第 47 卷 第 2 期　　西南师范大学学报(自然科学版)　　2022 年 2 月
Vol. 47　No. 2　　Journal of Southwest China Normal University (Natural Science Edition)　　Feb.　2022

DOI:10.13718/j.cnki.xsxb.2022.02.007

积分形式的 Bonnesen 型不等式①

马磊[1]，　董旭[2]，　曾春娜[2]

1. 广东茂名幼儿师范专科学校 理学院，广东 茂名 525200；2. 重庆师范大学 数学科学学院，重庆 401331

摘要：本文探索了积分形式的 Bonnesen 型不等式. 利用函数的积分不等式与周期函数的性质，得到了一系列积分形式的 Bonnesen 型不等式. 为关于原点对称且具有光滑边界的闭凸区域的 Bonnesen 型不等式找到了一种纯分析的证明.

关　键　词：周期函数；积分不等式；Bonnesen 型不等式

中图分类号：O186.5；O172.2　　**文献标志码**：A　　**文章编号**：1000－5471(2022)02－0032－05

The Bonnesen-Type Inequality of Integral Form

MA Lei[1]，　DONG Xu[2]，　ZENG Chunna[2]

1. *Department of Sciences, Guangdong Preschool Normal College in Maoming, Maoming Guangdong 525200, China;*
2. *School of Mathematical Sciences, Chongqing Normal University, Chongqing 401331, China*

Abstract: Some Bonnesen-type inequalities in integral form have been investigated. Based on the integral inequality of function and the properties of periodic function, a series of bonnesen-type inequalities in integral form have been obtained, and a proof of pure analysis has been obtained for the Bonnesen-type inequality with respect to the closed convex region with symmetric origin and smooth boundary.

Key words: periodic function; integral inequality; Bonnesen-type inequality

等周不等式源于等周问题，是几何中最著名的不等式之一，对数学的诸多分支的发展起到了重要的促进作用. 等周不等式的加强形式是著名的 Bonnesen 型等周不等式. 文献[1] 深入研究了平面等周不等式，利用凸体的最大内接圆半径和最小外接圆半径给出了等周不等式的加强形式，文献[2] 称这类等周型不等式为Bonnesen型等周不等式，目前，一般简称为Bonnesen型不等式. Bonnesen型不等式是著名的等周不等式的经典推广与加强，它刻画了平面上简单几何闭曲线的周长与其所围成的面积以及其内接圆半径、外接圆半径等其他几何量的关系. 文献[3-8] 利用积分几何中的包含测度理论，系统地得到了这类不等式及其进一步的加强形式. 关于平面多边形的离散型的 Bonnesen 型不等式，目前，我们知道的或许只有文献[9-11] 中的结果，这些不等式的证明都通过寻找与他们等价的分析形式的不等式而得到. 我们尚未注意到关于平

① 收稿日期：2021－05－27
基金项目：国家自然科学基金项目(11801048)；重庆市留学人员创新创业支持计划(cx2019155)；重庆市教委科学技术研究项目(KJQN201900530)；2020 年度广东省普通高校特色创新项目(2020KTSCX358).
作者简介：马磊，副教授，硕士，主要从事积分几何与凸几何分析的研究.
通信作者：曾春娜，教授，博士.

面上一般闭凸区域 K 的 Bonnesen 型不等式的纯分析等价形式，如下列经典 Bonnesen 型不等式的纯分析的等价形式至今未知：

$$L^2-4\pi A\geqslant 4\pi^2\left(r_e-\frac{L}{2\pi}\right)^2 \tag{1}$$

$$L^2-4\pi A\geqslant 4\pi^2\left(r_i-\frac{L}{2\pi}\right)^2 \tag{2}$$

$$L^2-4\pi A\geqslant \pi^2(r_e-r_i)^2 \tag{3}$$

其中 L,A 分别为平面闭凸区域 K 的边界周长与面积，r_i 和 r_e 分别为 K 的最大内接圆半径与最小外接圆半径. 即使 K 为具有光滑边界的且关于原点对称的闭凸区域，其 Bonnesen 型不等式的纯分析形式的结论甚少.

