第 47 卷 第 2 期 西南师范大学学报(自然科学版) 2022 年 2 月
Vol. 47 No. 2 Journal of Southwest China Normal University (Natural Science Edition) Feb. 2022

DOI:10.13718/j.cnki.xsxb.2022.02.006

可交换的 Toeplitz 算子①

丁宣浩[1,2], 梁焕超[1], 李永宁[1,2]

1. 重庆工商大学 数学与统计学院,重庆 400067;2. 经济社会应用统计重庆市重点实验室,重庆 400067

摘要: 受到已有文献在不同空间上关于 Toeplitz 算子的相关研究工作的启发,本文展开了对 Toeplitz 算子的交换性的研究. 通过借助于 Brown-Halmos 定理,应用 Coburn 引理和数学归纳法得到了任意有限多个 Toeplitz 算子可交换的充要条件. 并且通过进一步研究,还得到了任意有限个 Toeplitz 算子模去有限秩算子可交换的充分必要条件.

关 键 词: Toeplitz 算子;交换性;Hardy 空间;Brown-Halmos 定理;有限秩

中图分类号: 177.1 **文献标志码:** A **文章编号:** 1000-5471(2022)02-0027-05

On Commuting Toeplitz Operators

DING Xuanhao[1,2], LIANG Huanchao[1], LI Yongning[1,2]

1. *School of Mathematics and Statistics, Chongqing Technology and Business University, Chongqing 400067, China;*
2. *Chongqing Key Laboratory of Social Economy and Applied Statistics, Chongqing 400067, China*

Abstract: Inspired by related research work on Toeplitz operators in different spaces, then the research on the commutativity of Toeplitz operators has been launched. By means of Brown-Halmos' theorem, applying Coburn's lemma and mathematical induction, the necessary and sufficient conditions for the commutativity of any finitely many Toeplitz operators have been obtained, and through further research, the necessary and sufficient conditions for the commutativity of any finite Toeplitz operator modulo the finite rank operators been obtained.

Key words: Toeplitz operators; commutativity; Hardy spaces; Brown-Halmos' theorem; finite rank

设 D 为复平面上的单位开圆盘,且 ∂D 是单位圆周,$d\sigma(z)$ 表示单位圆周 ∂D 上的正规化的 Lebesgue 测度. 设 L^2 为单位圆周上的 Lebesgue 平方可积函数,Hardy 空间 H^2 是由 L^2 中的解析多项式线性张成的闭子空间. 记 L^∞ 为单位圆周上本质有界函数构成的空间,H^∞ 表示单位圆盘上有界解析函数的全体构成的空间[1]. 对任意的 $f \in L^2$,关于 f 的 Fourier 展开式为 $f(z)=\sum\limits_{n=-\infty}^{+\infty} a_n z^n$,其中关于 f 的 Fourier 系数为 $a_n=\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} f(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})\mathrm{e}^{-\mathrm{i}n\theta}\mathrm{d}\theta\ (n\in\mathbb{Z})$. 设 $\{a_n\}_{n=-\infty}^{\infty}$ 为复数序列,$a_n\in\mathbb{C}$,$l^2=l^2(\mathbb{N})$,其中 $\mathbb{N}$ 为 $\{0, 1, 2, \cdots\}$,则矩阵

---

① 收稿日期:2021-04-26
基金项目:国家自然科学基金项目(11871122,12101092);重庆市自然科学基金项目(cstc2020jcyj-msxmX0318);重庆市教委基金项目(KJQN202100822);重庆工商大学基金项目(2020316,2053010);重庆工商大学研究生创新型科研项目(yjscxx2021-112-108).
作者简介:丁宣浩,二级教授,博士,主要从事函数空间上的算子理论的研究.

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} a_0 & a_{-1} & a_{-2} & \cdots \\ a_1 & a_0 & a_{-1} & \cdots \\ a_2 & a_1 & a_0 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix} \tag{1}$$

为 l^2 上的一个有界算子当且仅当 $\{a_n\}$ 为某个函数 $f \in L^\infty$ 的 Fourier 系数. 在这种情况下,由(1)式给出的算子范数等于 $\|f\|_\infty = \operatorname*{ess\,sup}_{t\in D} |f(t)|$. 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 称为 Toeplitz 矩阵,其特征是平行于主对角线上的元素为常数.

