DOI:10.13718/j.cnki.xsxb.2022.02.008

广义 L_p 宽度积分的混合 Brunn-Minkowski 型不等式①

杨林[1]， 谭杨[1]， 罗淼[2]

1. 铜仁职业技术学院 信息工程学院，贵州 铜仁 554300；2. 贵州师范大学 数学科学学院，贵阳 550025

摘要：研究了凸几何分析中的广义 L_p 宽度积分，利用 Hölder 不等式与 Minkowski 不等式把欧氏空间中宽度积分的 Brunn-Minkowski 型不等式推广为关于 L_p 宽度积分的混合型 Brunn-Minkowski 型不等式. 同时给出了逆向的关于 L_p 宽度积分的混合型 Brunn-Minkowski 型不等式，并研究了等号成立的条件.

关 键 词：广义 L_p 宽度积分；Hölder 不等式；Minkowski 不等式；Brunn-Minkowski 不等式

中图分类号：O186.5　　**文献标志码**：A　　**文章编号**：1000-5471(2022)02-0037-06

Mixed Brunn-Minkowski Type Inequalities of General L_p Width-Integral

YANG Lin[1]， TAN Yang[1]， LUO Miao[2]

1. *Department of Information Technology, Tongren Polytechnic College, Tongren, Guizhou 554300, China;*
2. *School of Mathematics Science, Guizhou Normal University, Guiyang 550025, China*

Abstract: In this paper, the general L_p width integral in convex geometric analysis has been studied. By using the Hölder inequality and Minkowski inequality, the Brunn-Minkowski type inequality in Euclidean space has been generalized to the mixed Brunn-Minkowski type inequality of the L_p width integral. An inverse mixed Brunn-Minkowski type inequality of the L_p width integral and its equal condition have been given.

Key words: general L_p width-integral; Hölder inequality; Minkowski inequality; Brunn-Minkowski inequality

若 K 为 $\mathbb{R}^n(n>1)$ 中的完备紧凸集，则称 K 为凸体. 支持函数是研究凸体的重要概念，其表达式为

$$h(K,u)=\max\{x\cdot u: x\in K\} \qquad u\in S^{n-1}$$

B,S^{n-1} 分别表示 $\mathbb{R}^n$ 中的单位球和单位球面. 记

$$\mathscr{K}^n=\{K: K \text{ 为凸体}\} \qquad \mathscr{K}_o^n=\{K: K \text{ 是原点为其内点的凸体}\}$$

① 收稿日期：2021-03-27
基金项目：2019 年度贵州省基础研究计划(黔科合基础[2019]1228 号)；铜仁市科研项目([2020]116 号).
作者简介：杨林，硕士，讲师，主要从事积分几何与凸几何分析的研究.
通信作者：罗淼，副教授.

Minkowski 线性组合为凸体之间的重要运算，其定义为：设 $K, L \in \mathscr{K}^n$，λ, μ 为非负实数且不同时为 0，K 与 L 的 Minkowski 线性组合 $\lambda \cdot K + \mu \cdot L \in \mathscr{K}^n$ 用支持函数可表示为

$$h(\lambda \cdot K + \mu \cdot L, u) = \lambda h(K, u) + \mu h(L, u)$$

Brunn-Minkowski 理论中有诸多有意义的结果，详情请参阅文献[1-11].

文献[1] 研究的关于凸体 $K_1, K_2, \cdots, K_n$ 的混合宽度积分 $B(K_1, \cdots, K_n)$ 表示为

$$B(K_1, \cdots, K_n) = \frac{1}{n}\int_{S^{n-1}} b(K_1, u) \cdots b(K_n, u) \mathrm{d}S(u)$$

其中

$$b_K(u) = \frac{h(K, u) + h(K, -u)}{2}$$

当 $K_1 = \cdots = K_{n-i} = K$，$K_{n-i+1} = \cdots = K_n = L$ 时，$B(K_1, \cdots, K_n) = B_i(K, L)$. 若存在正实数 λ，使得 $b(K, u) = \lambda b(L, u)$，则称 K 与 L 具有相似宽度.

