第 47 卷 第 3 期　　西南师范大学学报(自然科学版)　　2022 年 3 月
Vol. 47 No. 3　　Journal of Southwest China Normal University (Natural Science Edition)　　Mar. 2022

DOI:10.13718/j.cnki.xsxb.2022.03.004

二维趋化-Navier-Stokes 方程的全局吸引子①

刘婷熙，　范小明

西南交通大学 数学学院，成都 611756

摘要：研究二维空间上趋化-Navier-Stokes 方程解的长时间行为. 通过化学浓度的吸收性和光滑性得到细菌种群密度的吸收性和光滑性，由二者获得流体速度的吸收性和光滑性，进而得到系统的吸收性和渐近紧性. 最后由吸引子的存在性定理得到结论，即二维空间上的趋化-Navier-Stokes 方程存在紧的全局吸引子.

关　键　词：趋化-Navier-Stokes 方程；全局吸引子；有界吸收集；解半群

中图分类号：O193　　**文献标志码**：A　　**文章编号**：1000－5471(2022)03－0026－10

Global Attractor for Two-dimensional Chemotaxis-Navier-Stokes Equations

LIU Tingxi，　FAN Xiaoming

School of Mathematical，Southwest Jiaotong University，Chengdu 611756，China

Abstract：The long-time behavior of solutions of chemotaxis-Navier-Stokes equations in two-dimensional space has been studied. The absorbability and smoothness of the bacterial population density have been obtained through the absorbability and smoothness of the chemical concentration，and the absorbability and smoothness of the fluid velocity obtained from the two. Furthermore，the absorption and asymptotic compactness of the system obtained，too. Finally，it is concluded from the existence theorem of attractors that the chemotaxis-Navier-stokes equation in two-dimensional space has a compact global attractor.

Key words：chemotaxis-Navier-Stokes；global attractor；bounded absorbing set；semi-group

趋化现象最早在文献[1-2]中提出，描述的是生物学中由于化学物质的影响，细胞进行定向运动的现象. 众所周知，细菌细胞一般是生活在各种各样的粘性流体当中的，所以近十年来趋化 -Navier-Stokes 方程[3-7] 已经成为生物学家和数学家们比较关注的数学模型. 对于趋化 -Navier-Stokes 方程，前人关于它在不同边界条件下解的存在情况已有了很多研究[8-12]. 但是对于该系统吸引子的存在性的研究甚少. 本文主要讨论二维有界域下的趋化 -Navier-Stokes 方程的全局吸引子. 趋化 -Navier-Stokes 方程如下：

$$\frac{\partial n}{\partial t}+\boldsymbol{u}\cdot\nabla n-\Delta n=-\nabla\cdot(n\nabla c)+f(n),\qquad x\in\Omega,\ t>0 \tag{1}$$

$$\frac{\partial c}{\partial t}+\boldsymbol{u}\cdot\nabla c-\Delta c=-nc+g(c),\qquad x\in\Omega,\ t>0 \tag{2}$$

① 收稿日期：2021－05－08

作者简介：刘婷熙，硕士研究生，主要从事微分方程与动力系统的研究.

通信作者：范小明，教授.

$$\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial t}+(\boldsymbol{u}\cdot\nabla)\boldsymbol{u}-\Delta\boldsymbol{u}=\nabla p-n\nabla\varphi,\qquad x\in\Omega,\ t>0 \tag{3}$$

$$\nabla\cdot\boldsymbol{u}=0,\qquad x\in\Omega,\ t>0 \tag{4}$$

下面是这个方程的初边值条件：

$$\frac{\partial n}{\partial \boldsymbol{v}}=\frac{\partial c}{\partial \boldsymbol{v}}=0,\ \boldsymbol{u}=0,\ x\in\Gamma,\ t>0$$

$$n(x,0)=n_0(x),\ c(x,0)=c_0(x),\ \boldsymbol{u}(x,0)=\boldsymbol{u}_0(x),\ x\in\Omega$$

在这个模型中，$\Omega\subset\mathbb{R}^2$ 是一个带有光滑边界 $\Gamma:=\partial\Omega$ 的有界区域. 其中 $\boldsymbol{v}(x)$ 是 $x\in\Gamma$ 上的单位外法向量，φ 是重力势并且有 $\nabla\varphi\in L^{\infty}(\Omega)$，$\Delta\varphi=0$，$n$ 表示细菌的种群密度，c 代表化学浓度，p 和 $\boldsymbol{u}=(u_1,u_2)$ 分别代表流体的压力和速度. 设 $n(x,t)$，$c(x,t)$ 是关于空间 $x\in\overline{\Omega}$ 和时间 $t>0$ 的连续函数，因为 c 是化学浓度，故可设 $M(t)=\sup\limits_{x\in\Omega}c(x,t)\leqslant\gamma<\frac{1}{4}$.

再设 f,g 可导，$f(0)=0$，$g(0)=0$ 并满足下列条件：

(i) $\sup\limits_{y>0}\frac{f(y)}{y}<-C$，其中 C 是正常数；

(ii) $\sup\limits_{y\in[0,1]}\frac{g(y)}{y}<\lambda_1$，$\lambda_1=\lambda_1(\Omega)$，其中 λ_1 是依赖于 Ω 的常数；

假设细菌和化学物质在一种不可压缩的流体(如水)中求解，利用 Navier-Stokes 方程中的速度 u 来模拟其流动，由于重力势的存在，细菌细胞的重量将会影响流体的流动.

本文主要包含了以下几个部分.

第 1 部分，给出了半群和吸引子的定义、吸引子的存在性定理；讨论了 n,c 是正解及解的适定性，从而方程(1)－(4) 决定了一个解半群.

第 2 部分，证明趋化-Navier-Stokes 方程(1)－(4) 所对应的解半群在所研究的空间上存在正向不变的有界吸收集. 前人在处理这部分时是将趋化-Navier-Stokes方程看作一个整体来证明其系统的吸收性，但由于方程(1)－(4) 的复杂程度，采用整体法无法处理其吸收性. 因此我们可以利用此方程的强耦合性，将它分成 3 部分来处理. 首先利用能量估计等方法证明化学浓度 c 的吸收集是存在的，再从 c 的吸收集出发证明细菌种群密度 n 的吸收集存在，最后由 n 的吸收性证明了流体速度 $\boldsymbol{u}$ 的吸收集存在，综上所述得到了$(n,c,\boldsymbol{u})$ 的吸收集是存在的.