记 P 是从 L^2 到 H^2 的正交投影,对 $\phi \in L^\infty$ 和任意的 $f \in H^2$,以 ϕ 为符号的 Toeplitz 算子 $T_\phi: H^2 \longrightarrow H^2$ 定义为 $T_\phi f = P(\phi f)$. Toeplitz 算子作为函数空间上算子理论中的一类重要算子,是众多学者一直以来的研究对象[1]. 更多关于 Toeplitz 算子的知识,可参见文献[2-13],关于投影的知识,可参见文献[14]. 算子的可交换性是算子的一个重要性质,是一种广义的对称性,在物理学和数学等领域中均起着突出作用,例如物理学家主要是从初始条件、对称性和物理上的规律这 3 个方面来观察世界,物理中涉及到的方程及变换许多都是具有对称性的.

在函数空间上的算子理论中,我们主要关注的是不同函数空间上的 Toeplitz 算子的交换性问题,例如 Hardy 空间、Bergman 空间、Dirichlet 空间、Fock 空间等. 文献[7] 给出了经典 Hardy 空间上两个 Toeplitz 算子可交换的充分必要条件,树立了 Toeplitz 算子理论研究的典范.

引理 1[7] 设 $f, g \in L^\infty$,则 $T_f T_g = T_g T_f$ 当且仅当下列条件之一成立:

(i) f, g 均是解析的,即 $f \in H^\infty$ 且 $g \in H^\infty$;

(ii) f, g 均是余解析的,即 $\bar{f} \in H^\infty$ 且 $\bar{g} \in H^\infty$;

(iii) f, g 的非平凡线性组合是常数,即存在 $a, b, c \in \mathbb{C}$ 且 $|a|+|b|>0$,使得 $af+bg=c$.

文献[8] 给出了 $T_f T_g - T_g T_f$ 是紧算子的充分必要条件. 文献[2] 完全刻画了 $T_f T_g - T_g T_f$ 是有限秩的情况. 文献[3] 应用 Berezin 变换和调和延拓的方法进行研究,给出了双圆盘 Hardy 空间上的两个 Toeplitz 算子可交换的充分必要条件. 由两个 Toeplitz 算子的乘积到 n 个 Toeplitz 算子的乘积,曾经有一个历时很久的公开问题,即当 n 个 Toeplitz 算子的乘积为 0 时,是否必有一个 Toeplitz 算子为 0? 该问题称为 Toeplitz 算子的零积问题. 文献[7] 证明了:两个 Toeplitz 算子的乘积为 0,其中必有一个为 0. 文献[9] 用巧妙的方法证明了:5 个 Toeplitz 算子的乘积为 0,其中必有一个为 0. 文献[10] 证明了 6 个 Toeplitz 算子的乘积的情况也成立. 最终,文献[11] 对 n 个 Toeplitz 算子的零积问题给出了肯定的回答. 受 Toeplitz 算子的零积问题的启发,很自然地,我们想知道 n 个 Toeplitz 算子的乘积在什么条件下是可交换的. 本文借助 Brown-Halmos 定理,应用 Coburn 引理[4],得到了 n 个 Toeplitz 算子可交换的充要条件.

引理 2[4](Coburn 引理) 设 $f \in L^\infty$,且 f 不是几乎处处为 0 的,则 $\operatorname{Ker} T_f = \{0\}$ 或 $\operatorname{Ker} T_f^* = \{0\}$.

命题 1 若 $f \in L^\infty$,$f|_E = 0$,$f|_{\partial D - E} \neq 0$,$E \subset \partial D$,$E$ 的测度大于 0 且小于 1,则 $\operatorname{Ker} T_f = \{0\}$.

证 设 $x \in H^2$ 使得 $T_f x = 0$,则有

$$f \cdot x = y \qquad y \in (H^2)^\perp = \overline{zH^2}$$

即有 $y|_E = 0$. 由于 $\bar{y} \in H^2$,根据 F.M.Riesz 定理[4] 可得 $y \equiv 0$. 又由 $f \cdot x = 0$,有 $x|_{\partial D - E} = 0$. 再次应用 F.M.Riesz 定理[4] 可得 $x = 0$,即有 $\operatorname{Ker} T_f = \{0\}$. 证毕.

