第47卷 第2期　西南师范大学学报(自然科学版)　2022年2月
Vol. 47 No. 2　Journal of Southwest China Normal University (Natural Science Edition)　Feb. 2022

DOI:10.13718/j.cnki.xsxb.2022.02.005

一类半线性退化 Schrödinger 方程的无穷多大能量解的存在性[①]

冉　玲，　陈尚杰，　李　麟

重庆工商大学 数学与统计学院，重庆 400067；经济社会应用统计重庆市重点实验室，重庆 400067

摘要：本文运用变分法和 Z_2-山路定理首次研究了半线性退化 Schrödinger 方程

$$\begin{cases} -\Delta_\gamma u + V(x)u = f(x,u) + \mu g(x,u) & x \in \mathbb{R}^N \\ u \in S^2_{\gamma,V(x)}(\mathbb{R}^N) \end{cases}$$

无穷多大能量解的存在性. 其中 $N \geqslant 2$，Δ_γ 是退化椭圆算子，非线性项 $f(x,u)$ 在无穷远处满足超线性条件，$g(x,u)$ 满足次线性条件.

关 键 词：半线性退化椭圆方程；变分法；Z_2-山路定理；大能量解

中图分类号：O176.3　　**文献标志码**：A　　**文章编号**：1000-5471(2022)02-0021-06

Infinitely Many Large Energy Solutions For Semi-Linear Degenerate Schrödinger Equations

RAN Ling，　CHEN Shangjie，　LI Lin

School of Mathematics and Statistics，Chongqing Technology and Business University，Chongqing 400067，China；
Chongqing Key Laboratory of Social Economy and Applied Statistics，Chongqing 400067，China

Abstract：In this paper，we firstly obtained the existence of infinitely many large energy solutions for the following semi-linear degenerate Schrödinger equations in $\mathbb{R}^N$ by variational methods and Z_2-mountain pass theorem：

$$\begin{cases} -\Delta_\gamma u + V(x)u = f(x,u) + \mu g(x,u) & x \in \mathbb{R}^N \\ u \in S^2_{\gamma,V(x)}(\mathbb{R}^N) \end{cases}$$

where $N \geqslant 2$，Δ_γ is a degenerate elliptic operator，nonlinear term of equation $f(x,u)$ satisfy super-linear condition at infinity，and $g(x,u)$ satisfy the sub-linear condition.

Key words：semi-linear degenerate elliptic equation；variation methods；Z_2-Mountain pass theorem；large energy solution

---

① 收稿日期：2021-04-26
基金项目：重庆市教育委员会基金项目(KJQN20190081)；重庆工商大学基金项目(CTBUZDPTTD201909)；重庆工商大学研究生创新型科研项目(yjscxx2021-112-57).
作者简介：冉　玲，硕士研究生，主要从事非线性泛函分析的研究.
通信作者：陈尚杰，副教授.

本文主要研究半线性退化 Schrödinger 方程

$$\begin{cases} -\Delta_\gamma u + V(x)u = f(x, u) + \mu g(x, u) & x \in \mathbb{R}^N \\ u \in S^2_{\gamma, V(x)}(\mathbb{R}^N) \end{cases} \tag{1}$$

无穷多大能量解的存在性，其中 $N \geqslant 2$，Δ_γ 是退化椭圆算子，形式如下：

$$\Delta_\gamma = \sum_{j=1}^{N} \partial_{x_j}(\gamma_j^2 \partial_{x_j})$$

$$\partial_{x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} \qquad \gamma = (\gamma_1(x), \gamma_2(x), \cdots, \gamma_N(x))$$

函数 $\gamma_j: \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}$ 是连续的，是 $\mathbb{R}^N \backslash \Pi$ 上不等于 0 的 C^1 函数，其中

$$\Pi = \left\{ x = (x_1, x_2, \cdots, x_N) \in \mathbb{R}^N : \prod_{j=1}^{N} x_j = 0 \right\}$$

并且，函数 γ_j 满足文献[1]中相关结论的所有条件，退化算子 Δ_γ 包含 Grušin 型算子

$$G_\alpha = \Delta_x + |x|^{2\alpha} \Delta_y \qquad \alpha \geqslant 0$$

其中 (x, y) 表示 $\mathbb{R}^{N_1} \times \mathbb{R}^{N_2}$ 中的点. 文献[2]研究了 α 是整数的情况，文献[3-4]研究了 α 不是整数的情况. Δ_γ 算子还包含强退化算子

$$P_{\alpha,\beta} = \Delta_x + \Delta_y + |x|^{2\alpha} |y|^{2\beta} \Delta_z \qquad (x, y, z) \in \mathbb{R}^{N_1} \times \mathbb{R}^{N_2} \times \mathbb{R}^{N_3}$$

其中 α, β 是非负常数. 文献[5]研究了算子 $P_{\alpha,\beta}$. 关于 Δ_γ 算子的更多信息可参见文献[1].