设 $K_1, \cdots, K_n \in \mathscr{K}^n$，$\tau \in (-1, 1)$，文献[2] 将文献[1] 所定义的混合宽度积分推广为如下更一般的混合宽度积分 $B^{(\tau)}(K_1, \cdots, K_n)$，表达式为

$$B^{(\tau)}(K_1, \cdots, K_n) = \frac{1}{n}\int_{S^{n-1}} b^{(\tau)}(K_1, u) \cdots b^{(\tau)}(K_n, u) \mathrm{d}S(u)$$

其中

$$b^{(\tau)}(K, u) = f_1(\tau) h(K, u) + f_2(\tau) h(K, -u)$$

$$f_1(\tau) = \frac{(1+\tau)^2}{2(1+\tau^2)} \qquad f_2(\tau) = \frac{(1-\tau)^2}{2(1+\tau^2)}$$

当 $\tau = 0$ 时，$B^{(\tau)}(K_1, \cdots, K_n)$ 即为文献[1] 所研究的混合宽度积分. 当 $K_1 = \cdots = K_{n-i} = K$，$K_{n-i+1} = \cdots = K_n = L$ 时，$B^{(\tau)}(K_1, \cdots, K_n) = B_i^{(\tau)}(K, L)$. 当 $B_i^{(\tau)}(K, L)$ 中 L 为 B 时，$B^{(\tau)}(K_1, \cdots, K_n)$ 为 K 的 i 阶宽度积分 $B_i^{(\tau)}(K)$[3]. 若存在正实数 λ，使得 $b^{(\tau)}(K, u) = \lambda b^{(\tau)}(L, u)$，则称 K 与 L 具有相似广义宽度. 若 $b^{(\tau)}(K, u)$ 与 $b^{(\tau)}(L, u)$ 都为常数，则称 K 与 L 具有相似广义常宽度.

设 $p \geqslant 1$，$K, L \in \mathscr{K}_o^n$ 的 L_p Minkowski 加法 $K +_p L$ 的支持函数[4] 为

$$h(K +_p L, u) = (h(K, u)^p + h(L, u)^p)^{\frac{1}{p}}$$

设 $K_1, \cdots, K_n \in \mathscr{K}_o^n$，$\tau \in [-1, 1]$，$p > 0$，文献[5] 定义并研究了 L_p 混合宽度积分 $B_p^{(\tau)}(K_1, \cdots, K_n)$，其积分表达式为

$$B_p^{(\tau)}(K_1, \cdots, K_n) = \frac{1}{n}\int_{S^{n-1}} b_p^{(\tau)}(K_1, u) \cdots b_p{}^{(\tau)}(K_n, u) \mathrm{d}S(u)$$

其中

$$b_p^{(\tau)}(K, u) = (f_1(\tau) h(K, u)^p + f_2(\tau) h(K, -u)^p)^{\frac{1}{p}}$$

$$f_1(\tau) = \frac{(1+\tau)^{2p}}{(1+\tau)^{2p} + (1-\tau)^{2p}} \qquad f_2(\tau) = \frac{(1-\tau)^{2p}}{(1+\tau)^{2p} + (1-\tau)^{2p}}$$

当 $\tau = 0$ 时，$B_p^{(\tau)}(K_1, \cdots, K_n)$ 即为文献[2] 所研究的混合宽度积分. 当 $K_1 = \cdots = K_{n-i} = K$，$K_{n-i+1} = \cdots = K_n = L$ 时，$B_p^{(\tau)}(K_1, \cdots, K_n) = B_{p,i}^{(\tau)}(K, L)$. 当 $K_1 = \cdots = K_{n-i} = K_{n-i+1} = \cdots = K_n = K$ 时，$B_p^{(\tau)}(K_1, \cdots, K_n)$ 记为 $B_p^{(\tau)}(K)$. 当 $B_i^{(\tau)}(K, L)$ 中 L 为 B 时，$B_p^{(\tau)}(K_1, \cdots, K_n)$ 为 K 的 i 阶 L_p 宽度积分 $B_{p,i}^{(\tau)}(K)$. 若存在正实数 λ，使得 $b_p^{(\tau)}(K, u) = \lambda b_p^{(\tau)}(L, u)$，则称 K 与 L 具有相似广义 L_p 宽度. 若 $b_p^{(\tau)}(K, u)$ 与 $b_p^{(\tau)}(L, u)$ 都为常数，则称 K 与 L 具有相似广义 L_p 常宽度.