第 3 部分，证明方程所对应的解半群是一致渐近紧的. 首先得到 $\boldsymbol{u}$ 的光滑性，再利用方程的强耦合性，通过 $\boldsymbol{u}$ 的光滑性得到 c 的光滑性，再由 $\boldsymbol{u}$ 的光滑性得到 n 的光滑性，最后利用半群性质，得到解半群在所研究的空间上是一致渐近紧的.

1　预备知识

本章节将会给出一些证明所需的基本定义和定理.

定义证明所需的空间 $H=L^2(\Omega)\times L^2(\Omega)\times(L^2_\sigma(\Omega))^2$，$K=H^1_0(\Omega)\times H^1_0(\Omega)\times(H^1_\sigma(\Omega))^2$，$L^2_\sigma(\Omega)=\{u\in L^2(\Omega);\ \nabla\cdot u=0\}$，$H^1_\sigma(\Omega)=\{u\in H^1(\Omega);\ \nabla\cdot u=0\}$ 以及 $L^2(\Omega)$ 上的内积和范数分别为 $(u,v)=\int_\Omega u(x)v(x)\mathrm{d}x$，$\forall u,v\in L^2(\Omega)$，$\|u\|_{L^2}=(u,u)^{\frac{1}{2}}$，$\forall u\in L^2(\Omega)$.

定义 1[13]　设 H 是一个 Banach 空间，$S(t)$，$t\geqslant0$ 是一簇连续算子，它是 $H\longrightarrow H$ 上的一个映射并且满足

$$\begin{cases}S(t+s)=S(t)\cdot S(s), & s,t\geqslant0\\ S(0)=I\end{cases}$$

则称 $S(t)$ 为算子半群.

定义 2[13]　如果紧集 $\mathscr{A}$ 满足下面的条件：

1) 不变性：$\mathscr{A}$ 是半群 $S(t)$ 作用下的不变集，即 $S(t)\mathscr{A}=\mathscr{A}$，$\forall t\geqslant0$；

2) 吸收性: $\mathscr{A}$ 吸收 H 上的所有有界集. 即对于任意一个有界集 $\mathscr{B} \in H$, 这里的 $\mathscr{B}$ 满足

$$\mathrm{dist}(S(t)\mathscr{B}, \mathscr{A}) = \sup_{x \in \mathscr{B}} \inf_{y \in \mathscr{A}} \| S(t)x - y \|_H \to 0$$

3) $\mathscr{A}$ 有一个开邻域 $\mathscr{U}$, 使得对于 $\mathscr{U}$ 上的任意一个 n_0, 当 $t \to \infty$ 时, 所有从 n_0 出来的轨迹 $S(t)n_0$ 都收敛到 $\mathscr{A}$. 即当 $t \to \infty$ 时, $\mathrm{dist}(S(t)n_0, \mathscr{A}) \to \infty$, 则称这个紧集 $\mathscr{A}$ 为半群 $S(t)$ 的一个吸引子. 如果 $\mathscr{A}$ 还吸收相空间 H, 则称 $\mathscr{A}$ 为全局吸引子.

引理 1[13] 设 $\{S(t)\}_{t \geqslant 0}$ 是一个算子半群, $\mathscr{U} \subset H$ 是一个开集, 并且

1) $\mathscr{B}$ 是 $\mathscr{U}$ 上的一个吸收集;

2) $S(t)$ 是一致紧的(对于充分大的 t), 则 $\mathscr{B}$ 的 ω-极限集 $\mathscr{A} = \omega(\mathscr{B})$ 是 $\mathscr{U}$ 上的一个紧的全局吸引子.

引理 2 若 $(n, c, \boldsymbol{u})$ 是方程(1)-(4) 在 $\Omega \times [0, T]$, $\forall T > 0$ 中的弱解, 则

$$n(x, t) > 0, \; c(x, t) > 0 \;\; \text{a. e.} \; (x, t) \in \Omega \times [0, T]$$

证 由文献[12]可知方程(1)-(4) 在没有 $f(n)$, $g(c)$ 这两项时, 它的解 $n(x, t) > 0$, $c(x, t) > 0$ 是成立的, 则可以推出

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}t} = A(t)n \\ n(x, 0) = n_0 > 0 \end{cases}$$

其中 $A(t) = -\boldsymbol{u} \cdot \nabla + \Delta - (\nabla c \cdot \nabla + \Delta c)$, 所以 $n(x, t) = \mathrm{e}^{\int_0^t A(s)\mathrm{d}s} n_0 > 0$. 因此有

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}t} = A(t)n + f(n) \\ n(x, 0) = n_0 > 0 \end{cases}$$

又因为 $f(0) = 0$, 所以由中值定理可以得到

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}t} = A(t)n + f'(\xi(t))n \\ n(x, 0) = n_0 > 0 \end{cases}$$

则

$$n(x, t) = \mathrm{e}^{\int_0^t f'(\xi(s))\mathrm{d}s + \int_0^t A(s)\mathrm{d}s} n_0 = \mathrm{e}^{\int_0^t f'(\xi(s))\mathrm{d}s} \cdot \mathrm{e}^{\int_0^t A(s)\mathrm{d}s} n_0 > 0$$

同理可证 $c(x, t) > 0$.

引理 3[16] 如果 Ω 是 $\mathbb{R}^n$ 上的有界开集, 那么对于任意的 $1 \leqslant p < \infty$, $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$, 有

$$\| u \|_{L^q(\Omega)} \leqslant C \| \nabla u \|_{L^p(\Omega)}$$

其中 $q \in \left[1, \dfrac{np}{n-p}\right)$, C 是只依赖于 n, p, q, Ω 的常数.