当 $\mu = 0$ 时，文献[6]利用变分法研究了半线性 Δ_γ 椭圆型偏微分方程(1)的无穷多解的存在性，其中方程(1)的位势 $V(x)$ 是强制位势，并且方程(1)的非线性项 $f(x, u)$ 满足文献[7]中的局部 Ambrosetti-Rabinowitz 增长条件. 另外，利用变分法还可以解决其他方程解的存在性问题，见文献[8-10].

基于上述结果，本文研究半线性退化 Schrödinger 方程(1)的无穷多解的存在性，其中方程(1)的非线性项是凹凸的. 为了研究方程(1)，我们做如下假设：

(V1) $V(x) \in C(\mathbb{R}^N, \mathbb{R})$ 满足 $\inf\limits_{x \in \mathbb{R}^N} V(x) > 0$，存在常数 $r_0 > 0$，使得

$$\lim_{|y| \to \infty} \operatorname{meas}(\{x \in \mathbb{R}^N : |x - y| \leqslant r_0, V(x) \leqslant M\}) = 0 \qquad \forall M > 0$$

(f1) $f \in C(\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$，对满足 $2 < p < 2_\gamma^* = \dfrac{2\widetilde{N}}{N-2}$ 的 p，存在常数 $c_0 > 0$，使得

$$|f(x, z)| \leqslant c_0(|z| + |z|^{p-1}) \qquad \forall (x, z) \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}$$

(f2) $\lim\limits_{|z| \to \infty} \dfrac{F(x, z)}{|z|^2} = +\infty \ (x \in \mathbb{R}^N)$，其中

$$F(x, z) = \int_0^z f(x, y) \mathrm{d}y \geqslant 0 \qquad \forall (x, z) \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}$$

(f3) 存在常数 $L_0 > 0$，$\theta > 2$ 以及 $c_1 \geqslant 0$，使得

$$z f(x, z) - \theta F(x, z) + c_1 |z|^2 \geqslant 0 \qquad \forall (x, |z|) \in \mathbb{R}^N \times [L_0, +\infty)$$

(f4) $f(x, -z) = -f(x, z) \ (\forall (x, z) \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R})$.

(g1) 存在常数 $1 < q_1 < q_2 < 2$，存在函数 $h_i(x) \in L^{\frac{2}{2-q_i}}(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}_+) \ (i = 1, 2)$，使得

$$|g(x, z)| \leqslant h_1(x) |z|^{q_1 - 1} + h_2(x) |z|^{q_2 - 1} \qquad \forall (x, z) \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}$$

(g2) $g(x, -z) = -g(x, z) \ (\forall (x, z) \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R})$.

定理 1　假设条件(V1)，(f1)－(f4)，(g1) 和(g2) 成立. 则存在常数 $\mu_0 > 0$，使得当 $|\mu| \leqslant \mu_0$ 时，方程(1) 有无穷多个大能量解.

注 1　据我们所知，定理 1 首次研究了在 $\mathbb{R}^N$ 上具有凹凸非线性项的半线性 Δ_γ 椭圆型偏微分方程的无穷多个能量解. 另外，值得一提的是，文献[11]运用喷泉定理得到了 $\mathbb{R}^N$ 中的有界域上的具有凹凸非线性项的半线性 Δ_γ 椭圆型偏微分方程无穷多个高能量解的存在性.

