)$$

下面对 k 进行数学归纳. 当 $k=1$ 时，$M(1)=(M_1 \longrightarrow 0 \longrightarrow \cdots \longrightarrow 0 \longrightarrow 0)$，即 $M(1)=S_1(M_1)$. 由条件知 $\mathrm{Ext}^1_{\mathrm{Rep}(Q, \mathscr{M})}(S_1(M_1), X)=\mathrm{Ext}^1_{\mathrm{Rep}(Q, \mathscr{M})}(M(1), X)=0$.

假设结论对 $k-1$ 成立，即 $\mathrm{Ext}^1_{\mathrm{Rep}(Q, \mathscr{M})}(M(k-1), X)=0(k \geqslant 2)$. 下证结论对 k 成立. 注意到，存在短正合列

$$0 \longrightarrow S_k(M_k) \longrightarrow M(k) \longrightarrow M(k-1) \longrightarrow 0 \tag{1}$$

即有列正合的交换图

$$\begin{array}{ccccccccccccc}
0 & \to & \cdots & \to & 0 & \to & 0 & \to & 0 & \to & \cdots & \to & 0 \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
0 & \to & \cdots & \to & 0 & \to & M_k & \to & 0 & \to & \cdots & \to & 0 \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
M_1 & \to & \cdots & \to & M_{k-1} & \to & M_k & \to & 0 & \to & \cdots & \to & 0 \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
M_1 & \to & \cdots & \to & M_{k-1} & \to & 0 & \to & 0 & \to & \cdots & \to & 0 \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
0 & \to & \cdots & \to & 0 & \to & 0 & \to & 0 & \to & \cdots & \to & 0
\end{array}$$

用 $\mathrm{Hom}_{\mathrm{Rep}(Q,\mathscr{M})}(-, X)$ 作用正合列(1)，可得长正合列

$$\cdots \longrightarrow \mathrm{Ext}^1_{\mathrm{Rep}(Q,\mathscr{M})}(M(k-1), X) \longrightarrow \mathrm{Ext}^1_{\mathrm{Rep}(Q,\mathscr{M})}(M(k), X) \longrightarrow \mathrm{Ext}^1_{\mathrm{Rep}(Q,\mathscr{M})}(S_k(M_k), X) \longrightarrow \cdots$$

由归纳假设和条件可知

$$\mathrm{Ext}^1_{\mathrm{Rep}(Q,\mathscr{M})}(M(k-1), X) = \mathrm{Ext}^1_{\mathrm{Rep}(Q,\mathscr{M})}(S_k(M_k), X) = 0$$

所以 $\mathrm{Ext}^1_{\mathrm{Rep}(Q,\mathscr{M})}(M(k), X)=0$. 特别地，有 $\mathrm{Ext}^1_{\mathrm{Rep}(Q,\mathscr{M})}(M(m), X)=\mathrm{Ext}^1_{\mathrm{Rep}(Q,\mathscr{M})}(M, X)=0$，即证得 X 是绝对 Clean 表示.

定理 3　设 $X \in \mathrm{Rep}(Q, \mathscr{M})$. 则 X 是绝对 Clean 表示当且仅当 $X_1, X_2, \cdots, X_m$ 均是绝对 Clean 模，每个 $d_i: X_i \longrightarrow X_{i+1}$ 是满同态，并且 $\mathrm{Ker}\, d_i$ 是绝对 Clean 模($i=1,2,\cdots,m-1$).

证　*必要性*　设 X 是绝对 Clean 表示. 由定理 1 知，对任意的超有限表现模 M，$S_i(M)$ 是超有限表现表示，于是 $\mathrm{Ext}^1_{\mathrm{Rep}(Q,\mathscr{M})}(S_i(M), X)=0$. 由文献[3]的命题 5.6 可得 d_i 是满同态($i=1,2,\cdots,m-1$). 从而由文献[9]的命题 3.10 知，存在伴随同构

$$\mathrm{Ext}^1_{\mathrm{Rep}(Q,\mathscr{M})}(S_i(M), X) \cong \mathrm{Ext}^1_{\mathscr{M}}(M, \mathrm{Ker}\, d_i)$$

因为 X 是绝对 Clean 表示，所以由命题 1 可知 $\mathrm{Ext}^1_{\mathrm{Rep}(Q,\mathscr{M})}(S_i(M), X)=0$，且

$$\mathrm{Ext}^1_{\mathrm{Rep}(Q,\mathscr{M})}(S_m(M), X) \cong \mathrm{Ext}^1_{\mathscr{M}}(M, X_m)$$

故 $\mathrm{Ext}^1_{\mathscr{M}}(M, X_m)=0$，得 X_m 是绝对 Clean 模. 又因为

$$\mathrm{Ext}^1_{\mathrm{Rep}(Q,\mathscr{M})}(S_{m-1}(M), X) \cong \mathrm{Ext}^1_{\mathscr{M}}(M, \mathrm{Ker}\, d_{m-1})$$

所以 $\mathrm{Ker}\, d_{m-1}$ 是绝对 Clean 模. 注意到，序列 $0 \longrightarrow \mathrm{Ker}\, d_{m-1} \longrightarrow X_{m-1} \longrightarrow X_m \longrightarrow 0$ 正合，并且绝对 Clean 模关于扩张封闭，因此 X_{m-1} 是绝对 Clean 模.