引理 4[13] 如果 Ω 是 $\mathbb{R}^n$ 上的有界开集, 那么对于任意的 $u \in H_0^1(\Omega)^n \cap H^2(\Omega)^n$, $v \in H_0^1(\Omega)^n$, $w \in L^2(\Omega)^n$, 有

$$\| b(u, v, w) \|_{L^2(\Omega)} \leqslant C \| u \|_{L^2(\Omega)}^{\frac{1}{2}} \| \Delta u \|_{L^2(\Omega)}^{\frac{1}{2}} \| \nabla v \|_{L^2(\Omega)} \| w \|_{L^2(\Omega)}$$

其中

$$b(u, v, w) = \sum_{i,j=1}^{n} \int_\Omega u_i \frac{\partial v_j}{\partial x_i} w_j \mathrm{d}x$$

定理 1 对于给定的初值条件 $0 < n_0$, $c_0 \in H_0^1(\Omega)$ 和 $\boldsymbol{u}_0 \in H_0^1(\Omega)^2$, 方程(1)-(4) 存在唯一的整体解 $(n, c, \boldsymbol{u})$, $\forall T > 0$ 有

$$0 < n \in C(0, \infty; L^2(\Omega)) \cap L^2(0, T; H_0^1(\Omega))$$
$$0 < c \in C(0, \infty; L^2(\Omega)) \cap L^2(0, T; H_0^1(\Omega))$$
$$\boldsymbol{u} \in L^\infty(0, T; L^2(\Omega)^2) \cap L^2(0, T; H_0^1(\Omega)^2)$$

且映射 $\begin{pmatrix} n_0 \\ c_0 \\ \boldsymbol{u}_0 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} n(t) \\ c(t) \\ \boldsymbol{u}(t) \end{pmatrix}$ 是 $H \longrightarrow H$ 上的连续映射.

该定理给出了解的适定性，其证明主要利用 Faedo-Galerkin 方法[13]，与文献[11]类似，本文不做过多赘述. 再结合引理 2，我们得到 $n, c > 0$.

由定理 1 足以在空间 H 上定义连续的算子半群 $\{S(t)\}_{t\geqslant 0}$：

$$S(t):\begin{pmatrix} n_0 \\ c_0 \\ \boldsymbol{u}_0 \end{pmatrix} \in H \longrightarrow \begin{pmatrix} n(t) \\ c(t) \\ \boldsymbol{u}(t) \end{pmatrix} \in H$$

下面将利用文献[13－15]证明在空间 H 上半群 $\{S(t)\}_{t\geqslant 0}$ 存在全局吸引子 $\mathscr{A}$.

2　$\boldsymbol{H}$ 上吸收集的存在性

首先证明在 H 上存在有界吸收集，其过程需要在相应的空间中对解进行估计.

引理 5　设 $\mathscr{B}_1$ 是 $L^2(\Omega)$ 中的任一有界集，c 是从 $\mathscr{B}_1$ 中出发的方程(2)的一个解. 存在常数 $\gamma_1 > 0$ 和时间 $t_1 = t_1(\mathscr{B}_1) > 0$，当 $t \geqslant t_1$ 时，

$$\| c(t) \|_{L^2}^2 \leqslant \gamma_1^2$$

证　由条件(ii)可得存在常数 $\beta \in (0, \lambda_1)$ 和充分大的正常数 K_1，使得

$$g(c) \leqslant (\lambda_1 - \beta)c + K_1 \tag{5}$$

对方程(2)的两边分别与 c 作 $L^2(\Omega)$ 的内积

$$\left(\frac{\partial c}{\partial t}, c\right) + (\boldsymbol{u} \cdot \nabla c, c) - (\Delta c, c) = (-nc, c) + (g(c), c)$$

由(5)式得

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\| c \|_{L^2}^2 + \| \nabla c \|_{L^2}^2 \leqslant (\lambda_1 - \beta)\| c \|_{L^2}^2 + K_1\| c \|_{L^1} \tag{6}$$

对 $K_1\| c \|_{L^1}$ 使用 Young 不等式，有 $K_1\| c \|_{L^1} \leqslant \dfrac{K_1^2 |\Omega|}{2\beta} + \dfrac{\beta}{2}\| c \|_{L^2}^2$，则由(6)式可得

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\| c \|_{L^2}^2 + \| \nabla c \|_{L^2}^2 \leqslant \frac{1}{2\beta}K_1^2|\Omega| + \left(\lambda_1 - \frac{\beta}{2}\right)\| c \|_{L^2}^2 \tag{7}$$

再利用 Poincare 不等式，存在一个常数 $\lambda_1 = \lambda_1(\Omega)$，使得 $\| c \|_{L^2}^2 \leqslant \dfrac{1}{\lambda_1^{\frac{1}{2}}}\| \nabla c \|_{L^2}^2$，$c \in H_0^1(\Omega)$. 由(7)式得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\| c \|_{L^2}^2 \leqslant -\beta\| c \|_{L^2}^2 + \frac{K_1^2 |\Omega|}{\beta} \tag{8}$$

对(8)式使用 Gronwall 不等式，有

$$\| c(t) \|_{L^2}^2 \leqslant \mathrm{e}^{-\beta t}\| c_0 \|_{L^2}^2 + \frac{K_1^2 |\Omega|}{\beta^2}(1 - \mathrm{e}^{-\beta t})$$

因此 $\limsup\limits_{t\to\infty}\| c(t) \|_{L^2}^2 \leqslant \dfrac{\gamma_1^2}{2}$，其中 $\gamma_1^2 = \dfrac{2K_1^2 |\Omega|}{\beta^2}$. 设 $\mathscr{B}_1$ 是 $L^2(\Omega)$ 的一个有界集，$R_{\mathscr{B}_1}$ 是 $L^2(\Omega)$ 上以零点为圆心的闭球形邻域的半径，该球形邻域包含 $\mathscr{B}_1$. 取 $t_1 = \max\left\{\dfrac{1}{\beta}\log\dfrac{R_{\mathscr{B}_1}^2}{\gamma_1^2}, 0\right\}$. 当 $t \geqslant t_1$ 时，

$$\| c(t) \|_{L^2}^2 \leqslant \gamma_1^2 \tag{9}$$

引理 6　设 $\mathscr{B}_2$ 是 $L^2(\Omega)$ 中的任一有界集，n 是从 $\mathscr{B}_2$ 中出发的方程(1)的一个解. 存在常数 $\gamma_2 > 0$ 和时间 $t_2 = t_2(\mathscr{B}_2) > 0$，当 $t \geqslant t_2$ 时，

$$\| n(t) \|_{L^2}^2 \leqslant \gamma_2^2$$

证　设 $L^2(\Omega)$ 上一球形邻域包含 $\mathscr{B}_1$，其圆心为零点，半径为 γ_1. 由引理 5 知，c 从 $L^2(\Omega)$ 的有界集出发，在时刻 t_1 后将一直在有界集 $\mathscr{B}_1$ 中. 不妨设 c 总在 $\mathscr{B}_1$ 中.

