DOI:10.13718/j.cnki.xsxb.2022.03.002

脉冲耦合复值神经网络的全局渐近同步①

冯靓， 胡成， 于娟

新疆大学 数学与系统科学学院，乌鲁木齐 830046

摘要：本文研究多个复值神经网络在脉冲耦合机制下形成复杂网络系统的全局渐近同步问题. 首先，基于序列连通和Dirac函数，引入网络节点仅在离散时刻进行信息交互的脉冲耦合策略. 其次，通过直接误差方法及迭代思想建立脉冲耦合复值神经网络渐近同步的判别条件. 最后，给出相关数值实例及仿真来验证理论结果的正确性和有效性.

关 键 词：复值神经网络；脉冲耦合；渐近同步；序列连通性；直接误差方法

中图分类号：TP391 **文献标志码：A** **文章编号：**1000-5471(2022)03-0009-07

On Global Asymptotic Synchronization of Impulsively Coupled Neural Networks with Complex Values

FENG Liang， HU Cheng， YU Juan

School of Mathematics and System Science, Xinjiang University, Urumqi 830046, China

Abstract: In this paper, the global asymptotic synchronization has been studied for a class of complex networks formed by complex-valued neural networks based on impulsive coupling. Firstly, by virtue of the idea of sequential connectivity, an impulsive coupling strategy is introduced, in which the network nodes exchange information only at some discrete times. Secondly, in the direct error method and with the iterative idea, the sufficient conditions of asymptotical synchronization are established for the coupled complex-valued neural networks under this switching coupling strategy. Finally, a numerical example with simulation is provided to verify the correctness and validity of the theoretical results.

Key words: complex-valued neural network; impulsive coupling; asymptotic synchronization; sequence connectivity; direct error method

鉴于神经网络良好的自适应学习能力、智能性及联想存储能力，近年来在组合优化、图像处理和安全通信[1-2]等多个方面得到了广泛应用. 随着研究的不断深入，学者们发现实值神经元的存储能力是有限的，很难完成对高维信息的存储和处理，如对称性检测问题和XoR问题[3]. 基于此，有研究人员将实值连接权重及实值激活函数推广至复数域，建立了复值神经网络[4-6]. 2009年，Amin等[7]通过实验进一步证明了单

① 收稿日期：2021-12-22
基金项目：新疆自然科学基金项目(2021D01D10)；国家自然科学基金项目(61963033).
作者简介：冯靓，博士研究生，主要从事复杂切换系统的动力学与控制研究.
通信作者：胡成，教授.

层复值神经网络能够表现出与多层实值网络相当或者更高的性能. 目前，复值神经网络在图像传输、设计信号过滤器、交通信号控制等方面发挥着重要的作用[8-10]. 另外，为刻画生物神经元或组织之间的交互作用，由多个神经网络交互而成的耦合神经网络被提出，并被广泛应用于目标识别、噪声抑制、压缩编码、边缘检测等实际问题中.

耦合神经网络不仅具备人工神经网络的性能，往往还会演化出比单一神经网络更为复杂的动态行为[11]. 作为一种典型的动力学演化行为，耦合神经网络的同步近年来得到了广泛关注[11-12]. Liu 等[13]针对一类具有固定连通拓扑的耦合神经网络，利用线性矩阵不等式的方法导出了耦合网络实现指数同步的判定准则. 自此，结合饱和控制、事件触发牵制控制等控制方法，具有固定连通拓扑的耦合神经网络同步问题被大量研究，得到了许多有意义的同步研究成果[14].

值得注意的是，在网络节点通讯过程中通信带宽限制、信道突发故障等因素经常导致网络之间的连接出现中断或切换到另一频率信道的现象，表明节点之间并不总是在任意时刻都进行信息交互，网络的拓扑结构也不再是固定连通的. 因此，在通讯信号不连续、通讯拓扑不连通的情况下讨论耦合神经网络的同步更具有实际意义. 2016 年 Chen 等[15]提出一类具有不连通拓扑的切换机制，并分析了复杂网络的渐近同步行为，该耦合机制仅要求网络节点之间的信息在某些离散时刻进行通讯，并允许每次切换拓扑可以是不连通的. 基于此，2021 年 Chen 等[16]结合脉冲耦合机制和事件触发控制，研究了耦合神经网络的同步问题. 但这些工作主要是围绕实值网络展开讨论，对具有更强存储能力和更高效信号处理能力的耦合复值神经网络，如何深入探讨其在脉冲耦合机制下的同步仍是一个亟待解决的难题.