若 $K, L \in \mathscr{K}_o^n$，$\tau \in (-1, 1)$，$p \geqslant 1$，$i < j < k$，则[5]

$$B_{p,j}^{(\tau)}(K, L)^{k-i} \leqslant B_{p,i}^{(\tau)}(K, L)^{k-j} B_{p,k}^{(\tau)}(K, L)^{j-i} \tag{1}$$

等号成立当且仅当 K 与 L 具有相似广义 L_p 宽度；

若 $K, L \in \mathscr{K}_o^n$，$\tau \in (-1, 1)$，$p \geqslant 1$，$i < n - p$，则[5]

$$B_{p,i}^{(\tau)}(K+_pL)^{\frac{p}{n-i}}\leqslant B_{p,i}^{(\tau)}(K)^{\frac{p}{n-i}}+B_{p,i}^{(\tau)}(L)^{\frac{p}{n-i}} \tag{2}$$

等号成立当且仅当 K 与 L 具有相似广义 L_p 宽度.

将 K 的最小广义 L_p 宽度 $r_p^{(\tau)}(K)$ 与最大宽度 $R_p^{(\tau)}(K)$ 分别记为

$$r_p^{(\tau)}(K)=\min\{b_p^{(\tau)}(K,u):u\in S^{n-1}\}$$

$$R_p^{(\tau)}(K)=\max\{b_p^{(\tau)}(K,u):u\in S^{n-1}\}$$

当 $p=1$ 时，$r_p^{(\tau)}(K)$ 与 $R_p^{(\tau)}(K)$ 分别记为 $r^{(\tau)}(K)$ 与 $R^{(\tau)}(K)$.

本文受文献[6-7]的启发，建立了如下不等式：

定理 1　设 $K,L,Q\in\mathcal{K}_o^n$，$\tau\in(-1,1)$，$p\geqslant 1$. 若 $i<n-p$，则

$$B_{p,i}^{(\tau)}(K+_pL,Q)^{\frac{p}{n-i}}\leqslant B_{p,i}^{(\tau)}(K,Q)^{\frac{p}{n-i}}+B_{p,i}^{(\tau)}(L,Q)^{\frac{p}{n-i}} \tag{3}$$

等号成立当且仅当 K 与 L 具有相似广义 L_p 宽度.

定理 2　设 $K,L,Q\in\mathcal{K}_o^n$，$\tau\in(-1,1)$，$p\geqslant 1$. 若 $i<n-p$，则

$$B_{p,i}^{(\tau)}(K,Q)^{\frac{p}{n-i}}+B_{p,i}^{(\tau)}(L,Q)^{\frac{p}{n-i}}\leqslant cB_{p,i}^{(\tau)}(K+_pL,Q)^{\frac{p}{n-i}} \tag{4}$$

其中

$$c=\frac{R_p^{(\tau)}(K)^p(r_p^{(\tau)}(K)^p+2R_p^{(\tau)}(L)^p)+r_p^{(\tau)}(L)^pR_p^{(\tau)}(L)^p}{(r_p^{(\tau)}(K)^p+R_p^{(\tau)}(L)^p)(R_p^{(\tau)}(K)^p+r_p^{(\tau)}(L)^p)}$$

等号成立当且仅当 K 与 L 具有相似广义 L_p 常宽度.

引理 1　若 $K,L\in\mathcal{K}_o^n$，$\tau\in[-1,1]$，$p\geqslant 1$，则

$$b_p^{(\tau)}(K+_pL,u)^p=b_p^{(\tau)}(K,u)^p+b_p^{(\tau)}(L,u)^p$$

证　由 L_p Minkowski 加法知

$$\begin{aligned}b_p^{(\tau)}(K+_pL,u)^p&=f_1(\tau)h(K+_pL,u)^p+f_2(\tau)h(K+_pL,-u)^p=\\&f_1(\tau)(h(K,u)^p+h(L,u)^p)+f_2(\tau)(h(K,-u)^p+h(L,-u)^p)=\\&b_p^{(\tau)}(K,u)^p+b_p^{(\tau)}(L,u)^p\end{aligned}$$

引理 2[12]（Minkowski不等式）　设 $f(x)$ 与 $g(x)$ 为可测集 X 上的非负可测函数. 若 $f(x),g(x)\in L(p)$，$p>1$，则

$$\left(\int_X(f(x)+g(x))^p\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}}\leqslant\left(\int_Xf(x)^p\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}}+\left(\int_Xg(x)^p\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}}$$

等号成立当且仅当$\dfrac{f(x)}{g(x)}$为常数.