定义函数空间

$$S_\gamma^2(\mathbb{R}^N) = \{u \in L^2(\mathbb{R}^N) : \gamma_j \partial_{x_j} u \in L^2(\mathbb{R}^N), j = 1, \cdots, N\}$$

令

$$S^2_{\gamma,V(x)}(\mathbb{R}^N)=\left\{u\in S^2_\gamma(\mathbb{R}^N):\int_{\mathbb{R}^N}(|\nabla_\gamma u|^2+V(x)u^2)\mathrm{d}x<+\infty\right\}$$

其中 $\nabla_\gamma u=(\gamma_1\partial_{x_1}u,\gamma_2\partial_{x_2}u,\cdots,\gamma_N\partial_{x_N}u)$. 显然 $S^2_{\gamma,V(x)}(\mathbb{R}^N)$ 是希尔伯特空间，其内积为

$$(u,v)=\int_{\mathbb{R}^N}(|\nabla_\gamma u\nabla_\gamma v|+V(x)uv)\mathrm{d}x$$

范数 $\|u\|=(u,u)^{\frac{1}{2}}$. 根据文献[6]的引理 2.2，嵌入 $S^2_{\gamma,V(x)}(\mathbb{R}^N)\hookrightarrow S^2_\gamma(\mathbb{R}^N)$ 是连续的，而且当条件(V1)成立时，嵌入 $S^2_{\gamma,V(x)}(\mathbb{R}^N)\hookrightarrow L^q(\mathbb{R}^N)$ 是紧的($q\in[2,2^*_\gamma)$). 据此，对 $\forall q\in[2,2^*_\gamma)$，存在常数 d_q，使得

$$|u|_q\leqslant d_q\|u\| \tag{2}$$

其中 $L^q(\mathbb{R}^N)$ 表示勒贝格空间，在 $L^q(\mathbb{R}^N)$ 上的范数记作 $|\cdot|_q$.

方程(1)具有变分结构. 考虑函数 $J:S^2_{\gamma,V(x)}(\mathbb{R}^N)\longrightarrow\mathbb{R}$，定义为

$$J(u)=\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N}(|\nabla_\gamma u|^2+V(x)u^2)\mathrm{d}x-\int_{\mathbb{R}^N}F(x,u)\mathrm{d}x-\mu\int_{\mathbb{R}^N}G(x,u)\mathrm{d}x \tag{3}$$

从条件(f4)和(g2)可知 $J(u)$ 是偶函数，并且满足 $J(0)=0$. 同时 J 是一阶连续可导函数，且

$$\langle J'(u),v\rangle=\int_{\mathbb{R}^N}(\nabla_\gamma u\nabla_\gamma v+V(x)uv)\mathrm{d}x-\int_{\mathbb{R}^N}f(x,u)v\mathrm{d}x-\int_{\mathbb{R}^N}\mu g(x,u)v\mathrm{d}x\qquad\forall u,v\in S^2_{\gamma,V(x)}(\mathbb{R}^N) \tag{4}$$

显然 u 是方程(1)的弱解当且仅当 $u\in S^2_{\gamma,V(x)}(\mathbb{R}^N)$ 是 $J(u)$ 的临界点.

引理 1　假设条件(V1),(g1)以及(f2)成立，则对任意有限维子空间 $Y\subset S^2_{\gamma,V(x)}(\mathbb{R}^N)$，存在 $R=R(Y)$，使得当 $\|u\|\geqslant R$ 时 $J(u)\leqslant 0$.

证　假设存在序列 $\{u_n\}\subset Y$ 满足 $\|u_n\|\to+\infty$，并且 $J(u_n)>0$. 令 $w_n=\dfrac{u_n}{\|u_n\|}$，则 $\{w_n\}$ 为有界序列，从而存在 $\{w_n\}$ 的子列，仍记为 $\{w_n\}$，满足对于几乎处处的 $x\in\mathbb{R}^N$，都有 $w_n(x)\to w(x)$. 记 $\Lambda=\{x\in\mathbb{R}^N:w(x)\neq 0\}$，故 $\mathrm{meas}(\Lambda)>0$，并且当 $n\to\infty$ 时，对几乎处处的 $x\in\Lambda$ 有 $|u_n(x)|\to+\infty$. 根据条件(f2)以及 Fatou 引理，可得

$$\liminf_{n\to\infty}\frac{\int_{\mathbb{R}^N}F(x,u_n)\mathrm{d}x}{\|u_n\|^2}\geqslant\liminf_{n\to\infty}\int_\Lambda\frac{F(x,u_n)w_n^2}{|u_n|^2}\mathrm{d}x\geqslant\int_\Lambda\liminf_{n\to\infty}\frac{F(x,u_n)w_n^2}{|u_n|^2}\mathrm{d}x=+\infty \tag{5}$$

根据 $G(x,z)=\int_0^1 g(x,tz)z\mathrm{d}t$ 和条件(g1)，可得

$$|G(x,u)|\leqslant\frac{1}{q_1}|h_1(x)||u|^{q_1}+\frac{1}{q_2}|h_2(x)||u|^{q_2}$$