设 $p(\theta)$ 为平面上包含原点的具有光滑边界的闭凸区域 K 的支撑函数(即 $p(\theta)$ 是以 2π 为周期的二阶连续可微函数)，则 K 的周长 $L=\int_0^{2\pi}p\,\mathrm{d}\theta$，面积 $A=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}p(p+p'')\mathrm{d}\theta$ (参见文献[1,12-15]). 特别地，当 K 关于原点对称时 $p(\theta)=p(\theta+\pi)$. 根据 $p(\theta)$ 是以 2π 为周期的函数可知，当 K 关于原点对称时，$p(\theta)$ 是以 π 为周期的函数，且其最大内接圆半径与最小外接圆半径分别为

$$M=\max\{p:0\leqslant\theta\leqslant\pi\}$$

$$m=\min\{p:0\leqslant\theta\leqslant\pi\}$$

因此，当 K 关于原点对称时，不等式(1),(2),(3) 等价于下面我们获得的不等式(4) 的特殊形式(5),(6),(7).

设 $p(\theta)$ 是以 π 为周期的 C^2(二阶连续可微) 函数，则

$$\left(\int_0^{\pi}p(\theta)\mathrm{d}\theta\right)^2-\pi\int_0^{\pi}p(\theta)(p(\theta)+p''(\theta))\mathrm{d}\theta\geqslant\pi^2\left(\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}p(\theta)\mathrm{d}\theta-p(\theta_0)\right)^2\qquad \theta_0\in[0,\pi] \tag{4}$$

特别地，当 $m=\min\{p:0\leqslant\theta\leqslant\pi\}$ 时，

$$\left(\int_0^{\pi}p(\theta)\mathrm{d}\theta\right)^2-\pi\int_0^{\pi}p(\theta)(p(\theta)+p''(\theta))\mathrm{d}\theta\geqslant\pi^2\left(\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}p(\theta)\mathrm{d}\theta-m\right)^2 \tag{5}$$

当 $M=\max\{p:0\leqslant\theta\leqslant\pi\}$ 时，

$$\left(\int_0^{\pi}p(\theta)\mathrm{d}\theta\right)^2-\pi\int_0^{\pi}p(\theta)(p(\theta)+p''(\theta))\mathrm{d}\theta\geqslant\pi^2\left(\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}p(\theta)\mathrm{d}\theta-M\right)^2 \tag{6}$$

从而可得

$$\left(\int_0^{\pi}p(\theta)\mathrm{d}\theta\right)^2-\pi\int_0^{\pi}p(\theta)(p(\theta)+p''(\theta))\mathrm{d}\theta\geqslant\frac{\pi^2}{4}(M-m)^2 \tag{7}$$

注 1　由于闭凸区域 K 的边界 C^2 光滑且关于原点对称，且 $p(\theta)+p''(\theta)>0$ 时，不等式(5),(6),(7) 等价于经典的 Bonnesen 型不等式(1),(2),(3). 因此我们称积分不等式(5),(6),(7) 为积分形式的 Bonnesen 型不等式. 事实上，我们相当于为关于原点对称且具有光滑边界的闭凸区域 K 的 Bonnesen 型不等式，找到了一种纯分析的证明.

1　主要引理

下面的引理 1 由文献 [16] 给出. 特别地，当 $a=0$ 时，由文献[17] 利用傅里叶级数的方法得到.

引理 1　设 $g(x),g'(x)\in L^2[a,b]$，其中 $b>a\geqslant 0$，$g(a)=g(b)=0$，则

$$\left(\frac{b-a}{\pi}\right)\int_a^b g'^2(x)\mathrm{d}x\geqslant\int_a^b g^2(x)\mathrm{d}x \tag{8}$$

引理 2　设 $u(x)$ 是以 $T>0$ 为周期的连续函数，则对于任意的 a，都有

$$\int_a^{a+T}u(x)\mathrm{d}x=\int_0^T u(x)\mathrm{d}x \tag{9}$$

证　设 $x=t+T$，有 $\mathrm{d}x=\mathrm{d}t$，则

$$\int_T^{a+T} u(x)\mathrm{d}x=\int_0^a u(t+T)\mathrm{d}t=\int_0^a u(t)\mathrm{d}t=\int_0^a u(x)\mathrm{d}x$$

从而

$$\begin{aligned}\int_a^{a+T} u(x)\mathrm{d}x=&\int_a^0 u(x)\mathrm{d}x+\int_0^T u(x)\mathrm{d}x+\int_T^{a+T} u(x)\mathrm{d}x=\\&\int_a^0 u(x)\mathrm{d}x+\int_0^T u(x)\mathrm{d}x+\int_0^a u(x)\mathrm{d}x=\\&\int_0^T u(x)\mathrm{d}x\end{aligned}$$