依次类推可得 $\mathrm{Ker}\, d_i, X_1, X_2, \cdots, X_m$ 都是绝对 Clean 模.

充分性　因为 $d_i: X_i \longrightarrow X_{i+1}$ 是满同态，由文献[3]的命题 5.6 可知，对任意的超有限表现模 M，存在伴随同构

$$\mathrm{Ext}^1_{\mathrm{Rep}(Q,\mathscr{M})}(S_i(M), X) \cong \mathrm{Ext}^1_{\mathscr{M}}(M, \mathrm{Ker}\, d_i)$$

因为 $\mathrm{Ker}\, d_i$ 是绝对 Clean 模，所以 $\mathrm{Ext}^1_{\mathrm{Rep}(Q,\mathscr{M})}(M, \mathrm{Ker}\, d_i)=0$，因此 $\mathrm{Ext}^1_{\mathrm{Rep}(Q,\mathscr{M})}(S_i(M), X)=0$，由命题 1 知 X 是绝对 Clean 表示.

如果对任意的有限表现模 M，有 $\mathrm{Ext}^1_{\mathscr{M}}(M, X)=0$，则称 R-模 X 是 FP-内射模，参见文献[11].

定义 5　设 $X \in \mathrm{Rep}(Q, \mathscr{M})$. 如果对任意的有限表现表示 M，有 $\mathrm{Ext}^1_{\mathrm{Rep}(Q,\mathscr{M})}(M, X)=0$，则称 X 是 FP-内射表示.

推论 1　设 $X \in \mathrm{Rep}(Q, \mathscr{M})$. 则 X 是 FP-内射表示当且仅当 $X_1, X_2, \cdots, X_m$ 均是 FP-内射模，每个 $d_i: X_i \longrightarrow X_{i+1}$ 是满同态，并且 $\mathrm{Ker}\, d_i$ 是 FP-内射模($i=1,2,\cdots,m-1$).

证　类似于定理 2 可证.

引理 1　设 $X \in \mathrm{Rep}(Q, \mathscr{M})$. 则 X 是绝对 Clean 表示当且仅当对于任意的超有限表现表示 M，有 $\mathrm{Ext}^n_{\mathrm{Rep}(Q,\mathscr{M})}(M, X)=0(\forall n \geqslant 1)$.

证　充分性显然成立，下证必要性. 设 M 是超有限表现表示. 则存在正合列

$$\cdots \longrightarrow P_n \longrightarrow P_{n-1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow P_1 \longrightarrow P_0 \longrightarrow M \longrightarrow 0$$

其中每个 P_i 都是有限生成的投射表示($i \geqslant 0$). 令 $M_i = \mathrm{Im}(P_i \longrightarrow P_{i-1})$, $M = M_0$. 则每个 M_i 都是超有限表现表示. 用 $\mathrm{Hom}_{\mathrm{Rep}(Q,\mathscr{M})}(-, X)$ 作用正合列 $0 \longrightarrow M_{n-1} \longrightarrow P_{n-3} \longrightarrow M_{n-2} \longrightarrow 0$, 得到长正合列

$$\begin{array}{ccccc} \cdots \longrightarrow & \mathrm{Ext}^1_{\mathrm{Rep}(Q,\mathscr{M})}(P_{n-3}, X) & \longrightarrow & \mathrm{Ext}^1_{\mathrm{Rep}(Q,\mathscr{M})}(M_{n-1}, X) & \\ & & & \downarrow & \\ & & & \mathrm{Ext}^2_{\mathrm{Rep}(Q,\mathscr{M})}(M_{n-2}, X) \longrightarrow & \mathrm{Ext}^2_{\mathrm{Rep}(Q,\mathscr{M})}(P_{n-3}, X) \longrightarrow \cdots \end{array}$$

因为 $\mathrm{Ext}^1_{\mathrm{Rep}(Q,\mathscr{M})}(P_{n-3}, X) = \mathrm{Ext}^2_{\mathrm{Rep}(Q,\mathscr{M})}(P_{n-3}, X) = 0$, 所以

$$\mathrm{Ext}^1_{\mathrm{Rep}(Q,\mathscr{M})}(M_{n-1}, X) \cong \mathrm{Ext}^2_{\mathrm{Rep}(Q,\mathscr{M})}(M_{n-2}, X)$$

依次类推, 利用维数转移可以得到

$$\mathrm{Ext}^1_{\mathrm{Rep}(Q,\mathscr{M})}(M_{n-1}, X) \cong \mathrm{Ext}^2_{\mathrm{Rep}(Q,\mathscr{M})}(M_{n-2}, X) \cong \cdots \cong \mathrm{Ext}^n_{\mathrm{Rep}(Q,\mathscr{M})}(M, X)$$

即证得 $\mathrm{Ext}^n_{\mathrm{Rep}(Q,\mathscr{M})}(M, X) = 0$.