依据 $\operatorname{Ker} A = (\operatorname{Ran} A^*)^\perp$ 对任意有界线性算子 A 成立,再由命题 1,我们有下面的 Coburn 引理的变形:

引理 3(Coburn 引理的变形) 设 $f \in L^\infty$ 且 f 为非零函数,则 $\operatorname{Ker} T_f = \{0\}$ 或 $\operatorname{cl}(\operatorname{Ran} T_f) = H^2$,这里 $\operatorname{cl}(\operatorname{Ran} T_f)$ 表示 T_f 的值域的闭包.

1 可交换性

在本节当中,通过应用 Brown-Halmos 定理[7] 和数学归纳法得到了 Hardy 空间上任意有限多个 Toeplitz 算子任意次序可交换的充要条件.

定理 1　设 $f_i \in L^{\infty}$ 为非零函数($i=1,2,\cdots,n$)，则对所有的置换 $\sigma \in S_n$，$T_{f_{\sigma(1)}}T_{f_{\sigma(2)}}\cdots T_{f_{\sigma(n)}}=T_{f_1}T_{f_2}\cdots T_{f_n}$ 当且仅当下列条件之一成立：

(i) 当 $i=1,2,\cdots,n$ 时，每个 f_i 都是解析的；

(ii) 当 $i=1,2,\cdots,n$ 时，每个 f_i 都是余解析的；

(iii) 对任意的 $1\leqslant i,j\leqslant n$，且 $i\neq j$ 时，f_i 与 f_j 的非平凡线性组合是常数.

证　利用引理 1，充分性显然成立，因此只需证明结论的必要性，我们将通过数学归纳法证明.

当 $n=2$ 时，由引理 1 的结果可知结论成立，下面进入归纳步骤. 假设当 $n=k>2$ 时结论成立，即由

$$T_{f_{\sigma(1)}}\cdots T_{f_{\sigma(2)}}T_{f_{\sigma(k)}}=T_{f_1}T_{f_2}\cdots T_{f_k}$$

必有条件(i)—(iii) 之一对 $f_i(i=1,2,\cdots,k)$ 成立，其中 σ 是集合$\{1,2,\cdots,k\}$到其自身上的一个置换.

需证任意 $k+1$ 个 Toeplitz 算子可交换，则条件(i)—(iii) 之一成立. 设 $k+1$ 个 Toeplitz 算子可交换.

若 $f_1,f_2,\cdots,f_k,f_{k+1}$ 当中有一个为常数，则 $k+1$ 个 Toeplitz 算子相乘就转变成了至多 k 个 Toeplitz 算子相乘，由归纳假设，结论成立.

若 $f_1,f_2,\cdots,f_k,f_{k+1}$ 都不为常数，由 $k+1$ 个 Toeplitz 算子可交换，则有

$$T_{f_{\sigma(1)}}\cdots T_{f_{\sigma(k)}}T_{f_{k+1}}=T_{f_1}\cdots T_{f_k}T_{f_{k+1}} \tag{2}$$

以及

$$T_{f_{k+1}}T_{f_{\sigma(1)}}\cdots T_{f_{\sigma(k)}}=T_{f_{k+1}}T_{f_1}\cdots T_{f_k} \tag{3}$$

根据引理 3 可知：若 $\mathrm{Ker}\,T_{f_{k+1}}=\{0\}$，由等式(2) 推出

$$T_{f_{\sigma(1)}}T_{f_{\sigma(2)}}\cdots T_{f_{\sigma(k)}}=T_{f_1}T_{f_2}\cdots T_{f_k}$$

若 $\mathrm{cl}(\mathrm{Ran}\,T_{f_{k+1}})=H^2$，则由等式(3) 仍可推出

$$T_{f_{\sigma(1)}}\cdots T_{f_{\sigma(k)}}=T_{f_1}\cdots T_{f_k}$$

由归纳假设，$f_1,f_2,\cdots,f_k$ 满足条件(i)—(iii) 之一.