引理 3[6]　（逆 Minkowski 不等式）　设函数 $f(x)$ 与 $g(x)$ 为可测集 X 上的非负可测函数，且存在正数 m,M，满足 $m\leqslant\dfrac{f(x)}{g(x)}\leqslant M$. 若 $f(x),g(x)\in L(p)$，$p>1$，则

$$\left(\int_Xf(x)^p\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}}+\left(\int_Xg(x)^p\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}}\leqslant\frac{Mm+2M+1}{(M+1)(m+1)}\left(\int_X(f(x)+g(x))^p\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}}$$

等号成立当且仅当$\dfrac{f(x)}{g(x)}$为常数.

引理 4[8]（逆 Hölder 不等式）　设函数 $f(x)$ 与 $g(x)$ 为可测集 X 上的非负可测函数，且存在正数 m,M，满足 $m\leqslant\dfrac{f(x)}{g(x)}\leqslant M$. 若 $p>1$，$q>1$，$\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}=1$，则

$$\left(\int_Xf(x)\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_Xg(x)\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{q}}\leqslant\left(\frac{M}{m}\right)^{\frac{1}{pq}}\int_Xf(x)^{\frac{1}{p}}g(x)^{\frac{1}{q}}\mathrm{d}x \tag{5}$$

等号成立当且仅当$\dfrac{f(x)}{g(x)}$为常数.

证　由$\dfrac{f(x)}{g(x)}\leqslant M$ 知 $f(x)\leqslant Mg(x)$，进而有 $f(x)\leqslant M^{\frac{1}{q}}f(x)^{\frac{1}{p}}g(x)^{\frac{1}{q}}$，由此得

$$\left(\int_X f(x)\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}} \leqslant M^{\frac{1}{pq}}\left(\int_X f(x)^{\frac{1}{p}} g(x)^{\frac{1}{q}}\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}}$$

等号成立当且仅当 $f(x)=Mg(x)$.

同理，由 $m \leqslant \dfrac{f(x)}{g(x)}$ 可得 $g(x) \leqslant m^{\frac{-1}{p}} f(x)^{\frac{1}{p}} g(x)^{\frac{1}{q}}$，即有

$$\left(\int_X g(x)\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{q}} \leqslant m^{\frac{-1}{pq}}\left(\int_X f(x)^{\frac{1}{p}} g(x)^{\frac{1}{q}}\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{q}}$$

等号成立当且仅当 $f(x)=mg(x)$.

将以上两不等式对应相乘即得不等式(5)，等号成立当且仅当 $M=m$，即 $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ 为常数. 证毕.

定理 1 的证明 由引理 1 与 $B_{p,i}^{(\tau)}(K, L)$ 的定义可得

$$\begin{aligned} B_{p,i}^{(\tau)}(K+_p L, Q) &= \frac{1}{n}\int_{S^{n-1}} b_p^{(\tau)}(K+_p L, u)^{n-i} b_p^{(\tau)}(Q, u)^i \mathrm{d}S(u) = \\ &\frac{1}{n}\int_{S^{n-1}} \left(b_p^{(\tau)}(K, u)^p + b_p^{(\tau)}(L, u)^p\right)^{\frac{n-i}{p}} b^{(\tau)}(Q, u)^i \mathrm{d}S(u) \end{aligned}$$

根据 $i < n-p$，并结合引理 2 可得

$$\begin{aligned} B_{p,i}^{(\tau)}(K+_p L, Q)^{\frac{p}{n-i}} &\leqslant \left(\frac{1}{n}\int_{S^{n-1}} b_p^{(\tau)}(K, u)^{n-i} b^{(\tau)}(Q, u)^i \mathrm{d}S(u)\right)^{\frac{p}{n-i}} + \\ &\left(\frac{1}{n}\int_{S^{n-1}} b_p^{(\tau)}(L, u)^{n-i} b_p^{(\tau)}(Q, u)^i \mathrm{d}S(u)\right)^{\frac{p}{n-i}} = \\ &B_{p,i}^{(\tau)}(K, Q)^{\frac{p}{n-i}} + B_{p,i}^{(\tau)}(L, Q)^{\frac{p}{n-i}} \end{aligned}$$

由引理 2 知不等式(3) 等号成立当且仅当 $\dfrac{b_p^{(\tau)}(K, u)}{b_p^{(\tau)}(L, u)}$ 为常数，即 K 与 L 具有相似广义 L_p 宽度. 证毕.