对方程(1)的两边分别与 n 作 $L^2(\Omega)$ 的内积，得到

$$\left(\frac{\partial n}{\partial t}, n\right)+(\boldsymbol{u}\cdot\nabla n, n)-(\Delta n, n)=(-\nabla\cdot(n\nabla c), n)+(f(n), n)$$

由化学浓度 c 的有界性和连续性得

$$|(c, n\Delta n)|\leqslant M(t)\int_{\Omega}|\nabla n|^{2}\mathrm{d}x\leqslant\gamma\|\nabla n\|_{L^2}^{2}$$

$$\begin{aligned}|(-\nabla\cdot(n\nabla c), n)|=&|(n\nabla c, \nabla n)|=|(\nabla c, n\nabla n)|=\\&|(c, \nabla(n\nabla n))|\leqslant\\&|(c, |\nabla n|^{2})|+|(c, n\Delta n)|\leqslant\\&\gamma\|\nabla n\|_{L^2}^{2}+\gamma\|\nabla n\|_{L^2}^{2}\leqslant\\&2\gamma\|\nabla n\|_{L^2}^{2}\end{aligned}$$

再由条件(i)可得 $f(n)\leqslant -Cn+K_1$，K_1 是一个充分大的常数，则

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|n\|_{L^2}^{2}+\|\nabla n\|_{L^2}^{2}\leqslant 2\gamma\|\nabla n\|_{L^2}^{2}-C\|n\|_{L^2}^{2}+K_1\|n\|_{L^1}$$

对 $K_1\|n\|_{L^1}$ 使用 Young 不等式得

$$K_1\|n\|_{L^1}\leqslant\frac{K_1^2|\Omega|}{2C}+\frac{C\|n\|_{L^2}^{2}}{2}$$

因此

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|n\|_{L^2}^{2}+(1-2\gamma)\|\nabla n\|_{L^2}^{2}\leqslant-\frac{C\|n\|_{L^2}^{2}}{2}+\frac{K_1^2|\Omega|}{2C}\tag{10}$$

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|n\|_{L^2}^{2}\leqslant-\frac{C\|n\|_{L^2}^{2}}{2}+\frac{K_1^2|\Omega|}{2C}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|n\|_{L^2}^{2}\leqslant -C\|n\|_{L^2}^{2}+\frac{K_1^2|\Omega|}{C}$$

由 Gronwall 不等式得

$$\|n(t)\|_{L^2}^{2}\leqslant\mathrm{e}^{-Ct}\|n_0\|_{L^2}^{2}+\frac{K_1^2|\Omega|}{C^2}(1-\mathrm{e}^{-Ct})$$

则 $\limsup\limits_{t\to\infty}\|n(t)\|_{L^2}^{2}\leqslant\dfrac{\gamma_2^2}{2}$，其中 $\gamma_2^2=\dfrac{2K_1^2|\Omega|}{C^2}$. 设 $\mathscr{B}_2$ 是 $L^2(\Omega)$ 的一个有界集，$R_{\mathscr{B}_2}$ 是 $L^2(\Omega)$ 上以零点为圆心的闭球形邻域的半径，该球形邻域包含 $R_{\mathscr{B}_2}$. 取 $t_2=\max\left\{\dfrac{1}{C}\log\dfrac{R_{\mathscr{B}_2}^2}{\gamma_2^2}, 0\right\}$. 当 $t\geqslant t_2$ 时，

$$\|n(t)\|_{L^2}^{2}\leqslant\gamma_2^2\tag{11}$$

引理 7 设 $\mathscr{B}_3$ 是 $(L_\sigma^2(\Omega))^2$ 中的任一有界集，$\boldsymbol{u}$ 是从 $\mathscr{B}_3$ 中出发的方程(3)的一个解. 存在常数 $\gamma_3>0$ 和时间 $t_3=t_3(\mathscr{B}_3)>0$，当 $t\geqslant t_3$ 时，

$$\|\boldsymbol{u}(t)\|_{L^2}^{2}\leqslant\gamma_3^2$$

证 设 $L^2(\Omega)$ 上一球形邻域包含 $\mathscr{B}_2$，其圆心为零点，半径为 γ_2，由引理 6 知，n 从 $L^2(\Omega)$ 的有界集出发，在时刻 t_1+t_2 后仍在有界集 $\mathscr{B}_2$ 中. 不妨设总在 $\mathscr{B}_2$ 中.

对方程(3)的两边分别与 $\boldsymbol{u}$ 作 $(L_\sigma^2(\Omega))^2$ 的内积，有

$$\left(\frac{\partial\boldsymbol{u}}{\partial t}, \boldsymbol{u}\right)+((\boldsymbol{u}\cdot\nabla)\boldsymbol{u}, \boldsymbol{u})-(\Delta\boldsymbol{u}, \boldsymbol{u})=(\nabla p, \boldsymbol{u})-(n\nabla\varphi, \boldsymbol{u})$$

此时压力项将会消失，得到

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|\boldsymbol{u}\|_{L^2}^{2}+\|\nabla\boldsymbol{u}\|_{L^2}^{2}=-\|n\nabla\varphi\cdot\boldsymbol{u}\|_{L^1}$$

再利用 $\|\nabla\varphi\|_{L^\infty}<C_1$ 和 Young 不等式

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|\boldsymbol{u}\|_{L^2}^{2}+\|\nabla\boldsymbol{u}\|_{L^2}^{2}\leqslant\frac{C_1^2}{2\lambda_1}\|n\|_{L^2}^{2}+\frac{\lambda_1}{2C_1^2}\|\nabla\varphi\cdot\boldsymbol{u}\|_{L^2}^{2}$$

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|\boldsymbol{u}\|_{L^2}^2+\|\nabla\boldsymbol{u}\|_{L^2}^2\leqslant\frac{C_1^2}{2\lambda_1}\|n\|_{L^2}^2+\frac{\lambda_1}{2}\|\boldsymbol{u}\|_{L^2}^2 \tag{12}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|\boldsymbol{u}\|_{L^2}^2\leqslant-\lambda_1\|\boldsymbol{u}\|_{L^2}^2+\frac{C_1^2}{\lambda_1}\|n\|_{L^2}^2$$

由(19)式

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|\boldsymbol{u}\|_{L^2}^2\leqslant-\lambda_1\|\boldsymbol{u}\|_{L^2}^2+\frac{C_1^2}{\lambda_1}\gamma_2^2$$

利用 Gronwall 不等式，

$$\|\boldsymbol{u}(t)\|_{L^2}^2\leqslant \mathrm{e}^{-\lambda_1 t}\|\boldsymbol{u}_0\|_{L^2}^2+\frac{C_1^2\gamma_2^2}{\lambda_1^2}(1-\mathrm{e}^{-\lambda_1 t})$$