基于上述讨论，本文探讨一类脉冲耦合复值神经网络的全局渐近同步问题. 主要贡献包括：①相较于以往的连续耦合神经网络[13-14]和实值切换耦合神经网络[15-16]，本文运用图的序列连通性和 Dirac 脉冲函数，提出了一类依赖于节点复值状态的脉冲耦合机制，它不仅具有更强的信息存储能力和更高效的信息处理能力，还去除了以往研究中需要网络拓扑结构固定连通的限制性条件，仅需网络节点在序列连通条件下的某些离散时刻进行信息通讯即可. ②本文采用直接误差方法来讨论耦合神经网络的渐近同步，有效避免了实际问题中同步态未知或同步态不可微带来的分析困难. 理论结果和数值模拟表明，当网络节点之间出现通讯间断或信道更新等不连续通讯时，适当调整网络切换顺序或节点耦合权重也能够实现整个网络的同步.

1 模型描述及预备知识

1.1 符号说明

在本文中，$\mathbb{Z}^+$，$\mathbb{R}$，$\mathbb{R}^n$，$\mathbb{C}^n$ 和 $\mathbb{C}^{n\times n}$ 分别表示正整数集，实数集，n 维实向量空间，n 维复向量空间及 $n\times n$ 复矩阵空间. $\boldsymbol{E}_n$ 表示 $n\times n$ 维单位矩阵，对一个正整数 N，记集合 $\overrightarrow{N}=\{1, 2, \cdots, N\}$. 对任意的 $\boldsymbol{x}\in\mathbb{C}^n$，$\boldsymbol{x}^{\mathrm{H}}$ 表示 $\boldsymbol{x}$ 的共轭转置，$\|\boldsymbol{x}\|=\sqrt{\boldsymbol{x}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{x}}$. $\mathbb{G}=(V, \varepsilon)$ 表示由点集 $V=\{1, 2, \cdots, N\}$ 和边集 $\varepsilon\in V\times V$ 构成的图. 对任意两个节点 l，$k\in V$，$(l, k)\in\varepsilon$ 表示节点 l 与 k 之间的无向连边. $\{G_k\}_{k=1}^{T}$ 是 T 个 $\mathbb{G}$ 均含有 N 个节点的子图构成的图序列.

1.2 模型描述

考虑由 N 个复值神经网络构成的复杂网络系统，其模型描述为：

$$\dot{\boldsymbol{x}}_i(t)=-\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_i(t)+\boldsymbol{D}\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_i(t))+\boldsymbol{I}(t)+\boldsymbol{U}_i(t),\ i\in\overrightarrow{N} \tag{1}$$

式(1)中 $\boldsymbol{x}_i(t)=(x_{i1}(t), x_{i2}(t), \cdots, x_{in}(t))^{\mathrm{T}}\in\mathbb{C}^n$ 表示第 i 个神经网络的状态向量，对角矩阵 $\boldsymbol{A}\in\mathbb{C}^{n\times n}$ 表示神经网络的自抑制矩阵，$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_i(t))=(f_1(x_{i1}(t)), f_2(x_{i2}(t)), \cdots, f_n(x_{in}(t)))^{\mathrm{T}}\in\mathbb{C}^n$ 表示神经网络的激活函数，$\boldsymbol{D}\in\mathbb{C}^{n\times n}$ 表示神经网络内部连接权重矩阵，$\boldsymbol{I}(t)$ 是 n 维的外部输入向量值函数，$\boldsymbol{U}_i(t)$ 刻画了网络节点之间的脉冲耦合机制，其具体形式为：

$$\boldsymbol{U}_i(t)=\sum_{k=1}^{+\infty}\Big(\sum_{j=1,\ j\neq i}^{N}\omega_{ij}(t_k)(\boldsymbol{x}_j(t_k)-\boldsymbol{x}_i(t_k))\Big)\delta(t-t_k),\ i\in\overrightarrow{N} \tag{2}$$

式(2)中 t_k 表示脉冲时刻满足 $0<\gamma_1<t_{k+1}-t_k<\gamma_2$，$\delta(\cdot)$ 是 Dirac 脉冲函数，实矩阵 $\boldsymbol{\Omega}_k=(\omega_{ij}(t_k))_{N\times N}\in\mathbb{R}^{N\times N}$ 表示 t_k 时刻切换拓扑对应的邻接矩阵，对任意 i，$j\in V$，若存在 $(i, j)\in\varepsilon$，那么 $\omega_{ij}(t_k)>0$，否则

$\omega_{ij}(t_k)=0$. 另外，记 G_k 为 t_k 时刻的网络拓扑，$\lim\limits_{t\to t_k^-}\boldsymbol{x}_i(t)=\boldsymbol{x}_i(t_k)$.