在定理 1 中取 $p=1$ 时，有：

推论 1 设 $K, L, Q \in \mathscr{K}_o^n$，$\tau \in (-1, 1)$. 若 $i < n-1$，则

$$B_i^{(\tau)}(K+L, Q)^{\frac{1}{n-i}} \leqslant B_i^{(\tau)}(K, Q)^{\frac{1}{n-i}} + B_i^{(\tau)}(L, Q)^{\frac{1}{n-i}}$$

等号成立当且仅当 K 与 L 具有相似广义宽度.

在定理 1 中取 $Q=B$ 时即为不等式(2)，在推论 1 中取 $Q=B$ 时为文献[9] 之结论.

定理 2 的证明 令 $b_p^{(\tau)}(K, u)^p b_p^{(\tau)}(Q, u)^{\frac{ip}{n-i}} = f(u)$，$b_p^{(\tau)}(L, u)^p b_p^{(\tau)}(Q, u)^{\frac{ip}{n-i}} = g(u)$，则有

$$\frac{f(u)}{g(u)} = \frac{b_p^{(\tau)}(K, u)^p b_p^{(\tau)}(Q, u)^{\frac{ip}{n-i}}}{b_p^{(\tau)}(L, u)^p b_p^{(\tau)}(Q, u)^{\frac{ip}{n-i}}} = \frac{b_p^{(\tau)}(K, u)^p}{b_p^{(\tau)}(L, u)^p}$$

由

$$r_p^{(\tau)}(K) \leqslant b_p^{(\tau)}(K, u) \leqslant R_p^{(\tau)}(K) \qquad r_p^{(\tau)}(L) \leqslant b_p^{(\tau)}(L, u) \leqslant R_p^{(\tau)}(L)$$

可得

$$\frac{r_p^{(\tau)}(K)}{R_p^{(\tau)}(L)} \leqslant \frac{b_p^{(\tau)}(K, u)}{b_p^{(\tau)}(L, u)} \leqslant \frac{R_p^{(\tau)}(K)}{r_p^{(\tau)}(L)} \tag{6}$$

从而有

$$\left(\frac{r_p^{(\tau)}(K)}{R_p^{(\tau)}(L)}\right)^p \leqslant \frac{f(u)}{g(u)} \leqslant \left(\frac{R_p^{(\tau)}(K)}{r_p^{(\tau)}(L)}\right)^p$$

由 $i < n-p$ 及引理 3 可得

$$B_{p,i}^{(\tau)}(K+_p L, Q)^{\frac{p}{n-i}} = \left(\frac{1}{n}\int_{S^{n-1}} \left(b_p^{(\tau)}(K, u)^p + b_p^{(\tau)}(L, u)^p\right)^{\frac{n-i}{p}} b^{(\tau)}(Q, u)^i \mathrm{d}S(u)\right)^{\frac{p}{n-i}} \geqslant$$

$$\frac{1}{c}\left(\left(\frac{1}{n}\int_{S^{n-1}} f(u)^{\frac{n-i}{p}}\mathrm{d}S(u)\right)^{\frac{p}{n-i}}+\left(\frac{1}{n}\int_{S^{n-1}} g(u)^{\frac{n-i}{p}}\mathrm{d}S(u)\right)^{\frac{p}{n-i}}\right)=$$
$$\frac{1}{c}\left(B_{p,i}^{(\tau)}(K,Q)^{\frac{p}{n-i}}+B_{p,i}^{(\tau)}(L,Q)^{\frac{p}{n-i}}\right)$$

由引理 3 等号成立的条件知此不等式等号成立当且仅当$\dfrac{b_p^{(\tau)}(K,u)^p}{b_p^{(\tau)}(L,u)^p}$为常数，即$\dfrac{b_p^{(\tau)}(K,u)}{b_p^{(\tau)}(L,u)}$为常数. 则

$$\frac{b_p^{(\tau)}(K,u)^p}{b_p^{(\tau)}(L,u)^p}=\frac{r_p^{(\tau)}(K)}{R_p^{(\tau)}(L)}=\frac{R_p^{(\tau)}(K)}{r_p^{(\tau)}(L)}$$

又因 $r_p^{(\tau)}(K)\leqslant R_p^{(\tau)}(K)$，$r_p^{(\tau)}(L)\leqslant R_p^{(\tau)}(L)$，从而 $r_p^{(\tau)}(K)=R_p^{(\tau)}(K)$，$r_p^{(\tau)}(L)=R_p^{(\tau)}(L)$，即不等式(4)等号成立当且仅当 K 与 L 具有相似广义 L_p 常宽度. 证毕.