2　主要结论

定理1　设 $p(\theta)$ 是以 π 为周期的 C^2 函数，则

$$\int_0^\pi p(\theta)(p(\theta)+p''(\theta))\mathrm{d}\theta-2p(\theta_0)\int_0^\pi p(\theta)\mathrm{d}\theta+\pi p^2(\theta_0)\leqslant 0\qquad \theta_0\in[0,\pi]\tag{10}$$

证　令

$$g(\theta)=p(\theta)-p(\theta_0)$$

因为 $p(\theta)$ 是以 π 为周期的函数，则

$$g(\theta_0+\pi)=p(\theta_0+\pi)-p(\theta_0)=p(\theta_0)-p(\theta_0)=g(\theta_0)=0$$

由(8)式可知

$$\int_{\theta_0}^{\theta_0+\pi} g'^2(\theta)\mathrm{d}\theta\geqslant\int_{\theta_0}^{\theta_0+\pi} g^2(\theta)\mathrm{d}\theta$$

即

$$\int_{\theta_0}^{\theta_0+\pi} p'^2(\theta)\mathrm{d}\theta\geqslant\int_{\theta_0}^{\theta_0+\pi}(p(\theta)-p(\theta_0))^2\mathrm{d}\theta$$

由 $p(\theta)$ 是以 π 为周期的函数，结合(9)式可知

$$\int_0^\pi p'^2(\theta)\mathrm{d}\theta\geqslant\int_0^\pi(p(\theta)-p(\theta_0))^2\mathrm{d}\theta=\int_0^\pi p^2(\theta)\mathrm{d}\theta-2p(\theta_0)\int_0^\pi p(\theta)\mathrm{d}\theta+\pi p^2(\theta_0)$$

因此

$$\left(\int_0^\pi p^2(\theta)\mathrm{d}\theta-\int_0^\pi p'^2(\theta)\mathrm{d}\theta\right)-2p(\theta_0)\int_0^\pi p(\theta)\mathrm{d}\theta+\pi p^2(\theta_0)\leqslant 0$$

又因为

$$\begin{aligned}\int_0^\pi p(\theta)(p(\theta)+p''(\theta))\mathrm{d}\theta=&\int_0^\pi p^2(\theta)\mathrm{d}\theta+\int_0^\pi p(\theta)p''(\theta)\mathrm{d}\theta=\\&\int_0^\pi p^2(\theta)\mathrm{d}\theta+\int_0^\pi p(\theta)\mathrm{d}p'(\theta)=\\&\int_0^\pi p^2(\theta)\mathrm{d}\theta+p(\theta)p'(\theta)\Big|_0^\pi-\int_0^\pi p'^2(\theta)\mathrm{d}\theta=\\&\int_0^\pi p^2(\theta)\mathrm{d}\theta-\int_0^\pi p'^2(\theta)\mathrm{d}\theta\end{aligned}$$

故

$$\int_0^\pi p(\theta)(p(\theta)+p''(\theta))\mathrm{d}\theta-2p(\theta_0)\int_0^\pi p(\theta)\mathrm{d}\theta+\pi p^2(\theta_0)\leqslant 0\qquad \theta_0\in[0,\pi]$$

定理2　设 $p(\theta)$ 是以 π 为周期的 C^2 函数，则

$$\left(\int_0^\pi p(\theta)\mathrm{d}\theta\right)^2-\pi\int_0^\pi p(\theta)(p(\theta)+p''(\theta))\mathrm{d}\theta\geqslant\pi^2\left(\frac{1}{\pi}\int_0^\pi p(\theta)\mathrm{d}\theta-p(\theta_0)\right)^2\qquad \theta_0\in[0,\pi]\tag{11}$$

特别地，当 $m=\min\{p:0\leqslant\theta\leqslant\pi\}$ 时，

$$\left(\int_0^\pi p(\theta)\mathrm{d}\theta\right)^2-\pi\int_0^\pi p(\theta)(p(\theta)+p''(\theta))\mathrm{d}\theta\geqslant\pi^2\left(\frac{1}{\pi}\int_0^\pi p(\theta)\mathrm{d}\theta-m\right)^2\tag{12}$$