利用 Dirac 函数性质，式(1) 转化为如下脉冲微分系统

$$\begin{cases}\dot{\boldsymbol{x}}_i(t)=-\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_i(t)+\boldsymbol{D}\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_i(t))+\boldsymbol{I}(t) & t\neq t_k \\ \boldsymbol{x}_i(t_k^+)=\boldsymbol{x}_i(t_k)+\sum\limits_{j=1,\,j\neq i}^{N}\omega_{ij}(t_k)(\boldsymbol{x}_j(t_k)-\boldsymbol{x}_i(t_k)) & t=t_k,\ i\in\overrightarrow{N}\end{cases}\tag{3}$$

令

$$\widetilde{\omega}_{ij}(t_k)=\begin{cases}1-\sum\limits_{j=1,\,j\neq i}^{N}\omega_{ij}(t_k) & i=j \\ \omega_{ij}(t_k) & i\neq j\end{cases}$$

则式(3) 转化为：

$$\begin{cases}\dot{\boldsymbol{x}}_i(t)=-\boldsymbol{D}\boldsymbol{x}_i(t)+\boldsymbol{A}\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_i(t))+\boldsymbol{I}(t) & t\neq t_k \\ \boldsymbol{x}_i(t_k^+)=\sum\limits_{j=1}^{N}\widetilde{\omega}_{ij}(t_k)\boldsymbol{x}_j(t_k) & t=t_k,\ i\in\overrightarrow{N}\end{cases}\tag{4}$$

下面给出一些相关的定义、假设和引理.

定义 1　对图 $\mathbb{G}=(V,\varepsilon)$ 及非空点集 $L\subseteq V$，称集合 $\mathbb{N}(\mathbb{G},L)=\{k\in V\backslash L\mid \exists l\in L,(l,k)\in\varepsilon\}$ 为点集 L 在图 $\mathbb{G}$ 中的邻居节点集.

定义 2　对图序列 $\{G_k\}_{k=1}^{T}$，若 $\bigcup_{k=1}^{T}G_k$ 中包含图 $\mathbb{G}$ 的一个生成树，则称图序列 $\{G_k\}_{k=1}^{T}$ 是节点连通的.

定义 3[17]　对给定图序列 $\{G_k\}_{k=1}^{T}$，若存在一个节点 $l\in V$ 使得 $V_k\leqslant V_{k-1}\cup\mathbb{N}(G_k,V_{k-1})$，其中 $V_0=\{l\}$，$V_T=V$，则称图序列 $\{G_k\}_{k=1}^{T}$ 是序列连通的.

定义 4　对任意 $i,p\in V$，若 $\lim\limits_{t\to+\infty}\|\boldsymbol{x}_i(t)-\boldsymbol{x}_p(t)\|=0$，则称耦合神经网络式(1) 是全局渐近同步的.

定义 5[18]　对给定向量 $\boldsymbol{Q}=(x_1x_2,\cdots,x_n)\in\mathbb{R}^n$，称 $\mathrm{conv}(\boldsymbol{Q})=\{\sum_{i=1}^{m}\alpha_ix_i:\sum_{i=1}^{m}\alpha_i=1,\alpha_i\geqslant 0,m\geqslant 1\}$ 为向量 $\boldsymbol{Q}$ 的凸包.

假设 1　对任意 $k\in\mathbb{Z}^+$，当 $i\neq j$ 时，$0\leqslant\omega_{ij}(t_k)<1$，并且 $0\leqslant\sum_{j=1,\,j\neq i}^{N}\omega_{ij}(t_k)<1$.

假设 2　对任意 $\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in\mathbb{C}^n$，存在正常数 $\mathscr{L}$ 使得 $\|\boldsymbol{f}(x)-\boldsymbol{f}(y)\|\leqslant\mathscr{L}\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\|$.

引理 1[17]　若对任意 $l\in\mathbb{Z}^+$，图序列 $\{G_k\}_{k=(l-1)T+1}^{lT}$ 是节点连通的，那么图序列 $\{G_k\}_{k=1}^{(N-1)^2T}$ 是序列连通的.

引理 2[17]　设 $x\in I\subseteq\mathbb{R}$，常数 $a\leqslant b$，则函数 $f(x)=ax+(1-x)b$ 在 $x^*=\min\limits_{x\in I}\{x\}$ 处取得最大值.

2　主要结论

为方便证明，首先引入如下记号.

$$\begin{cases}\Phi_k=\mathrm{conv}(\|\boldsymbol{x}_i(t_k^-)\|), & \forall i\in V_{k-1}, \\ \hat{\Phi}_k=\mathrm{conv}(\|\boldsymbol{x}_i(t_k^+)\|), & \forall i\in V_{k-1}, \\ \Phi(t)=\mathrm{conv}(\|\boldsymbol{x}_i(t)\|), & \forall i\in V,\end{cases}\qquad\begin{cases}\varphi_k=\max\limits_{i,\,p\in V_{k-1}}\{\|\boldsymbol{x}_i(t_k^-)-\boldsymbol{x}_p(t_k^-)\|\}, \\ \hat{\varphi}_k=\max\limits_{i,\,p\in V_k}\{\|\boldsymbol{x}_i(t_k^+)-\boldsymbol{x}_p(t_k^+)\|\}, \\ \varphi(t)=\max\limits_{i,\,p\in V}\{\|\boldsymbol{x}_i(t_k^+)-\boldsymbol{x}_p(t_k^+)\|\},\end{cases}$$

$$\tilde{\delta}=\lambda_{\max}(-\boldsymbol{D}^{\mathrm{H}}-\boldsymbol{D}+2\|\boldsymbol{A}\|\mathscr{L}\boldsymbol{E}_n),\qquad \alpha(t_s)=\min_{i\in V}\Big\{\sum_{j\in V_{s-1}}\widetilde{\omega}_{ij}(t_s)\Big\},$$

$$\gamma=\begin{cases}\gamma_1, & \tilde{\delta}<0, \\ \gamma_2, & \tilde{\delta}>0.\end{cases}$$