同样由 $T_{f_1},\cdots T_{f_k},T_{f_{k+1}}$ 可交换，则有

$$T_{f_1}T_{f_{\sigma'(2)}}\cdots T_{f_{\sigma'(k+1)}}=T_{f_1}T_{f_2}\cdots T_{f_{k+1}}$$

以及

$$T_{f_{\sigma'(1)}}\cdots T_{f_{\sigma'(k)}}T_{f_{k+1}}=T_{f_1}\cdots T_{f_k}T_{f_{k+1}}$$

其中 σ' 是集合$\{2,3,\cdots,k+1\}$到其自身上的一个置换. 类似地，可得

$$T_{f_{\sigma'(2)}}\cdots T_{f_{\sigma'(k+1)}}=T_{f_2}\cdots T_{f_{k+1}}$$

由归纳假设，$f_2,f_3,\cdots,f_{k+1}$ 满足条件(i)—(iii) 之一.

下面分 3 种情形讨论：

情形 1　由 $f_1,f_2,\cdots,f_k$ 都解析，可推出 f_{k+1} 也解析.

若 $f_2,\cdots,f_k,f_{k+1}$ 解析，当然 f_{k+1} 也解析.

若 $f_2,\cdots,f_k,f_{k+1}$ 共轭解析，则 $f_2,f_3,\cdots,f_k$ 既解析又共轭解析，那么 $f_2,f_3,\cdots,f_k$ 都为常数，与前提不符.

若 $f_2,\cdots,f_k,f_{k+1}$ 两两非平凡的线性组合为常数，即有 $af_2+bf_{k+1}=c$ 且 $a,b,c\in\mathbb{C}$，因为 f_2 不是常数，所以 $b\neq 0$，从而 $f_{k+1}=-\dfrac{1}{b}(af_2+c)$，故 f_{k+1} 也解析.

情形 2　由 $f_1,f_2,\cdots,f_k$ 都共轭解析，类似于情形 1 的讨论可推出 f_{k+1} 也共轭解析.

情形 3　由 $f_1,f_2,\cdots,f_k$ 两两非平凡线性组合为常数，可推出 $f_1,f_2,\cdots,f_k,f_{k+1}$ 满足条件(i)—(iii) 之一.

若 $f_2,\cdots,f_k,f_{k+1}$ 解析，则有 $af_1+b_2=c$ 且 $a,b,c\in\mathbb{C}$. 又由 f_1,f_2 都不为常数，则有 $a\neq 0$，即有 $f_1=\dfrac{1}{a}(c-bf_2)$，故 f_1 解析.

若 $f_2,\cdots,f_k,f_{k+1}$ 共轭解析，类似地可得 f_1 也共轭解析.

若 $f_2,\cdots,f_k,f_{k+1}$ 两两非平凡的线性组合为常数，即有 $a_1f_1+b_1f_2=c_1$，$a_2f_2+b_2f_{k+1}=c_2$ 且

$a_i, b_i \neq 0(i=1,2)$. 从而 $-\dfrac{a_1a_2}{b_1}f_1+b_2f_{k+1}=c_2-\dfrac{a_2c_1}{b_1}$，即 f_1, f_{k+1} 非平凡的线性组合也为常数.

由此可得，对所有的 $f_i(i=1,2,\cdots,k,k+1)$，这 $k+1$ 个函数一定满足条件(i)—(iii)之一.

综上所述，通过数学归纳法，对任意正整数 n，定理1成立.

2 模去有限秩算子后的交换性

文献[2]刻画了两个Toeplitz算子模去有限秩算子可交换的条件. 下面，通过进一步研究得到了任意有限个Toeplitz算子模去有限秩算子可交换的刻画，结论如下：

定理2 设 $f_i \in L^\infty$ 为非零函数$(i=1,2,\cdots,n)$，则对所有的置换 σ，有

$$T_{f_{\sigma(1)}}T_{f_{\sigma(2)}}\cdots T_{f_{\sigma(n)}}=T_{f_1}T_{f_2}\cdots T_{f_n}\bmod(F)$$

成立当且仅当对任意的 $1\leqslant i,j\leqslant n$ 且 $i\neq j$，$T_{f_i}T_{f_j}=T_{f_j}T_{f_i}\bmod(F)$，其中 F 为有限秩算子全体.