当 $M=\max\{p:0\leqslant\theta\leqslant\pi\}$ 时，

$$\left(\int_0^\pi p(\theta)\mathrm{d}\theta\right)^2-\pi\int_0^\pi p(\theta)(p(\theta)+p''(\theta))\mathrm{d}\theta\geqslant\pi^2\left(\frac{1}{\pi}\int_0^\pi p(\theta)\mathrm{d}\theta-M\right)^2 \tag{13}$$

证　由定理 1 的(10) 式可知

$$\int_0^\pi p(\theta)(p(\theta)+p''(\theta))\mathrm{d}\theta-2p(\theta_0)\int_0^\pi p(\theta)\mathrm{d}\theta+\pi p^2(\theta_0)\leqslant 0 \qquad \theta_0\in[0,\pi]$$

$$\left(\int_0^\pi p(\theta)\mathrm{d}\theta\right)^2-\pi\int_0^\pi p(\theta)(p(\theta)+p''(\theta))\mathrm{d}\theta\geqslant$$

$$\left(\int_0^\pi p(\theta)\mathrm{d}\theta\right)^2-2\pi p(\theta_0)\int_0^\pi p(\theta)\mathrm{d}\theta+\pi^2p^2(\theta_0)=$$

$$\left(\int_0^\pi p(\theta)\mathrm{d}\theta-\pi p(\theta_0)\right)^2$$

$$\left(\int_0^\pi p(\theta)\mathrm{d}\theta\right)^2-\pi\int_0^\pi p(\theta)(p(\theta)+p''(\theta))\mathrm{d}\theta\geqslant\pi^2\left(\frac{1}{\pi}\int_0^\pi p(\theta)\mathrm{d}\theta-p(\theta_0)\right)^2 \qquad \theta_0\in[0,\pi] \tag{14}$$

由于 $m=\min\{p:0\leqslant\theta\leqslant\pi\}$，则存在 $\theta_m\in[0,\pi]$，使得 $p(\theta_m)=m$. 在(14) 式中取 $\theta_0=\theta_m$，可得

$$\left(\int_0^\pi p(\theta)\mathrm{d}\theta\right)^2-\pi\int_0^\pi p(\theta)(p(\theta)+p''(\theta))\mathrm{d}\theta\geqslant\pi^2\left(\frac{1}{\pi}\int_0^\pi p(\theta)\mathrm{d}\theta-m\right)^2$$

由于 $M=\max\{p:0\leqslant\theta\leqslant\pi\}$，则存在 $\theta_M\in[0,\pi]$，使得 $p(\theta_M)=M$. 在(14) 式中取 $\theta_0=\theta_M$，可得

$$\left(\int_0^\pi p(\theta)\mathrm{d}\theta\right)^2-\pi\int_0^\pi p(\theta)(p(\theta)+p''(\theta))\mathrm{d}\theta\geqslant\pi^2\left(\frac{1}{\pi}\int_0^\pi p(\theta)\mathrm{d}\theta-M\right)^2$$

推论 1　设 $p(\theta)$ 是以 π 为周期的 C^2 函数，若

$$m=\min\{p:0\leqslant\theta\leqslant\pi\}$$
$$M=\max\{p:0\leqslant\theta\leqslant\pi\}$$

则

$$\left(\int_0^\pi p(\theta)\mathrm{d}\theta\right)^2-\pi\int_0^\pi p(\theta)(p(\theta)+p''(\theta))\mathrm{d}\theta\geqslant\frac{\pi^2}{4}(M-m)^2$$

$$\left(\int_0^\pi p(\theta)\mathrm{d}\theta\right)^2-\pi\int_0^\pi p(\theta)(p(\theta)+p''(\theta))\mathrm{d}\theta\geqslant\frac{\pi^2}{4}\left(\int_0^\pi p(\theta)\mathrm{d}\theta-M-m\right)^2$$

证　由平均值不等式

$$a^2+b^2\geqslant\frac{(a\pm b)^2}{2}$$

可知

$$\left(\frac{1}{\pi}\int_0^\pi p(\theta)\mathrm{d}\theta-M\right)^2+\left(\frac{1}{\pi}\int_0^\pi p(\theta)\mathrm{d}\theta-m\right)^2\geqslant\frac{1}{2}(M-m)^2$$

$$\left(\frac{1}{\pi}\int_0^\pi p(\theta)\mathrm{d}\theta-M\right)^2+\left(\frac{1}{\pi}\int_0^\pi p(\theta)\mathrm{d}\theta-m\right)^2\geqslant\frac{1}{2}\left(\frac{2}{\pi}\int_0^\pi p(\theta)\mathrm{d}\theta-M-m\right)^2$$