命题 2 绝对 Clean 表示构成的类是余可解类.

证 假设 $0 \longrightarrow A \longrightarrow B \longrightarrow C \longrightarrow 0$ 正合, 其中 A, C 是绝对 Clean 表示, F 是超有限表现表示. 用 $\mathrm{Hom}_{\mathrm{Rep}(Q,\mathscr{M})}(F, -)$ 作用后可得长正合列

$$\cdots \longrightarrow \mathrm{Ext}^1_{\mathrm{Rep}(Q,\mathscr{M})}(F, A) \longrightarrow \mathrm{Ext}^1_{\mathrm{Rep}(Q,\mathscr{M})}(F, B) \longrightarrow \mathrm{Ext}^1_{\mathrm{Rep}(Q,\mathscr{M})}(F, C) \longrightarrow \cdots$$

因为 $\mathrm{Ext}^1_{\mathrm{Rep}(Q,\mathscr{M})}(F, A) = \mathrm{Ext}^1_{\mathrm{Rep}(Q,\mathscr{M})}(F, C) = 0$, 所以 $\mathrm{Ext}^1_{\mathrm{Rep}(Q,\mathscr{M})}(F, B) = 0$, 即 B 是绝对 Clean 表示. 故绝对 Clean 表示关于扩张封闭.

假设 $0 \longrightarrow A \longrightarrow B \longrightarrow C \longrightarrow 0$ 正合, 其中 A, B 是绝对 Clean 表示, F 是超有限表现表示. 用 $\mathrm{Hom}_{\mathrm{Rep}(Q,\mathscr{M})}(F, -)$ 作用后可得长正合列

$$\cdots \longrightarrow \mathrm{Ext}^1_{\mathrm{Rep}(Q,\mathscr{M})}(F, B) \longrightarrow \mathrm{Ext}^1_{\mathrm{Rep}(Q,\mathscr{M})}(F, C) \longrightarrow \mathrm{Ext}^2_{\mathrm{Rep}(Q,\mathscr{M})}(F, A) \longrightarrow \cdots$$

因为 F 是超有限表现表示, 由引理 1 知 $\mathrm{Ext}^2_{\mathrm{Rep}(Q,\mathscr{M})}(F, A) = 0$. 由假设知 $\mathrm{Ext}^1_{\mathrm{Rep}(Q,\mathscr{M})}(F, B) = 0$, 所以 $\mathrm{Ext}^1_{\mathrm{Rep}(Q,\mathscr{M})}(F, C) = 0$, 即 C 是绝对 Clean 表示. 故绝对 Clean 表示关于满同态的核封闭.

又因为任意内射表示是绝对 Clean 表示, 所以绝对 Clean 表示构成的类是余可解类.

参考文献:

[1] GABRIEL P. Unzelegbare Darstellungen I [J]. Manuscripta Mathematica, 1972, 6(1): 71-103.

[2] ENOCHS E, ESTRADA S. Projective Representations of Quivers [J]. Communications in Algebra, 2005, 33(10): 3467-3478.

[3] HOLM H, JORGENSEN P. Cotorsion Pairs in Categories of Quiver Representations [J]. Kyoto Journal of Mathematics, 2019, 59(3): 575-606.

[4] BRAVO D, PÉREZ M A. Finiteness Conditions and Cotorsion Pairs [J]. Journal of Pure and Applied Algebra, 2017, 221(6): 1249-1267.

[5] GILLESPIE J. Gorenstein Complexes and Recollements from Cotorsion Pairs [J]. Advances in Mathematics, 2016, 291: 859-911.

[6] BRAVO D, GILLESPIE J. Absolutely Clean, Level, and Gorenstein AC-Injective Complexes [J]. Communications in Algebra, 2016, 44(5): 2213-2233.

[7] GLAZ S. Commutative Coherent Rings [M]. New-York: Springer, 2006.

[8] ENOCHS E E, JENDA O M G. Relative Homological Algebra [M]. Berlin-New York: Walter de Gruyter, 2000.

[9] ODABAŞ S. Completeness of the Induced Cotorsion Pairs in Categories of Quiver Representations [J]. Journal of Pure and Applied Algebra, 2019, 223(10): 4536-4559.

[10] YANG G, LIU Z K, LIANG L. Model Structures on Categories of Complexes Over Ding-Chen Rings [J]. Communications in Algebra, 2013, 41(1): 50-69.

[11] STENSTRÖM B. Coherent Rings and FP-Injective Modules [J]. Journal of the London Mathematical Society, 1970, 2(2): 323-329.

责任编辑 廖坤