定理 1　基于假设 1、假设 2，如果存在正整数 T 使得对任意 $l\geqslant 0$，图序列 $\{G_k\}_{lT+1}^{(l+1)T}$ 是序列连通的，并且

$$\mathrm{e}^{\frac{\tilde{\delta}}{2}\gamma T}\left(1-\prod_{s=1}^{T}\alpha(t_s)\right)<1 \tag{5}$$

那么，脉冲耦合复值神经网络式(1)是全局渐近同步的.

证 第一步：证明 $\varphi(t_k^+)\leqslant\varphi(t_k)$.

对任意 $i\in V$，由假设 1 可知

$$\boldsymbol{x}_i(t_k^+)=\sum_{j=1}^{N}\tilde{\omega}_{ij}(t_k)\boldsymbol{x}_j(t_k)=$$

$$\left(1-\sum_{j=1,\,j\neq i}^{N}\omega_{ij}(t_k)\right)\boldsymbol{x}_i(t_k)+\sum_{j=1,\,j\neq i}^{N}\omega_{ij}(t_k)\boldsymbol{x}_j(t_k)\in\Phi(t_k)$$

因此，由 i 的任意性可知 $\Phi(t_k^+)\subseteq\Phi(t_k)$，从而可得 $\varphi(t_k^+)\leqslant\varphi(t_k)$.

第二步：证明对任意的 $k\in\mathbb{Z}^+$，$\varphi(t_k)\leqslant\mathrm{e}^{\frac{\tilde{\delta}}{2}\gamma}\varphi(t_{k-1}^+)$，$\varphi_k\leqslant\mathrm{e}^{\frac{\tilde{\delta}}{2}\gamma}\overset{\wedge}{\varphi}_{k-1}$.

当 $t\in(t_{k-1},t_k]$ 时，对任意 i，$p\in V$，定义 $\boldsymbol{e}_{ip}(t)=\boldsymbol{x}_i(t)-\boldsymbol{x}_p(t)$，由式(4)可知

$$\frac{\mathrm{d}(\|\boldsymbol{e}_{ip}(t)\|^2)}{\mathrm{d}t}=\dot{\boldsymbol{e}}_{ip}^{\mathrm{H}}(t)\boldsymbol{e}_{ip}(t)+\boldsymbol{e}_{ip}^{\mathrm{H}}(t)\dot{\mathrm{e}}_{ip}(t)=$$

$$(-\boldsymbol{D}\boldsymbol{e}_{ip}(t)+\boldsymbol{A}\tilde{\boldsymbol{f}}(\boldsymbol{e}_{ip}(t)))^{\mathrm{H}}\boldsymbol{e}_{ip}(t)+\boldsymbol{e}_{ip}^{\mathrm{H}}(t)(-\boldsymbol{D}\boldsymbol{e}_{ip}(t)+\boldsymbol{A}\tilde{\boldsymbol{f}}(\boldsymbol{e}_{ip}(t)))=$$

$$-\boldsymbol{e}_{ip}^{\mathrm{H}}(t)(\boldsymbol{D}^{\mathrm{H}}+\boldsymbol{D})\boldsymbol{e}_{ip}(t)+\boldsymbol{e}_{ip}^{\mathrm{H}}(t)\boldsymbol{A}\tilde{\boldsymbol{f}}(\boldsymbol{e}_{ip}(t))+\tilde{\boldsymbol{f}}^{\mathrm{H}}(\boldsymbol{e}_{ip}(t))\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{e}_{ip}(t)$$

其中 $\tilde{\boldsymbol{f}}(\boldsymbol{e}_{ip}(t))=\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_i(t))-\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_p(t))$. 由假设 2 可得

$$\frac{\mathrm{d}(\|\boldsymbol{e}_{ip}(t)\|^2)}{\mathrm{d}t}\leqslant\boldsymbol{e}_{ip}^{\mathrm{H}}(t)(-\boldsymbol{D}^{\mathrm{H}}-\boldsymbol{D})\boldsymbol{e}_{ip}(t)+2\|\boldsymbol{A}\|\,\|\boldsymbol{e}_{ip}(t)\|\,\|\tilde{\boldsymbol{f}}(\boldsymbol{e}_{ip}(t))\|\leqslant$$

$$\boldsymbol{e}_{ip}^{\mathrm{H}}(t)(-\boldsymbol{D}^{\mathrm{H}}-\boldsymbol{D}+2\|\boldsymbol{A}\|\mathscr{L})\boldsymbol{e}_{ip}(t)\leqslant\tilde{\delta}\,\boldsymbol{e}_{ip}^{\mathrm{H}}(t)\mathrm{e}_{ip}(t) \tag{6}$$