则 $\limsup\limits_{t\to\infty}\|\boldsymbol{u}(t)\|_{L^2}^2\leqslant\frac{\gamma_3^2}{2}$，其中 $\gamma_3^2=\frac{2C_1^2\gamma_2^2}{\lambda_1^2}$. 设 $\mathscr{B}_3$ 是 $(L_\sigma^2(\Omega))^2$ 的一个有界集，$R_{\mathscr{B}_3}$ 是 $(L_\sigma^2(\Omega))^2$ 上以零点为圆心的闭球形邻域的半径，该球形邻域包含 $\mathscr{B}_3$. 取 $t_3=\max\left\{\frac{1}{\lambda_1}\log\frac{R_{\mathscr{B}_3}^2}{\gamma_3^2},0\right\}$. 当 $t\geqslant t_3$ 时，

$$\|\boldsymbol{u}(t)\|_{L^2}^2\leqslant\gamma_3^2 \tag{13}$$

综合(9)，(11)，(13)式可以得到在 H 上以零点为圆心，$R_{\mathscr{B}}=\gamma_1+\gamma_2+\gamma_3$ 为半径的有界闭球 $\mathscr{B}=B(0,R_{\mathscr{B}})$ 是 $(n,c,\boldsymbol{u})$ 的有界吸收集，且是正向不变的，即 H 上任意有界集 $B\subseteq B(0,R_{\mathscr{B}})$，经过时间 $t_*=t_1+t_2+t_3$ 后，$(n,c,\boldsymbol{u})$ 进入 $\mathscr{B}$ 中且不再离开. 故由引理 5－7 得到.

定理 2　方程(1)－(4) 生成的解半群 $\{S(t)\}_{t\geqslant0}$ 在空间 H 上存在正向不变的有界吸收集.

3　解半群 $\{S(t)\}_{t\geqslant 0}$ 一致渐近紧

设 $\mathscr{B}$ 是 $\{S(t)\}_{t\geqslant0}$ 在 H 中的正向不变集. 设 $(n,c,\boldsymbol{u})$ 是方程(1)－(4) 的整体解. 现证明从 $\mathscr{B}$ 出发，方程的解最终都进入 K 的有界集，从而得到解半群 $\{S(t)\}_{t\geqslant0}$ 是一致渐近紧的.

引理 8　$\forall r>0$，存在常数 $\gamma_4(r)>0$，当 $t\geqslant r$ 时，有

$$\|\nabla\boldsymbol{u}(t)\|_{L^2}^2\leqslant\gamma_4^2(r)$$

证　对(12)式从 t 到 $t+r$ 上积分，有

$$\|\boldsymbol{u}(t+r)\|_{L^2}^2+2\int_t^{t+r}\|\nabla\boldsymbol{u}(s)\|_{L^2}^2\mathrm{d}s\leqslant\lambda_1\int_t^{t+r}\|\boldsymbol{u}(s)\|_{L^2}^2\mathrm{d}s+\frac{C_1^2\gamma_2^2 r}{\lambda_1}+\|\boldsymbol{u}(t)\|_{L^2}^2$$

$$\int_t^{t+r}\|\nabla\boldsymbol{u}(s)\|_{L^2}^2\mathrm{d}s\leqslant\frac{\lambda_1}{2}\int_t^{t+r}\|\boldsymbol{u}(s)\|_{L^2}^2\mathrm{d}s+\frac{r\gamma_2^2C_1^2}{2\lambda_1}+\frac{1}{2}\|\boldsymbol{u}(t)\|_{L^2}^2$$

$$\int_t^{t+r}\|\nabla\boldsymbol{u}(s)\|_{L^2}^2\mathrm{d}s\leqslant\frac{\gamma_3^2}{2}\lambda_1 r+\frac{r\gamma_2^2C_2^2}{2\lambda_1}=M_1(r) \tag{14}$$

让方程(3) 在 Ω 上与 $-\Delta\boldsymbol{u}$ 作内积，得

$$\left(\frac{\partial\boldsymbol{u}}{\partial t},-\Delta\boldsymbol{u}\right)+((\boldsymbol{u}\cdot\nabla)\boldsymbol{u},-\Delta\boldsymbol{u})-(\Delta\boldsymbol{u},-\Delta\boldsymbol{u})=(\nabla p,-\Delta\boldsymbol{u})-(n\nabla\varphi,-\Delta\boldsymbol{u})$$

$$\left(\frac{\partial\boldsymbol{u}}{\partial t},-\Delta\boldsymbol{u}\right)-(\Delta\boldsymbol{u},-\Delta\boldsymbol{u})=((\boldsymbol{u}\cdot\nabla)\boldsymbol{u},\Delta\boldsymbol{u})+(\nabla p,-\Delta\boldsymbol{u})-(n\nabla\varphi,-\Delta\boldsymbol{u})$$

利用引理 4 和 Young 不等式

$$((\boldsymbol{u}\cdot\nabla)\boldsymbol{u},\Delta\boldsymbol{u})\leqslant C_2\|\boldsymbol{u}\|_{L^2}^{\frac{1}{2}}\|\nabla\boldsymbol{u}\|_{L^2}\|\Delta\boldsymbol{u}\|_{L^2}^{\frac{3}{2}}\leqslant$$

$$\frac{1}{4}\|\Delta\boldsymbol{u}\|_{L^2}^2+\frac{27C_2^4}{4}\|\boldsymbol{u}\|_{L^2}^2\|\nabla\boldsymbol{u}\|_{L^2}^4$$

再利用(13)式可得

$$((\boldsymbol{u}\cdot\nabla)\boldsymbol{u},\Delta\boldsymbol{u})\leqslant\frac{1}{4}\|\Delta\boldsymbol{u}\|_{L^2}^2+\frac{27C_2^4\gamma_3^2}{4}\|\nabla\boldsymbol{u}\|_{L^2}^4 \tag{15}$$

由 Young 不等式和 $\|\nabla\varphi\|_{L^\infty}\leqslant C_1$

$$
\begin{aligned}
(n\nabla\varphi,\ \Delta\boldsymbol{u}) \leqslant& \frac{1}{4}\ \|\Delta\boldsymbol{u}\|_{L^2}^2 + \|n\nabla\varphi\|_{L^2}^2 \leqslant \\
& \frac{1}{4}\ \|\Delta\boldsymbol{u}\|_{L^2}^2 + C_1^2\ \|n\|_{L^2}^2
\end{aligned}
\tag{16}
$$