因此，由(2)式以及 Hölder 不等式，可得

$$\int_{\mathbb{R}^N}|G(x,u)|\mathrm{d}x\leqslant\frac{1}{q_1}|h_1|_{\frac{2}{2-q_1}}d_2^{q_1}\|u\|^{q_1}+\frac{1}{q_2}|h_2|_{\frac{2}{2-q_2}}d_2^{q_2}\|u\|^{q_2} \tag{6}$$

由 $1<q_1<q_2<2$ 以及 $\|u_n\|\to+\infty$ 可知，当 $n\to\infty$ 时，有

$$\frac{\left|\int_{\mathbb{R}^N}G(x,u_n)\mathrm{d}x\right|}{\|u_n\|^2}\leqslant\frac{1}{q_1}|h_1|_{\frac{2}{2-q_1}}d_2^{q_1}\|u_n\|^{q_1-2}+\frac{1}{q_2}|h_2|_{\frac{2}{2-q_2}}d_2^{q_2}\|u_n\|^{q_2-2}\to 0 \tag{7}$$

又根据 $J(u_n)>0$，有

$$\liminf_{n\to\infty}\frac{J(u_n)}{\|u_n\|^2}\geqslant 0 \tag{8}$$

因此，由(3),(7)以及(8)式，可得

$$\liminf_{n\to\infty}\frac{\int_{\mathbb{R}^N}F(x,u_n)\mathrm{d}x}{\|u_n\|^2}\leqslant\limsup_{n\to\infty}\frac{\int_{\mathbb{R}^N}F(x,u_n)\mathrm{d}x}{\|u_n\|^2}=\limsup_{n\to\infty}\left[\frac{1}{2}-\frac{\mu\int_{\mathbb{R}^N}G(x,u_n)\mathrm{d}x}{\|u_n\|^2}-\frac{J(u_n)}{\|u_n\|^2}\right]\leqslant\frac{1}{2}$$

这结论与(5)式矛盾.

根据文献[12]的引理 2.5,选择整数 $m \geqslant 1$,使得

$$|u|_2^2 \leqslant \frac{1}{2c_0}\|u\|^2 \qquad \forall u \in Z_m \tag{9}$$

其中 c_0 是条件(f1)中的常数,选择 $X = S^2_{\gamma,V(x)}(\mathbb{R}^N)$ 上的一组正交基$\{e_j\}$,令

$$Y_k = \operatorname{span}\{e_1, \cdots, e_k\} \qquad Z_k = Y_{k-1}^{\perp}$$

令 $V = Y_{m-1}$,$W = Z_m$,则 $S^2_{\gamma,V(x)}(\mathbb{R}^N) = V \oplus W$,且 V 是有限维空间.

引理 2 设条件(V1),(g1)和(f1)成立,则存在正常数 μ_0, ρ, α,满足当 $|\mu| \leqslant \mu_0$ 时,$J(u)|_{\{u\in W:\ \|u\| = \rho\}} \geqslant \alpha$.

证 根据条件(f1)和 $F(x, z) = \int_0^1 f(x, tz)z\,\mathrm{d}t$,可得

$$F(x, z) \leqslant \frac{c_0}{2}|z|^2 + \frac{c_0}{p}|z|^p \qquad \forall (x, z) \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}$$

因此,由(3),(6),(9)式以及 $1 < q_1 < q_2 < 2$,对任意满足 $u \in W$ 且 $\|u\| \leqslant 1$ 的 u,有

$$\begin{aligned}
J(u) \geqslant{}& \frac{1}{2}\|u\|^2 - |\mu|\int_{\mathbb{R}^N}|G(x, u)|\,\mathrm{d}x - \int_{\mathbb{R}^N}F(x, u)\,\mathrm{d}x \geqslant \\
& \frac{1}{2}\|u\|^2 - |\mu|\left(\frac{1}{q_1}|h_1|_{\frac{2}{2-q_1}} d_2^{q_1}\|u\|^{q_1} + \frac{1}{q_2}|h_2|_{\frac{2}{2-q_2}} d_2^{q_2}\|u\|^{q_2}\right) - \frac{c_0}{2}|u|_2^2 - \frac{c_0}{p}|u|_p^p \geqslant \\
& \frac{1}{2}\|u\|^2 - |\mu|\left(\frac{1}{q_1}|h_1|_{\frac{2}{2-q_1}} d_2^{q_1} + \frac{1}{q_2}|h_2|_{\frac{2}{2-q_2}} d_2^{q_2}\right)\|u\|^{q_1} - \frac{1}{4}\|u\|^2 - \frac{c_0 d_p^p}{p}\|u\|^p = \\
& \|u\|^{q_1}\left[\frac{1}{4}\|u\|^{2-q_1} - \frac{c_0 d_p^p}{p}\|u\|^{p-q_1} - |\mu| H\right]
\end{aligned}$$