在定理 2 中取 $Q=B$ 时，得：

推论 2　设 $K,L\in\mathscr{K}_o^n$，$\tau\in(-1,1)$，$p\geqslant 1$. 若 $i<n-p$，则

$$B_{p,i}^{(\tau)}(K)^{\frac{p}{n-i}}+B_{p,i}^{(\tau)}(L)^{\frac{p}{n-i}}\leqslant cB_{p,i}^{(\tau)}(K+_pL)^{\frac{p}{n-i}}$$

其中 c 同定理 2 中所定义，等号成立当且仅当 K 与 L 具有相似广义 L_p 常宽度.

在推论 2 中取 $p=1$ 时，得：

推论 3　设 $K,L\in\mathscr{K}_o^n$，$\tau\in(-1,1)$. 若 $i<n-1$，则

$$B_i^{(\tau)}(K)^{\frac{1}{n-i}}+B_i^{(\tau)}(L)^{\frac{1}{n-i}}\leqslant\frac{R^{(\tau)}(K)(r^{(\tau)}(K)+2R^{(\tau)}(L))+r^{(\tau)}(L)R^{(\tau)}(L)}{(r^{(\tau)}(K)+R^{(\tau)}(L))(R^{(\tau)}(K)+r^{(\tau)}(L))}B_i^{(\tau)}(K+L)^{\frac{1}{n-i}}$$

等号成立当且仅当 K 与 L 具有相似广义常宽度.

现应用引理 4 给出不等式(1) 的逆，即：

定理 3[5]　若 $K,L\in\mathscr{K}_o^n$，$\tau\in(-1,1)$，$p\geqslant 1$，$i<j<k$，则

$$B_{p,i}^{(\tau)}(K,L)^{\frac{k-j}{k-i}}B_{p,k}^{(\tau)}(K,L)^{\frac{j-i}{k-i}}\leqslant\left(\frac{R_p^{(\tau)}(K)R_p^{(\tau)}(L)}{r_p^{(\tau)}(K)r_p^{(\tau)}(L)}\right)^{\frac{(k-j)(j-i)}{k-i}}B_{p,j}^{(\tau)}(K,L)\tag{7}$$

等号成立当且仅当 K 与 L 具有相似广义 L_p 常宽度.

证　由

$$b_p^{(\tau)}(K,u)^{n-j}b_p^{(\tau)}(L,u)^j=(b_p^{(\tau)}(K,u)^{n-i}b_p^{(\tau)}(L,u)^i)^{\frac{k-j}{k-i}}(b_p^{(\tau)}(K,u)^{n-k}b_p^{(\tau)}(L,u)^k)^{\frac{j-i}{k-i}}$$

令

$$f(u)=b_p^{(\tau)}(K,u)^{n-i}b_p^{(\tau)}(L,u)^i\qquad g(u)=b_p^{(\tau)}(K,u)^{n-k}b_p^{(\tau)}(L,u)^k$$

可得

$$\frac{f(u)}{g(u)}=\frac{b_p^{(\tau)}(K,u)^{n-i}b_p^{(\tau)}(L,u)^i}{b_p^{(\tau)}(K,u)^{n-k}b_p^{(\tau)}(L,u)^k}=\left(\frac{b_p^{(\tau)}(K,u)}{b_p^{(\tau)}(L,u)}\right)^{k-i}\tag{8}$$

根据公式(8) 与不等式(6)，可得

$$\left(\frac{r_p^{(\tau)}(K)}{R_p^{(\tau)}(L)}\right)^{k-i}\leqslant\frac{f(u)}{g(u)}\leqslant\left(\frac{R_p^{(\tau)}(K)}{r_p^{(\tau)}(L)}\right)^{k-i}$$