由(15),(16)式得

$$
\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\ \|\nabla\boldsymbol{u}\|_{L^2}^2 + \frac{1}{2}\ \|\Delta\boldsymbol{u}\|_{L^2}^2 \leqslant \frac{27C_2^4\gamma_3^2}{4}\ \|\nabla\boldsymbol{u}\|_{L^2}^4 + C_1^2\ \|n\|_{L^2}^2
$$

$$
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\ \|\nabla\boldsymbol{u}\|_{L^2}^2 + \|\Delta\boldsymbol{u}\|_{L^2}^2 \leqslant \frac{27C_2^4\gamma_3^2}{2}\ \|\nabla\boldsymbol{u}\|_{L^2}^4 + 2C_1^2\ \|n\|_{L^2}^2
$$

根据(11)式得

$$
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\ \|\nabla\boldsymbol{u}\|_{L^2}^2 + \|\Delta\boldsymbol{u}\|_{L^2}^2 \leqslant \frac{27C_2^4\gamma_3^2}{2}\ \|\nabla\boldsymbol{u}\|_{L^2}^4 + 2C_1^2\gamma_2^2
$$

$$
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\ \|\nabla\boldsymbol{u}\|_{L^2}^2 \leqslant \frac{27C_2^4\gamma_3^2}{2}\ \|\nabla\boldsymbol{u}\|_{L^2}^4 + 2C_1^2\gamma_2^2
$$

其中设$\int_t^{t+r}\frac{27C_2^4\gamma_3^2}{2}\ \|\nabla\boldsymbol{u}(s)\|_{L^2}^2\mathrm{d}s = a_1$,$\int_t^{t+r}2C_1^2\gamma_2^2\mathrm{d}s = a_2$,$\int_t^{t+r}\ \|\nabla\boldsymbol{u}(s)\|_{L^2}^2\mathrm{d}s = a_3$,又由(14)式可以得到 $a_1 = \frac{27C_2^4\gamma_3^2}{2}M_1(r)$,$a_2 = 2C_1^2\gamma_2^2 r$,$a_3 = M_1(r)$,再使用一致 Gronwall 引理,得

$$
\|\nabla\boldsymbol{u}(t+r)\|_{L^2}^2 \leqslant \left(\frac{a_3}{r} + a_2\right)\exp(a_1) = \gamma_4^2(r)
$$

这意味着对所有的 $t \geqslant r$,

$$
\|\nabla\boldsymbol{u}(t)\|_{L^2}^2 \leqslant \gamma_4^2(r) \tag{17}
$$

引理 9 $\forall r > 0$,存在常数 $\gamma_5(r) > 0$,当 $t \geqslant r$ 时,有

$$
\|\nabla c(t)\|_{L^2}^2 \leqslant \gamma_5^2(r)
$$

证 将(7)式从 t 到 $t+r$ 上积分,有

$$
\int_t^{t+r}\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\ \|c(s)\|_{L^2}^2\mathrm{d}s + \int_t^{t+r}\ \|\nabla c(s)\|_{L^2}^2\mathrm{d}s \leqslant \frac{K_1^2\ |\Omega|\ r}{2\beta} + \left(\lambda_1 - \frac{\beta}{2}\right)\int_t^{t+r}\ \|c(s)\|_{L^2}^2\mathrm{d}s
$$

$$
\int_t^{t+r1}\ \|\nabla c(s)\|_{L^2}^2\mathrm{d}s \leqslant \frac{K_1^2\ |\Omega|\ r}{2\beta} + \left(\lambda_1 - \frac{\beta}{2}\right)\gamma_1^2 r + \frac{1}{2}\ \|c(t)\|_{L^2}^2
$$

$$
\int_t^{t+r}\ \|\nabla c(s)\|_{L^2}^2\mathrm{d}s \leqslant \frac{K_1^2\ |\Omega|\ r}{2\beta} + \left(\lambda_1 - \frac{\beta}{2}\right)\gamma_1^2 r + \frac{\gamma_1^2}{2} = M_2(r) \tag{18}
$$

让方程(2)在 Ω 上与 $-\Delta c$ 作内积得

$$
\left(\frac{\partial c}{\partial t},\ -\Delta c\right) + (\boldsymbol{u}\cdot\nabla c,\ -\Delta c) - (\Delta c,\ -\Delta c) = (-nc,\ -\Delta c) + (g(c),\ -\Delta c)
$$

$$
\left(\frac{\partial c}{\partial t},\ -\Delta c\right) - (\Delta c,\ -\Delta c) = (\boldsymbol{u}\cdot\nabla c,\ \Delta c) + (nc,\ \Delta c) + (g(c),\ -\Delta c)
$$

利用 Young 不等式、Hölder 不等式和引理 3 得

$$
\begin{aligned}
(\boldsymbol{u}\cdot\nabla c,\ \Delta c) \leqslant& \frac{1}{4}\ \|\Delta c\|_{L^2}^2 + \|\boldsymbol{u}\cdot\nabla c\|_{L^2}^2 \leqslant \\
& \frac{1}{4}\ \|\Delta c\|_{L^2}^2 + \|\boldsymbol{u}\|_{L^4}^2\ \|\nabla c\|_{L^4}^2 \leqslant \\
& \frac{1}{4}\ \|\Delta c\|_{L^2}^2 + C_3\ \|\nabla\boldsymbol{u}\|_{L^2}^2\ \|\Delta c\|_{L^2}^2
\end{aligned}
$$

由(17)式可得

$$
(\boldsymbol{u}\cdot\nabla c,\ \Delta c) \leqslant \frac{1}{2}\ \|\Delta c\|_{L^2}^2 + C_3 \tag{19}
$$

这里 C_3 是一个充分大的正常数. 由条件(ii) 和 c 在 $\overline{\Omega}\times(0,\infty)$ 上的连续性知，存在 $\xi\in\overline{\Omega}$，使得

$$(g(c),-\Delta c)=\left(\frac{g(c)-g(0)}{c}\cdot c,-\Delta c\right)=$$

$$\frac{g(c(\xi))-g(0)}{c(\xi)}(c,-\Delta c)\leqslant$$

$$\lambda_1\ \|\nabla c\|_{L^2}^2 \tag{20}$$

由 $n(x,t)\in[0,\infty)$ 并且是关于空间 $x\in\overline{\Omega}$ 的连续函数，有 $m(t)=\inf\limits_{x\in\Omega}n(x,t)\geqslant 0$，则

$$(nc,\Delta c)=\int_\Omega nc\cdot\Delta c\,\mathrm{d}x\leqslant -m(t)\int_\Omega|\nabla c|^2\mathrm{d}x\leqslant 0$$