根据不等式(12),(13) 可得

$$\left(\int_0^\pi p(\theta)\mathrm{d}\theta\right)^2-\pi\int_0^\pi p(\theta)(p(\theta)+p''(\theta))\mathrm{d}\theta\geqslant\frac{\pi^2}{4}(M-m)^2$$

$$\left(\int_0^\pi p(\theta)\mathrm{d}\theta\right)^2-\pi\int_0^\pi p(\theta)(p(\theta)+p''(\theta))\mathrm{d}\theta\geqslant\frac{\pi^2}{4}\left(\int_0^\pi p(\theta)\mathrm{d}\theta-M-m\right)^2$$

推论 2　设 $p(\theta)$ 是以 π 为周期的 C^2 函数，则

$$\left(\int_0^\pi p(\theta)\mathrm{d}\theta\right)^2-\pi\int_0^\pi p(\theta)(p(\theta)+p''(\theta))\mathrm{d}\theta\geqslant 0 \tag{15}$$

注 2　当 $\int_0^\pi p(\theta)\mathrm{d}\theta=0$ 时，(15) 式等价于一维的 Poincare 不等式.

参考文献:

[1] BLASCHKE W. Kreis und Kugel [M]. Leipzig: Verlag von Veit, 1916.

[2] OSSERMAN R. Bonnesen-Style Isoperimetric Inequalities [J]. The American Mathematical Monthly, 1979, 86(1): 1-29.

[3] 周家足. 平面 Bonnesen 型不等式 [J]. 数学学报, 2007, 50(6): 1397-1402.

[4] 曾春娜, 周家足, 岳双珊. 两平面凸域的对称混合等周不等式 [J]. 数学学报, 2012, 55(2): 355-362.

[5] 王鹏富, 徐文学, 周家足, 等. 平面两凸域的 Bonnesen 型对称混合不等式 [J]. 中国科学: 数学, 2015, 45(3): 245-254.

[6] ZENG C N, MA L, ZHOU J Z, et al. The Bonnesen Isoperimetric Inequality in a Surface of Constant Curvature [J]. Science China-Mathematics, 2012, 55(9): 1913-1919.

[7] XU W X, ZHOU J Z, ZHU B C. On Bonnesen-Type Inequalities for a Surface of Constant Curvature [J]. Proceedings of the American Mathematical Society, 2015, 143(11): 4925-4935.

[8] 马 磊, 马 芳, 周家足. 平面上非简单闭曲线的 Bonnesen 型不等式 [J]. 西南师范大学学报(自然科学版), 2011, 36(3): 45-47.

[9] ZHANG X M. A Refinement of the Discrete Wirtinger Inequality [J]. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 1996, 200(3): 687-697.

[10] ZHANG X M. Bonnesen-Style Inequalities and Pseudo-Perimeters for Polygons [J]. Journal of Geometry, 1997, 60(1/2): 188-201.

[11] QI J B, WANG W. Schur Convex Functions and the Bonnesen Style Isoperimetric Inequalities for Planar Convex Polygons [J]. Journal of Mathematical Inequalities, 2018, 12(1): 23-29.

[12] SANTALÓ L A. Integral Geometry and Geometric Probability [M]. London: Addison-Wesley, 1976.

[13] 任德麟. 积分几何学引论 [M]. 上海: 上海科学技术出版社, 1988.

[14] 张增乐. 关于单位速度外法向流下的几何不变量的注记 [J]. 西南师范大学学报(自然科学版), 2021, 46(6): 47-51.

[15] 方建波. 平面凸曲线的一类熵不变流 [J]. 西南大学学报(自然科学版), 2021, 43(10): 117-123.

[16] SCHEEFFER L. Ueber die Bedeutung der Begriffe "Maximum und Minimum" in der Variationsrechnung [J]. Mathematische Annalen, 1886, 26(2): 197-208.

[17] GREEN M, OSHER S. Steiner Polynomials, Wulff Flows, and Some New Isoperimetric Inequalities for Convex Plane Curves [J]. Asian Journal of Mathematics, 1999, 3(3): 659-676.

责任编辑 廖坤