从而有

$$\|\boldsymbol{e}_{ip}(t_k^-)\|\leqslant\mathrm{e}^{\frac{\tilde{\delta}}{2}\gamma}\|\boldsymbol{e}_{ip}(t_{k-1}^+)\|$$

由节点 i，p 的任意性可得

$$\varphi(t_k^-)\leqslant\mathrm{e}^{\frac{\tilde{\delta}}{2}\gamma}\varphi(t_{k-1}^+),\quad\varphi_k\leqslant\mathrm{e}^{\frac{\tilde{\delta}}{2}\gamma}\hat{\varphi}_{k-1}$$

第三步：证明若图序列 $\{G_k\}_{k=1}^T$ 是序列连通的，则 $\varphi(t_{T+1})\leqslant\mathrm{e}^{\frac{\tilde{\delta}}{2}\gamma T}(1-\prod_{s=1}^{T}\alpha(t_s))\varphi(t_1)$.

结合式(4)和定义 3 可知，对任意 $i\in V_k$，

$$\|\boldsymbol{x}_i(t_k^+)\|=\|\sum_{j=1}^{N}\tilde{\omega}_{ij}(t_k)\boldsymbol{x}_j(t_k)\|\leqslant\sum_{j\in V_{k-1}}\tilde{\omega}_{ij}(t_k)\|\boldsymbol{x}_j(t_k)\|+\sum_{j\in V\setminus V_{k-1}}\tilde{\omega}_{ij}(t_k)\|\boldsymbol{x}_j(t_k)\|\leqslant$$

$$\max_{j\in V_{k-1}}\{\|\boldsymbol{x}_j(t_k)\|\}\sum_{j\in V_{k-1}}\tilde{\omega}_{ij}(t_k)+\max_{j\in V}\{\|\boldsymbol{x}_j(t_k)\|\}(1-\sum_{j\in V_{k-1}}\tilde{\omega}_{ij}(t_k))$$

由于 $\max\limits_{j\in V_{k-1}}\{\|\boldsymbol{x}_j(t_k)\|\}\leqslant\max\limits_{j\in V}\{\|\boldsymbol{x}_j(t_k)\|\}$，根据引理 2 可知

$$\|\boldsymbol{x}_i(t_k^+)\|\leqslant\alpha(t_k)\max_{j\in V_{k-1}}\{\|\boldsymbol{x}_j(t_k)\|\}+(1-\alpha(t_k))\max_{j\in V}\{\|\boldsymbol{x}_j(t_k)\|\}$$

$$\in\alpha(t_k)\Phi_k+(1-\alpha(t_k))\Phi(t_k)$$

因此，$\overset{\wedge}{\Phi}_k\subseteq\alpha(t_k)\Phi_k+(1-\alpha(t_k))\Phi(t_k)$，$\overset{\wedge}{\varphi}_k\leqslant\alpha(t_k)\varphi_k+(1-\alpha(t_k))\varphi(t_k)$. 另外，结合第一步和第二步不难得到：$\varphi_k\leqslant\mathrm{e}^{\frac{\tilde{\delta}}{2}\gamma}\overset{\wedge}{\varphi}_{k-1}$，$\varphi(t_k)\leqslant\mathrm{e}^{\frac{\tilde{\delta}}{2}\gamma}\varphi(t_{k-1}^+)\leqslant\mathrm{e}^{\frac{\tilde{\delta}}{2}\gamma}\varphi(t_{k-1})$. 因此，逐次迭代可得

$$\overset{\wedge}{\varphi}_k\leqslant\alpha(t_k)\mathrm{e}^{\frac{\tilde{\delta}}{2}\gamma}\overset{\wedge}{\varphi}_{k-1}+(1-\alpha(t_k))\mathrm{e}^{\frac{\tilde{\delta}}{2}\gamma}\varphi(t_{k-1})\leqslant$$

$$\alpha(t_k)\mathrm{e}^{\frac{\tilde{\delta}}{2}\gamma}(\alpha(t_{k-1})\varphi_{k-1}+(1-\alpha(t_{k-1}))\varphi(t_{k-1}))+(1-\alpha(t_k))\mathrm{e}^{\frac{\tilde{\delta}}{2}\gamma}\varphi(t_{k-1})\leqslant$$

$$\alpha(t_k)\alpha(t_{k-1})(\mathrm{e}^{\frac{\tilde{\delta}}{2}\gamma})^2\overset{\wedge}{\varphi}_{k-2}+(1-\alpha(t_k)\alpha(t_{k-1}))\mathrm{e}^{\frac{\tilde{\delta}}{2}\gamma}\varphi(t_{k-1})\leqslant$$