结合(19)－(20) 式得到如下不等式

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|\nabla c\|^2+\|\Delta c\|^2\leqslant\lambda_1\|\nabla c\|^2+\frac{1}{2}\|\Delta c\|^2+C_3$$

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|\nabla c\|_{L^2}^2+\frac{1}{2}\|\Delta c\|_{L^2}^2\leqslant\lambda_1\|\nabla c\|_{L^2}^2+C_3$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|\nabla c\|_{L^2}^2+\|\Delta c\|_{L^2}^2\leqslant 2\lambda_1\|\nabla c\|_{L^2}^2+2C_3$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}(s\|\nabla c(t+s)\|_{L^2}^2)\leqslant\|\nabla c(t+s)\|_{L^2}^2+2\lambda_1 s\|\nabla c(t+s)\|_{L^2}^2+2C_3 s \tag{21}$$

对(21) 式从 0 到 r 上积分

$$\int_0^r\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}(s\|\nabla c(t+s)\|_{L^2}^2)\mathrm{d}s\leqslant\int_0^r\|\nabla c(t+s)\|_{L^2}^2\mathrm{d}s+2\int_0^r\lambda_1 s\|\nabla c(t+s)\|_{L^2}^2\mathrm{d}s+C_3r^2$$

$$r\|\nabla c(t+r)\|_{L^2}^2\leqslant(2\lambda_1 r+1)\int_t^{t+r}\|\nabla c(s)\|_{L^2}^2\mathrm{d}s+C_3r^2$$

由(18) 式得

$$r\|\nabla c(t+r)\|_{L^2}^2\leqslant(2\lambda_1 r+1)M_2(r)+C_3r^2$$

$$r\|\nabla c(t+r)\|_{L^2}^2\leqslant M_2(r)$$

$$\|\nabla c(t+r)\|_{L^2}^2\leqslant\frac{M_2(r)}{r}=\gamma_5^2(r)$$

这意味着对所有的 $t\geqslant r$

$$\|\nabla c(t)\|_{L^2}^2\leqslant\gamma_5^2(r) \tag{22}$$

引理 10　$\forall r>0$，存在常数 $\gamma_6(r)>0$，当 $t\geqslant r$ 时，有

$$\|\nabla n(t)\|_{L^2}^2\leqslant\gamma_6^2(r)$$

证　对(10) 式从 t 到 $t+r$ 上积分，有

$$\int_t^{t+r}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|n(s)\|_{L^2}^2\mathrm{d}s+2(1-2\gamma)\int_t^{t+r}\|\nabla n(s)\|_{L^2}^2\mathrm{d}s+C\int_t^{t+r}\|n(s)\|_{L^2}^2\mathrm{d}s\leqslant\int_t^{t+r}\frac{K_1^2|\Omega|}{C}\mathrm{d}s$$

由(11) 式可得

$$\int_t^{t+r}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|n(s)\|_{L^2}^2\mathrm{d}s+2(1-2\gamma)\int_t^{t+r}\|\nabla n(s)\|_{L^2}^2\mathrm{d}s\leqslant\frac{K_1^2|\Omega|}{C}r$$

$$\int_t^{t+r}\|\nabla n(s)\|_{L^2}^2\mathrm{d}s\leqslant\frac{K_1^2|\Omega|}{2C(1-2\gamma)}r+\frac{\|n(t)\|_{L^2}^2}{2(1-2\gamma)}$$

$$\int_t^{t+r}\|\nabla n(s)\|_{L^2}^2\mathrm{d}s\leqslant\frac{K_1^2|\Omega|}{2C(1-2\gamma)}r+\frac{\gamma_2^2}{2(1-2\gamma)}=M_3(r) \tag{23}$$

让方程(1) 在 Ω 上与 $-\Delta n$ 作内积

$$\left(\frac{\partial n}{\partial t},-\Delta n\right)+(\boldsymbol{u}\cdot\nabla n,-\Delta n)-(\Delta n,-\Delta n)=(-\nabla\cdot(n\nabla c),-\Delta n)+(f(n),-\Delta n)$$

$$\left(\frac{\partial n}{\partial t},-\Delta n\right)-(\Delta n,-\Delta n)=(\boldsymbol{u}\cdot\nabla n,\Delta n)+(\nabla\cdot(n\Delta c),\Delta n)+(f(n),-\Delta n)$$

利用 Young 不等式、Hölder 不等式和引理 3

$$\begin{aligned}|(\boldsymbol{u}\cdot\nabla n,\Delta n)|\leqslant&\frac{1}{4}\|\Delta n\|_{L^2}^2+\|\boldsymbol{u}\cdot\nabla n\|_{L^2}^2\leqslant\\&\frac{1}{4}\|\Delta n\|_{L^2}^2+\|\boldsymbol{u}\|_{L^4}^2\|\nabla n\|_{L^4}^2\leqslant\\&\frac{1}{4}\|\Delta n\|_{L^2}^2+C_4\|\nabla\boldsymbol{u}\|_{L^2}^2\|\Delta n\|_{L^2}^2\end{aligned}\tag{24}$$

由(17)和(24)式可得

$$\begin{aligned}|(\boldsymbol{u}\cdot\nabla n,\Delta n)|\leqslant&\frac{1}{4}\|\Delta n\|_{L^2}^2+\frac{1}{4}\|\Delta n\|_{L^2}^2+C_4\leqslant\\&\frac{1}{2}\|\Delta n\|_{L^2}^2+C_4\end{aligned}\tag{25}$$

这里 C_4 是一个充分大的正常数.

$$\begin{aligned}|(\nabla\cdot(n\nabla c),\Delta n)|=&|((n\nabla c),\nabla\Delta n)|=\\&|(\nabla c,n\nabla\Delta n)|=|(c,\nabla(n\nabla\Delta n))|\leqslant\\&|(c,\nabla n\nabla\Delta n)|+|(c,n\Delta^2 n)|\leqslant\\&\gamma\|\Delta n\|_{L^2}^2+\gamma\|\Delta n\|_{L^2}^2=\\&2\gamma\|\Delta n\|_{L^2}^2\end{aligned}\tag{26}$$