由 $i<j<k$ 及引理 4，可得

$$B_{p,i}^{(\tau)}(K,L)^{\frac{k-j}{k-i}}B_{p,k}^{(\tau)}(K,L)^{\frac{j-i}{k-i}}=\left(\frac{1}{n}\int_{S^{n-1}} f(u)\mathrm{d}S(u)\right)^{\frac{k-j}{k-i}}\left(\frac{1}{n}\int_{S^{n-1}} g(u)\mathrm{d}S(u)\right)^{\frac{j-i}{k-i}}\leqslant$$
$$\frac{1}{n}\left(\frac{R_p^{(\tau)}(K)R_p^{(\tau)}(L)}{r_p^{(\tau)}(K)r_p^{(\tau)}(L)}\right)^{\frac{(k-j)(j-i)}{k-i}}\int_{S^{n-1}} f(u)^{\frac{k-j}{k-i}}g(u)^{\frac{j-i}{k-i}}\mathrm{d}S(u)=$$
$$\left(\frac{R_p^{(\tau)}(K)R_p^{(\tau)}(L)}{r_p^{(\tau)}(K)r_p^{(\tau)}(L)}\right)^{\frac{(k-j)(j-i)}{k-i}}B_{p,j}^{(\tau)}(K,L)$$

由引理 4 等号成立的条件知不等式(7) 中等号成立当且仅当$\dfrac{f(u)}{g(u)}$为常数，再结合公式(8) 及 $r_p^{(\tau)}(K)$，

$R_p^{(\tau)}(K)$,$r_p^{(\tau)}(L)$,$R_p^{(\tau)}(L)$之间的关系，可得不等式(7)等号成立当且仅当K与L具有相似广义L_p常宽度. 证毕.

在定理 3 中取 $i=0$，$j=i$，$k=n$ 时，有：

推论 4 若 $K,L\in \mathscr{K}_o^n$，$\tau\in(-1,1)$，$p\geqslant 1$，$i<n$，则

$$B_p^{(\tau)}(K)^{\frac{n-i}{n}}B_p^{(\tau)}(L)^{\frac{i}{n}}\leqslant\left(\frac{R_p^{(\tau)}(K)R_p^{(\tau)}(L)}{r_p^{(\tau)}(K)r_p^{(\tau)}(L)}\right)^{\frac{i(n-i)}{n}}B_{p,i}^{(\tau)}(K,L)$$

等号成立当且仅当 K 与 L 具有相似广义 L_p 常宽度.

参考文献：

[1] LUTWAK E. Mixed Width-Integrals of Convex Bodies [J]. Israel Journal of Mathematics，1977，28(3)：249-253.

[2] FENG Y B. General Mixed Width-Integral of Convex Bodies [J]. Journal of Nonlinear Sciences and Applications，2016，9(6)：4226-4234.

[3] LUTWAK E. Width-Integrals of Convex Bodies [J]. Proceedings of the American Mathematical Society，1975，53(2)：435-439.

[4] SCHNEIDER R. Convex Bodies：The Brunn-Minkowski Theory(Second Expanded Edition) [M]. Cambridge：Cambridge Universtiy Press，2014.

[5] ZHOU Y P. General L_p-Mixed Width-Integral of Convex Bodies and Related Inequalities [J]. The Journal of Nonlinear Sciences and Applications，2017，10(8)：4372-4380.

[6] 赵长健. 对偶 Brunn-Minkowski 不等式的逆 [J]. 数学年刊 A 辑(中文版)，2014，35(6)：697-704.

[7] 杨林，罗淼，侯林波. 逆的对偶 Brunn-Minkowski 不等式 [J]. 西南大学学报(自然科学版)，2016，38(4)：85-89.

[8] SAITON S，TUAN V K，YAMAMOTO M. Reverse Convolution Inequalities and Applications to Inverse Heat Source Problems [J]. Journal of Inequalities in Pure and Applied Mathematics，2002，3(5)：1-24.

[9] ZHANG X F，WU S H. New Brunn-Minkowski Type Inequalities for General Width-Integral of Indexi [J]. Wuhan University Journal of Natural Sciences，2019，24(6)：474-478.

[10] 方建波. 平面凸曲线的一类熵不变流 [J]. 西南大学学报(自然科学版)，2021，43(10)：117-123.

[11] 杨林，罗淼，何邦财，等. Orlicz-Aleksandrov 体的混合体积 [J]. 西南师范大学学报(自然科学版)，2020，45(8)：25-28.

[12] HARDY G，LITTLEWOOD J E，POLYA G. Inequalities [M]. 2th ed. Cambridge：Cambridge University Press，1952.

责任编辑 廖坤