$$\alpha(t_k)\alpha(t_{k-1})(\mathrm{e}^{\frac{\tilde{\delta}}{2}\gamma})^2(\alpha(t_{k-2})\varphi_{k-2}+(1-\alpha(t_{k-2}))\varphi(t_{k-2}))+$$

$$(\mathrm{e}^{\frac{\tilde{\delta}}{2}\gamma})^2(1-\alpha(t_k)\alpha(t_{k-1}))\varphi(t_{k-2})\leqslant$$

$$
\begin{aligned}
&(\mathrm{e}^{\frac{\tilde{\delta}}{2}\gamma})^{k-1}\Big(\prod_{s=2}^{k}\alpha(t_s)\Big)\overset{\wedge}{\varphi}_1+(\mathrm{e}^{\frac{\tilde{\delta}}{2}\gamma})^{k-1}\Big(1-\prod_{s=2}^{k}\alpha(t_s)\Big)\varphi(t_1)\leqslant\\
&(\mathrm{e}^{\frac{\tilde{\delta}}{2}\gamma})^{k-1}\Big(\prod_{s=2}^{k}\alpha(t_s)\Big)(\alpha(t_1)\varphi_1+(1-\alpha(t_1))\varphi(t_1))+\\
&(\mathrm{e}^{\frac{\tilde{\delta}}{2}\gamma})^{k-1}\Big(1-\prod_{s=2}^{k}\alpha(t_s)\Big)\varphi(t_1)
\end{aligned}
$$

由 V_0 是孤立节点集和 $V_T=V$ 可知

$$\overset{\wedge}{\varphi}_k\leqslant(\mathrm{e}^{\frac{\tilde{\delta}}{2}\gamma})^{k-1}\Big(1-\prod_{s=1}^{k}\alpha(t_s)\Big)\varphi(t_1)$$

$$\varphi(t_T^{+})\leqslant\mathrm{e}^{\frac{\tilde{\delta}}{2}\gamma(T-1)}\Big(1-\prod_{s=1}^{T}\alpha(t_s)\Big)\varphi(t_1)$$

结合第二步可得

$$\varphi(t_{T+1})\leqslant\mathrm{e}^{\frac{\tilde{\delta}}{2}\gamma T}(1-\prod_{s=1}^{T}\alpha(t_s))\varphi(t_1)$$

所以

$$
\begin{aligned}
\varphi(t_{lT+1})\leqslant\mathrm{e}^{\frac{\tilde{\delta}}{2}\gamma T}\Big(1-\prod_{s=1}^{T}\alpha(t_s)\Big)\varphi(t_{(l-1)T+1})&\leqslant\\
\Big(\mathrm{e}^{\frac{\tilde{\delta}}{2}\gamma T}(1-\prod_{s=1}^{T}\alpha(t_s))\Big)^2\varphi(t_{(l-2)T+1})&\leqslant\\
\Big(\mathrm{e}^{\frac{\tilde{\delta}}{2}\gamma T}(1-\prod_{s=1}^{T}\alpha(t_s))\Big)^l\varphi(t_1)&
\end{aligned}
\tag{7}
$$

由定理条件和式(7)可知，$\lim\limits_{l\to\infty}\varphi(t_{lT+1})=0$，从而耦合神经网络式(1)是全局渐近同步的.

注 1　当 $\prod_{s=1}^{T}\alpha(t_s)=1$ 时，虽然式(5)仍然成立，但在该条件下 $\sum_{j=1,\,j\neq i}^{N}\omega_{ij}(t_k)\geqslant 1$，这与假设 1 矛盾，并且由式(7)可知，此时无法得到网络的渐近同步性. 因此 $0<1-\prod_{s=1}^{T}\alpha(t_s)<1$.

推论 1　基于假设 1、假设 2，如果存在正整数 T 使得对任意 $l\geqslant 0$，图序列 $\{G_k\}_{k=lT+1}^{(l+1)T}$ 是节点连通的，并且

$$\mathrm{e}^{\frac{\tilde{\delta}}{2}(N-1)^2\gamma T}\Big(1-\prod_{s=1}^{(N-1)^2T}\alpha(t_s)\Big)<1$$

那么耦合复值神经网络式(1)是全局渐近同步的.

注 2　在定理 1 中，不连续脉冲切换拓扑下的序列连通性可解释为：t_0 时刻某一复值神经网络节点 V_0 接收到外来信息，在 t_1 时刻拓扑结构切换为 G_1，V_0 在 G_1 中将信息传递给邻居节点 $\mathbb{N}(G_1,V_0)$，此时信息遍历的节点集为 $V_1=V_0\cup\mathbb{N}(G_1,V_0)$. 随后，在 t_2 时刻拓扑结构切换为 G_2，V_1 中的节点在 G_2 中将信息传递给邻居 $\mathbb{N}(G_2,V_1)$，此时 $V_2=V_1\cup\mathbb{N}(G_2,V_1)$. 以此类推，在 t_T 时刻拓扑结构切换第 T 次时，V_{T-1} 在 G_T 中与其邻居 $\mathbb{N}(G_T,V_{T-1})$ 交换信息，此时 $V_T=V_{T-1}\cup\mathbb{N}(G_T,V_{T-1})=V$，通过 T 次切换实现了整个网络的信息遍历，但每次切换的网络拓扑并不总是连通的.