由条件(i)和 n 在 $\overline{\Omega}\times(0,\infty)$ 上的连续性知,存在 $\zeta\in\overline{\Omega}$,使得

$$\begin{aligned}(f(n),-\Delta n)=&\left(\frac{f(n)-f(0)}{n}\cdot n,-\Delta n\right)=\\&\frac{f(n(\zeta))-f(0)}{n(\zeta)}\cdot(n,-\Delta n)=\\&\frac{f(n(\zeta))}{n(\zeta)}\cdot(n,-\Delta n)\leqslant\\&-C\|\nabla n\|_{L^2}^2\end{aligned}\tag{27}$$

由(25)-(27)式可得

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|\nabla n\|_{L^2}^2+\|\Delta n\|_{L^2}^2\leqslant2\gamma\|\Delta n\|_{L^2}^2+\frac{1}{2}\|\Delta n\|_{L^2}^2-C\|\nabla n\|_{L^2}^2+C_4$$

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|\nabla n\|_{L^2}^2+(\frac{1}{2}-2\gamma)\|\Delta n\|_{L^2}^2+C\|\nabla n\|_{L^2}^2\leqslant C_4$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|\nabla n\|_{L^2}^2+(1-4\gamma)\|\Delta n\|_{L^2}^2+2C\|\nabla n\|_{L^2}^2\leqslant2C_4$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|\nabla n\|_{L^2}^2\leqslant2C_4$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}(s\|\nabla n(t+s)\|_{L^2}^2)\leqslant\|\nabla n(t+s)\|_{L^2}^2+2C_4s\tag{28}$$

对(28)式从 0 到 r 积分,得

$$\int_0^r\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}(s\|\nabla n(t+s)\|_{L^2}^2)\mathrm{d}s\leqslant\int_0^r\|\nabla n(t+s)\|_{L^2}^2\mathrm{d}s+C_4r^2$$

$$r\|\nabla n(t+r)\|_{L^2}^2\leqslant\int_t^{t+r}\|\nabla n(s)\|_{L^2}^2\mathrm{d}s+C_4r^2$$

由(23)式得

$$r\|\nabla n(t+r)\|_{L^2}^2\leqslant M_3(r)+C_4r^2$$

$$\| \nabla n(t+r) \|_{L^2}^2 \leqslant \frac{M_3(r)}{r} = \gamma_6^2(r)$$

这意味着对所有的 $t \geqslant r$，

$$\| \nabla n(t) \|_{L^2}^2 \leqslant \gamma_6^2(r) \tag{29}$$

定理 3　方程(1)－(4) 生成的解半群$\{S(t)\}_{t\geqslant 0}$ 是一致渐近紧的.

证　设 K 上以零点为圆心，$R_M=\gamma_4+\gamma_5+\gamma_6$ 为半径的有界闭球 $M=B(0, R_M)$. 由引理 8、引理 9 和引理 10 知$(n, c, \boldsymbol{u})$ 从 H 中的正向不变集 $\mathscr{B}$ 出发，经过时间 r 后，进入 K 中的有界集 M. 而 K 紧嵌入到 H 中，从而得到解半群$\{S(t)\}_{t\geqslant 0}$ 在 H 中是一致渐近紧的. 证毕.

由定理 2 和定理 3 以及引理 1 得到方程(1)－(4) 在 H 上存在紧的全局吸引子.

参考文献：

[1] PATLAK C S. Random Walk with Persistence and External Bias [J]. The Bulletin of Mathematical Biophysics，1953，15(3)：311-338.

[2] KELLER E F，SEGEL L A. Initiation of Slime Mold Aggregation Viewed as an Instability [J]. Journal of Theoretical Biology，1970，26(3)：399-415.

[3] OSAKI K，TSUJIKAWA T，YAGI A，et al. Exponential Attractor for a Chemotaxis-Growth System of Equations [J]. Nonlinear Analysis：Theory，Methods & Applications，2002，51(1)：119-144.

[4] ZHANG Q，ZHENG X X. Global Well-Posedness for the Two-Dimensional Incompressible Chemotaxis-Navier——Stokes Equations [J]. SIAM Journal on Mathematical Analysis，2014，46(4)：3078-3105.

[5] LI Y X，ZHANG Q S. Convergence Rates of Solutions for a Two-Dimensional Chemotaxis-Navier-Stokes System [J]. Discrete and Continuous Dynamical Systems - Series B，2015，20(8)：2751-2759.

[6] PENG Y P，XIANG Z Y. Global Existence and Convergence Rates to a Chemotaxis-Fluids System with Mixed Boundary Conditions [J]. Journal of Differential Equations，2019，267(2)：1277-1321.

[7] WINKLER M. Global Weak Solutions in a Three-Dimensional Chemotaxis-Navier-Stokes System [J]. Annales De l'Institut Henri Poincaré C，Analyse Non Linéaire，2016，33(5)：1329-1352.

[8] DUAN R J，LI X，XIANG Z Y. Global Existence and Large Time Behavior for a Two-Dimensional Chemotaxis-Navier-Stokes System [J]. Journal of Differential Equations，2017，263(10)：6284-6316.

[9] LI X，XIAO Y J. Global Existence and Boundedness in a 2D Keller-Segel-Stokes System [J]. Nonlinear Analysis：Real World Applications，2017，37：14-30.

[10] YU M L，LIU M，LUO H. The Global Existence of Weak Solution to Coupled Chemotaxis NS System [J]. 应用数学，2019，32(1)：183-194.

[11] BRAUKHOFF M，TANG B Q. Global Solutions for Chemotaxis-Navier-Stokes System with Robin Boundary Conditions [J]. Journal of Differential Equations，2020，269(12)：10630-10669.

[12] WU J，WU C Y. A Note on the Global Existence of a Two-Dimensional Chemotaxis-Navier-Stokes System [J]. Applicable Analysis，2019，98(7)：1224-1235.

[13] TEMAM R. Infinite-Dimensional Dynamical Systems in Mechanics and Physics [M]. New York：Springer，1997.

[14] WINKLER M. Stabilization in a Two-Dimensional Chemotaxis-Navier-Stokes System [J]. Archive for Rational Mechanics and Analysis，2014，211(2)：455-487.

[15] AIDA M，YAGI A. Global Attractor for Approximate System of Chemotaxis and Growth [J]. Dynamical Continuous Discrete Impulse Systems，2003，10(1)：309 -315.

[16] EVANS L C. Partial Differential Equations[M]. Providence：American Mathematical Society，1998.

责任编辑　张枸