证 充分性显然，因此只需要证明结论的必要性. 下证必要性. 当 $n=3$ 时，对所有置换 σ，有

$$T_{f_{\sigma(1)}}T_{f_{\sigma(2)}}T_{f_{\sigma(3)}}=T_{f_1}T_{f_2}T_{f_3}\bmod(F)$$

则

$$T_{f_1}T_{f_{\sigma'(2)}}T_{f_{\sigma'(3)}}=T_{f_1}T_{f_2}T_{f_3}\bmod(F)$$

从而有

$$T_{f_1}(T_{f_3}T_{f_2}-T_{f_2}T_{f_3})=F_1$$

其中 F_1 为有限秩算子. 又由引理3知有以下两种情况发生：

情形1 若 $\mathrm{Ker}\, T_{f_1}=\{0\}$，则 T_{f_1} 为单射. 由

$$T_{f_1}(T_{f_3}T_{f_2}-T_{f_2}T_{f_3})H^2=F_1H^2$$

得$(T_{f_3}T_{f_2}-T_{f_2}T_{f_3})H^2$ 为有限维的. 从而

$$T_{f_2}T_{f_3}=T_{f_3}T_{f_2}\bmod(F)$$

情形2 若 $\mathrm{cl}(T_{f_1}H^2)=H^2$，根据

$$(T_{f_2}T_{f_3}-T_{f_2}T_{f_3})T_{f_1}=F_2$$

其中 F_2 为有限秩算子，则有

$$\mathrm{cl}[(T_{f_3}T_{f_2}-T_{f_2}T_{f_3})T_{f_1}H^2]=\mathrm{cl}(F_2H^2)$$

记 $\mathrm{cl}(F_2H^2)=M$，则 M 为闭的有限维空间. 对任意的 $x\in H^2$，因 T_{f_1} 有稠值域，则存在 $x_n\in H^2$，使得 $T_{f_1}x_n\rightarrow x$(这里的收敛是按 H^2 中的范数收敛)，从而有

$$(T_{f_3}T_{f_2}-T_{f_2}T_{f_3})T_{f_1}x_n\in M$$

由于 M 为闭的，故有

$$(T_{f_3}T_{f_2}-T_{f_2}T_{f_3})x\in M$$

因此可得

$$(T_{f_3}T_{f_2}-T_{f_2}T_{f_3})H^2\subset M$$

故 $T_{f_2}T_{f_3}-T_{f_3}T_{f_2}=0\bmod(F)$，即 $T_{f_2}T_{f_3}=T_{f_3}T_{f_2}\bmod(F)$.

同理，根据

$$F_{f_2}(T_{f_3}T_{f_1}-T_{f_1}T_{f_3})=0\bmod(F)$$

以及

$$T_{f_3}(T_{f_1}T_{f_2}-T_{f_2}T_{f_1})=0\bmod(F)$$

分别可推出

$$T_{f_1}T_{f_3}=T_{f_3}T_{f_1}\bmod(F)$$
$$T_{f_2}T_{f_1}=T_{f_1}T_{f_2}\bmod(F)$$

因此，结论成立.

假设当 $n=k>3$ 时结论成立，即如果

$$T_{f_{\sigma''(1)}}T_{f_{\sigma''(2)}}\cdots T_{f_{\sigma''(k)}}=T_{f_1}T_{f_2}\cdots T_{f_k}\bmod(F)$$

其中 σ'' 是集合$\{1, 2, \cdots, k\}$ 到其自身上的一个置换，则有

$$T_{f_i}T_{f_j}=T_{f_j}T_{f_i}\bmod(F)\qquad 1\leqslant i,j\leqslant n;\ i\neq j$$

当 $n=k+1$ 时，由于 $T_{f_{\sigma(1)}}T_{f_{\sigma(2)}}\cdots T_{f_{k+1}}=T_{f_1}T_{f_2}\cdots T_{f_{k+1}}\bmod(F)$，则有

$$T_{f_1}T_{f_{\sigma''(2)}}\cdots T_{f_{\sigma''(k+1)}}=T_{f_1}T_{f_2}\cdots T_{f_{k+1}}\bmod(F)$$

从而有

$$T_{f_1}(T_{f_{\sigma'''(2)}}\cdots T_{f_{\sigma'''(k+1)}}-T_{f_2}\cdots T_{f_{k+1}})=F_3$$

其中，F_3 为有限秩算子，这里 σ''' 为$\{2, 3, \cdots, k+1\}$ 到其自身上的一个置换.