注 3　与文献[14-18]讨论的实值耦合神经网络相比，本文研究的脉冲耦合复值神经网络具有更强的信息存储能力和更高效的信息处理能力. 在研究方法上，与传统的 Lyapunov 方法不同，本文主要运用直接误差方法和凸组合技巧来分析耦合网络的同步，理论分析和判定条件更简洁直观.

3　数值模拟与仿真

考虑 6 个具有双复值神经元的神经网络耦合而成的复杂网络，其模型为：

$$\dot{\boldsymbol{x}}_i(t)=-\boldsymbol{D}\boldsymbol{x}_i(t)+\boldsymbol{A}\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_i(t))+\boldsymbol{I}(t)+\boldsymbol{U}_i(t),\ i=1,2,\cdots,6 \tag{8}$$

式(8)中 $\boldsymbol{x}_i(t)\in\mathbb{C}^2$，$\boldsymbol{U}_i(t)$ 为脉冲耦合策略式(2)，$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_i)=(0.7\tanh(\boldsymbol{x}_{i1}(t)),\ 0.7\tanh(\boldsymbol{x}_{i2}(t)))^{\mathrm{T}}$

$$\boldsymbol{D}=\begin{pmatrix}1.8-5.8\mathrm{i} & 0\\ 0 & 1.8-5.8\mathrm{i}\end{pmatrix},\ A=\begin{pmatrix}1+1.6\mathrm{i} & 0.6+0.25\mathrm{i}\\ 0.55+0.25\mathrm{i} & 0.9-\mathrm{i}\end{pmatrix}$$

耦合网络式(8)的脉冲拓扑切换图序列如图1和图2所示，这里$V_0=\{1\}$，$V_1=\{1,2,3\}$，$V_2=\{1,2,3,4,5,6\}$. 由定义3可知，该图序列是序列连通的，且$T=2$.

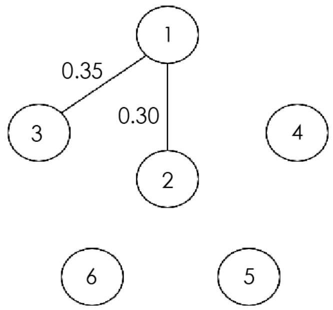

图1　$t=t_{2k-1}$时的拓扑结构

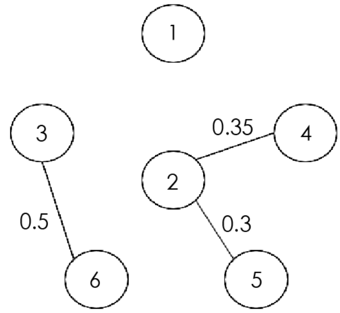

图2　$t=t_{2k}$时的拓扑结构

显然，$\alpha(t_{2k-1})=\min\limits_{1\leqslant i\leqslant 6}\Big\{\sum\limits_{j\in V_1}\widetilde{\omega}_{ij}(t_{2k-1})\Big\}=0.3$，$\alpha(t_{2k})=\min\limits_{1\leqslant i\leqslant 6}\Big\{\sum\limits_{j\in V_2}\widetilde{\omega}_{ij}(t_{2k})\Big\}=0.3$. 通过计算，$\mathscr{L}=0.7$，$\tilde{\delta}=0.4641$. 对任意的$k\in\mathbb{Z}^+$，取$0<t_k-t_{k-1}\leqslant 0.2=\gamma$，那么$\left(1-\prod_{s=1}^{T}\alpha(t_s)\right)\times \mathrm{e}^{\frac{\tilde{\delta}}{2}\gamma T}=0.7822<1$. 由定理1可知，耦合网络式(8)是全局渐近同步的，同步模拟结果如图3和图4所示.