其中

$$H = \frac{1}{q_1}|h_1|_{\frac{2}{2-q_1}} d_2^{q_1} + \frac{1}{q_2}|h_2|_{\frac{2}{2-q_2}} d_2^{q_2}$$

当 $t \geqslant 0$ 时,令

$$g(t) = \frac{1}{4}t^{2-q_1} - \frac{c_0 d_p^p}{p}t^{p-q_1} = t^{2-q_1}\left(\frac{1}{4} - \frac{c_0 d_p^p}{p}t^{p-2}\right)$$

显然存在常数 $0 < t_0 \leqslant 1$,对 $\forall t \in (0, t_0]$ 满足 $g(t) > 0$. 选择 $\|u\| = t_0 = \rho$,可得

$$|\mu| \leqslant \frac{g(\rho)}{2H} = \mu_0$$

$$J(u)|_{\{u\in W:\ \|u\| = \rho\}} \geqslant \rho^{q_1}[g(\rho) - |\mu| H] \geqslant \frac{\rho^{q_1} g(\rho)}{2} = \alpha > 0$$

引理 3 设条件(V1),(f1)-(f3)和(g1)成立,则 J 在 $S^2_{\gamma,V(x)}(\mathbb{R}^N)$ 中的任意 Palais-Smale 序列有界.

证 假设$\{u_n\}$是 J 的 Palais-Smale 序列,存在常数 $c \in \mathbb{R}$,当 $n \to \infty$ 时 $J(u_n) \to c$,$J'(u_n) \to 0$. 假设存在子列,仍记为$\{u_n\}$,当 $n \to \infty$ 时,使得 $\|u_n\| \to \infty$. 令 $w_n = \dfrac{u_n}{\|u_n\|}$,则存在$\{w_n\}$中的子列,仍记为$\{w_n\}$,满足在 $L^2(\mathbb{R}^N)$ 中 $w_n \to w$,对几乎处处的 $x \in \mathbb{R}^N$ 有 $w_n(x) \to w(x)$. 令 $\Lambda = \{x \in \mathbb{R}^N: w(x) \neq 0\}$. 如果 $\operatorname{meas}(\Lambda) > 0$,用引理 1 相似的证明方法,即可得出矛盾. 因此 $\operatorname{meas}(\Lambda) = 0$,可推出对几乎处处的 $x \in \mathbb{R}^N$ 有 $w(x) = 0$,以及在 $L^2(\mathbb{R}^N)$ 中 $w_n \to 0$.

根据条件(f1)以及 $p > 2$,可知

$$|f(x, z)z| \leqslant c_0(|z|^2 + |z|^p) \leqslant 2c_0|z|^2 \qquad \forall (x, |z|) \in \mathbb{R}^N \times [0, 1]$$

再次用条件(f1),存在常数 $M > 0$,满足

$$|f(x, z)z| \leqslant c_0(|z|^2 + |z|^p) \leqslant M \leqslant M|z|^2 \qquad \forall (x, |z|) \in \mathbb{R}^N \times [1, L_0]$$

因此,可得

$$|f(x, z)z| \leqslant (M + 2c_0)|z|^2 \qquad \forall (x, |z|) \in \mathbb{R}^N \times [0, L_0] \tag{10}$$

又由 $F(x, z)=\int_0^1 f(x, tz)z\mathrm{d}t$，显然

$$|F(x, z)| \leqslant \frac{1}{2}(M+2c_0)|z|^2 \qquad \forall (x, z) \in \mathbb{R}^N \times [0, L_0] \tag{11}$$

根据(10) 和(11) 式，有

$$|zf(x, z)-\theta F(x, z)| \leqslant \tilde{c}_1 |z|^2 \qquad \forall (x, |z|) \in \mathbb{R}^N \times [0, L_0]$$