再次应用引理 3，同理可得 $T_{f_{\sigma'''(2)}}\cdots T_{f_{\sigma'''(k+1)}}-T_{f_2}\cdots T_{f_{k+1}}$ 为有限秩算子. 又由 $n=k$ 时结论成立知

$$T_{f_i}T_{f_j}=T_{f_j}T_{f_i}\bmod(F)$$

这里 $2\leqslant i,j\leqslant k+1$，且 $i\neq j$.

类似 $n=3$ 的情况，同理可证：对任意的 $1\leqslant i,j\leqslant k+1$ 且 $i\neq j$，$T_{f_i}T_{f_j}=T_{f_j}T_{f_i}\bmod(F)$ 成立.

综上所述，对所有的自然数 n，定理 2 成立.

3　结束语

针对 Hardy 空间上 Toeplitz 算子的交换性问题，通过借助 Brown-Halmos 定理，应用 Coburn 引理和数学归纳法得到了 n 个 Toeplitz 算子可交换的充要条件，并对任意有限个 Toeplitz 算子模去有限秩算子可交换的充分必要条件进行了刻画. 文献[8] 给出了 $T_fT_g-T_gT_f$ 是紧算子的充分必要条件. 对于何种条件下，任意有限多个有界 Toeplitz 算子的乘积模去紧算子可交换的问题，也是一个有趣的问题，有待进一步的研究.

问题　设 $f_i\in L^\infty$ 为非零函数($i=1,2,\cdots,n$)，则对所有的置换 σ，

$$T_{f_{\sigma(1)}}T_{f_{\sigma(2)}}\cdots T_{f_{\sigma(n)}}=T_{f_1}T_{f_2}\cdots T_{f_n}\bmod(K)$$

成立的充分必要条件是什么？ 其中 K 为紧算子全体.

参考文献：

[1] SARASON D. Function Theory on the Unit Circle [M]. Blacksburg, Virginia: Virginia Polytechnic Institute and State University, 1979: 18-31.

[2] DINGX H, ZHENG D C. Finite Rank Commutator of Toeplitz Operators or Hankel Operators [J]. Houston Journal of Mathematics, 2008, 34(4): 1099-1120.

[3] DING X H, SUN S H, ZHENG D C. Commuting Toeplitz Operators on the Bidisk [J]. Journal of Functional Analysis, 2012, 263(11): 3333-3357.

[4] DOUGLAS R G. Banach Algebra Techniques in Operator Theory [M]. 2th ed. New York: Springer-Verlag, 1998: 158-182.

[5] DINGX H. The Finite Rank Perturbations of the Product of Hankel and Toeplitz Operators [J]. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 2008, 337(1): 726-738.

[6] GUOK Y, ZHENG D C. Essentially Commuting Hankel and Toeplitz Operators [J]. Journal of Functional Analysis, 2003, 201(1): 121-147.

[7] BROWN A, HALMOS P R. Algebraic Properties of Toeplitz Operators [J]. Journal Für Die Reine und Angewandte Mathematik(Crelles Journal), 1964, 213: 89-102.

[8] GORKIN P, ZHENGD C. Essentially Commuting Toeplitz Operators [J]. Pacific Journal of Mathematics, 1999, 190(1): 87-109.

[9] GUO K Y. A Problem on Products of Toeplitz Operators [J]. Proceedings of the American Mathematical Society, 1996, 124(3): 869-871.

[10] GU C X. Products of Several Toeplitz Operators [J]. Journal of Functional Analysis, 2000, 171(2): 483-527.

[11] ALEMAN A, VUKOTIĆ D. Zero Products of Toeplitz Operators [J]. Duke Mathematical Journal, 2009, 148(3): 373-403.

[12] 李永宁，梁焕超，丁宣浩. 圆周上的小 Hankel 算子 [J]. 西南大学学报(自然科学版)，2021，43(6)：89-94.

[13] 李永宁，梁焕超，丁宣浩. 3 个 Toeplitz 算子的乘积 [J]. 西南师范大学学报(自然科学版)，2021，46(8)：18-23.

[14] 刘　妮，郭艳鹂，任谨慎，等. 幂等算子核空间的刻画 [J]. 西南大学学报(自然科学版)，2020，42(8)：102-105.

责任编辑　廖坤