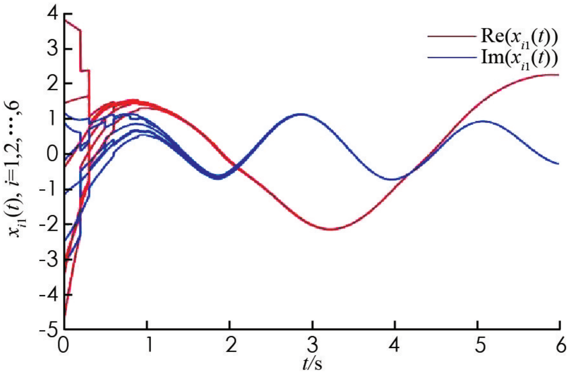

图3　$x_{i1}(t)$的同步过程

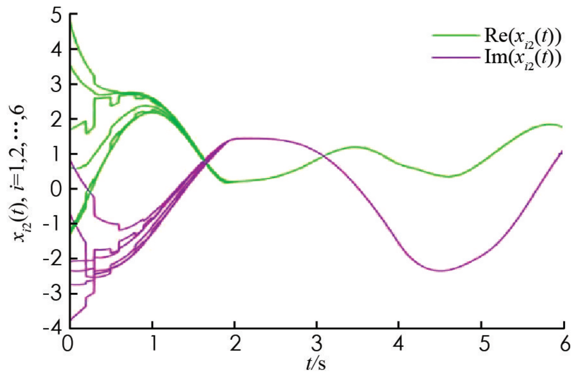

图4　$x_{i2}(t)$的同步过程

4　结语

本文研究了由复值神经网络通过脉冲耦合构成的复杂动态网络的渐近同步问题. 不同于以往的连续耦合机制，该网络节点仅在脉冲时刻进行信息交换和拓扑结构的切换. 在序列连通条件下，基于直接误差法及迭代的思想建立了脉冲耦合复值神经网络渐近同步的判定条件. 结果表明在网络耦合中出现不连续通讯时，对节点通讯进行适当地限制也能实现网络的渐近同步. 在以后的工作中，将探讨在脉冲耦合机制下具有随机切换拓扑的脉冲耦合网络的同步问题.

参考文献：

[1] KWOK T, SMITH K A. A Unified Framework for Chaotic Neural Network Approaches to Combinatorial Optimization [J]. IEEE Transactions on Neural Networks and Learning Systems, 1999, 10(4): 978-981.

[2] YANG T, YANG L B, YANG C M. Application of Neural Networks to Unmasking Chaotic Secure Communication to Unmasking Chaotic Secure Communication [J]. Physica D, 1998, 124(1/3): 248-257.

[3] FANG T, SUN J T. Stability of Complex-valued Recurrent Neural Networks with Time-Delays [J]. IEEE Transactions on Neural Networks and Learning Systems, 2014, 25(9): 1709-1713.

[4] LEE D. Improvements of Complex-valued Hopfield Associative Memory by Using Generalized Projection Rules [J]. IEEE Transactions on Neural Networks and Learning Systems, 2006, 17(5): 1341-1347.

[5] LIU D，ZHU S，SUN K L. Global Anti-synchronization of Complex-valued Memristive Neural Networks with Time Delays [J]. IEEE Transactions on Cybernetics，2019，49(5)：1735-1747.

[6] JANKOWSKI S，LOZOWSKI A，ZURADA J. A Complex-valued Multistate Neural Associative Memory [J]. IEEE Transactions on Neural Networks and Learning Systems，1996，7(6)：1491-1496.

[7] AMIN M F，MURASE K. Single-layered Complex-valued Neural Network or Real-valued Classification Problems [J]. Neurocomputing，2009，72(4/6)：945-955.

[8] HIROSE A. Complex-valued Neural Networks：Theories and Applications [M]. Singapore：World Scientific Publishing，2003.

[9] NISHIKAWA I，IRITANI T，SAKAKIBARA K. Phase Dynamics of Complex-valued Neural Networks and Its Application to Traffic Signal Control [J]. International Journal of Neural Systems，2005，15：111-120.

[10] ZHANG S C，XIA Y S. Two Fast Complex-valued Algorithms for Solving Complex Quadratic Programming Problems [J]. IEEE Transactions on Cybernetics，2016，46(12)：2837-2847.

[11] HU C，HE H B，JIANG H J. Synchronization of Complex-valued Dynamic Networks with Intermittently Adaptive Coupling：A Direct Error Method [J]. Automatica，2020，112：108675.

[12] HUANG Y L，WU F. Finite-Time Passivity and Synchronization of Coupled Complex-valued Memristive Neural Networks [J]. Information Sciences，2021，580：775-800.

[13] LIU X W，CHEN T P. Synchronization of Coupled Connected Neural Networks with Delays [J]. IEEE Transactions on Circuits and Systems，2004，51(12)：2491-2503.

[14] WU S C，LI X D，DING Y H. Saturated Impulsive Control for Synchronization of Coupled Delayed Neural Networks [J]. Neural Networks，2021，141：261-269.

[15] CHEN Y，YU W W，TAN S. Synchronizing Nonlinear Complex Networks via Switching Disconnected Topology [J]. Automatica，2016，70：189-194.

[16] CHEN J J，CHEN B S，ZENG Z G. Event-based Synchronization for Multiple Neural Networks with Time Delay and Switching Disconnected Topology [J]. IEEE Transactions on Industrial Electronics，2021，68(3)：2491-2500.

责任编辑　夏娟