其中 $\tilde{c}_1=\left(\frac{\theta}{2}+1\right)(M+2c_0)$. 结合条件(f3)，可知

$$zf(x, z)-\theta F(x, z) \geqslant -(c_1+\tilde{c}_1)|z|^2 \qquad \forall (x, z) \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R} \tag{12}$$

由 $G(x, z)=\int_0^1 g(x, tz)z\mathrm{d}t$，以及条件(g1)、Hölder 不等式和(2) 式，推出

$$\left|\int_{\mathbb{R}^N}(g(x, u)u-\theta G(x, u))\mathrm{d}x\right| \leqslant \int_{\mathbb{R}^N}(|g(x, u)u|+\theta|G(x, u)|)\mathrm{d}x \leqslant$$
$$\left(\frac{\theta}{q_1}+1\right)|h_1|_{\frac{2}{2-q_1}} d_2^{q_1}\|u\|^{q_1}+\left(\frac{\theta}{q_2}+1\right)|h_2|_{\frac{2}{2-q_2}} d_2^{q_2}\|u\|^{q_2}$$

当 $n\to\infty$ 时，$\|u\|\to\infty$. 由 $1<q_1<q_2<2$，当 $n\to\infty$ 时，有

$$\frac{\left|\int_{\mathbb{R}^N}(g(x, u_n)u_n-\theta G(x, u_n))\mathrm{d}x\right|}{\|u_n\|^2}\to 0$$

故根据(3),(4) 式和 $\theta>2$，当 $n\to\infty$ 时，有

$$\frac{1}{\|u_n\|^2}(\theta J(u_n)-\langle J'(u_n), u_n\rangle)=$$
$$\left(\frac{\theta}{2}-1\right)+\mu\frac{\int_{\mathbb{R}^N}(g(x, u_n)u_n-\theta G(x, u_n))\mathrm{d}x}{\|u_n\|^2}+\frac{\int_{\mathbb{R}^N}(u_n f(x, u_n)-\theta F(x, u_n))\mathrm{d}x}{\|u_n\|^2} \geqslant$$
$$\left(\frac{\theta}{2}-1\right)+\mu\frac{\int_{\mathbb{R}^N}(g(x, u_n)u_n-\theta G(x, u_n))\mathrm{d}x}{\|u_n\|^2}-(c_1+\tilde{c}_1)|w_n|_2^2\to\frac{\theta}{2}-1$$

由此可推出 $0\geqslant\frac{\theta}{2}-1$，这个不等式与 $\theta>2$ 矛盾. 故$\{u_n\}$ 在 $S^2_{\gamma,V(x)}(\mathbb{R}^N)$ 中有界.

引理 4　设条件(V1),(g1) 和(f1) 成立，则 J 的任意有界 Palais-Smale 序列在 $S^2_{\gamma,V(x)}(\mathbb{R}^N)$ 中有强收敛子列.

证　假设$\{u_n\}$ 是函数 J 的有界 Palais-Smale 序列，即存在常数 $c\in\mathbb{R}$，当 $n\to\infty$ 时，有

$$\sup\|u_n\|<+\infty \qquad J(u_n)\to c \qquad J'(u_n)\to 0$$

则存在$\{u_n\}$ 的子列(仍记为$\{u_n\}$) 和 $u\in S^2_{\gamma,V(x)}(\mathbb{R}^N)$，使得在 $L^q(\mathbb{R}^N)$ 中 $u_n\to u(2\leqslant q<2^*_\gamma)$. 显然，当 $n\to\infty$ 时，有

$$\langle J'(u_n)-J'(u), u_n-u\rangle\to 0 \tag{13}$$

由条件(f1) 以及 Hölder 不等式，当 $n\to\infty$ 时，有

$$\int_{\mathbb{R}^N}(f(x, u_n)-f(x, u))(u_n-u)\mathrm{d}x\to 0 \tag{14}$$

根据条件(g1)、(2) 式以及 $\sup\|u_n\|<+\infty$，当 $n\to\infty$ 时，可得

$$\left|\int_{\mathbb{R}^N}g(x, u_n)(u_n-u)\mathrm{d}x\right| \leqslant |h_1|_{\frac{2}{2-q_1}}|u_n|_2^{q_1-1}|u_n-u|_2+|h_2|_{\frac{2}{2-q_2}}|u_n|_2^{q_2-1}|u_n-u|_2 \leqslant$$
$$|h_1|_{\frac{2}{2-q_1}} d_2^{q_1-1}\|u_n\|^{q_1-1}|u_n-u|_2+|h_2|_{\frac{2}{2-q_2}} d_2^{q_2-1}\|u_n\|^{q_2-1}|u_n-u|_2\to 0$$

用相似的证明方法，当 $n\to\infty$ 时，有

$$\left|\int_{\mathbb{R}^N}g(x, u)(u_n-u)\mathrm{d}x\right|\to 0$$

因此，当 $n \to \infty$ 时，有

$$\int_{\mathbb{R}^N}(g(x, u_n)-g(x, u))(u_n-u)\mathrm{d}x=\int_{\mathbb{R}^N}g(x, u_n)(u_n-u)\mathrm{d}x-\int_{\mathbb{R}^N}g(x, u)(u_n-u)\mathrm{d}x \to 0$$

由此，结合(13)和(14)式，当 $n \to \infty$ 时，可得

$$\|u_n-u\|^2=\langle J'(u_n)-J'(u), u_n-u\rangle+\mu\int_{\mathbb{R}^N}(g(x, u_n)-g(x, u))(u_n-u)\mathrm{d}x+\int_{\mathbb{R}^N}(f(x, u_n)-f(x, u))(u_n-u)\mathrm{d}x \to 0$$

故 $\{u_n\} \subset S^2_{\gamma,V(x)}(\mathbb{R}^N)$ 有强收敛子列.

定理 1 的证明 根据引理 1—引理 4 可知文献[13]中定理 9.12 的所有条件被满足. 因此，方程(1)在 $S^2_{\gamma,V(x)}(\mathbb{R}^N)$ 中有无穷多个大能量解.

参考文献：

[1] KOGOJ A E, LANCONELLI E. On Semilinear Δ_λ-Laplace Equation [J]. Nonlinear Analysis, 2012, 75(12): 4637-4649.

[2] GRUŠIN V V. On A Class of Elliptic Pseudodifferential Operators that are Degenerate on a Submanifold [J]. Mathematics of the USSR-Sbornik, 1971, 84(2): 163-195.

[3] FRANCHI B, LANCONELLI E. Hölder Regularity Theorem for a Class of Linear Nonuniformly Elliptic Operators with Measurable Coefficients [J]. Annali Della Scuola Normale Superiore di Pisa-Classe di Scienze, 1983, 10(4): 523-541.

[4] FRANCHI B, LANCONELLI E. An Embedding Theorem for Sobolev Spaces Related to Non-Smooth Vector Fieldsand Harnack Inequality [J]. Communications in Partial Differential Equations, 1984, 9(13): 1237-1264.

[5] ANH C T. Global Attractor for a Semilinear Strongly Degenerate Parabolic Equation on $\mathbb{R}^N$ [J]. Nonlinear Differential Equations and Applications, 2014, 21(5): 663-678.

[6] LUYEN D T, TRI N M. Existence of Infinitely Many Solutions for Semilinear Degenerate Schrödinger Equations [J]. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 2018, 461(2): 1271-1286.

[7] AMBROSETTI A, RABINOWITZ P H. Dual Variational Methods in Critical Point Theory and Applications [J]. Journal of Functional Analysis, 1973, 14(4): 349-381.

[8] 陈兴菊，欧增奇. 具有 Fučik 谱共振的 Kirchhoff 方程非平凡解的存在性 [J]. 西南师范大学学报(自然科学版), 2021, 46(8): 24-31.

[9] 蒙璐，储昌木，雷俊. 一类带有变指数增长的 Neumann 问题 [J]. 西南大学学报(自然科学版), 2021, 43(6): 82-88.

[10] 余芳，陈文晶. 带有临界指数增长的分数阶问题解的存在性 [J]. 西南大学学报(自然科学版), 2020, 42(10): 116-123.

[11] RAHAL B, HAMDANI M K. Infinitely Many Solutions for Δ_α-Laplace Equations with Sign-Changing Potential [J]. Journal of Fixed Point Theory and Applications, 2018, 20(4): 1-17.

[12] CHEN S J, TANG C L. High Energy Solutions for the Superlinear Schrödinger-Maxwell Equations [J]. Nonlinear Analysis, 2009, 71(10): 4927-4934.

[13] RABINOWITZ P. Minimax Methods in Critical Point Theory with Applications to Differential Equations [M]. Providence, Rhode Island: American Mathematical Society, 1986.

责任编辑 廖坤