

非线性时间分数阶 Klein-Gordon 方程 的精确行波解^①

张练, 刘小华, 曾职云

贵州民族大学 数据科学与信息工程学院, 贵阳 550025

摘要: 利用分数复变换将非线性时间分数阶 Klein-Gordon 方程转化为等价的非线性常微分方程; 利用平面动力系统理论和方法给出了 Klein-Gordon 方程存在 4 个钟状孤波解、4 个扭状孤波解和无穷多个周期解; 通过辅助方程法给出了时间分数阶 Klein-Gordon 方程的 4 个扭状孤波解和周期解的精确表达式.

关键词: 平面动力系统理论; 时间分数阶 Klein-Gordon 方程; 辅助方程法; 精确解

中图分类号: O175.29

文献标志码: A

文章编号: 1000-5471(2022)03-0036-08

Exact Traveling Wave Solutions for Nonlinear Time-Fractional Order Klein-Gordon Equation

ZHANG Lian, LIU Xiaohua, ZENG Zhiyun

School of Data Science and Information Engineering, Guizhou Minzu University, Guiyang 550025, China

Abstract: By means of fractional complex transformation, the nonlinear time-fractional order *Klein-Gordon* equation has been transformed into an equivalent nonlinear ordinary differential equation. Four bell-shaped solitary wave solutions, four kink-shaped solitary wave solutions and infinite periodic wave solutions of the *Klein-Gordon* equation have been given in the theory and method of planer dynamical system. And the exact expressions of the four kink-shaped solitary and periodic wave solutions of the time fractional order *Klein-Gordon* equation been given in the auxiliary equation method.

Key words: theory of planer dynamical system; time-fractional order *Klein-Gordon* equation; auxiliary equation method; exact solution

分数阶微分方程具有广泛而丰富的应用背景, 在物理学、生物学、流体力学、量子力学、通信工程、生物医学等诸多领域涌现出一些非常重要的非线性分数阶微分方程, 如描述随机游走的分数阶扩散方程^[1], 描述 Lévy 型的量子力学路径的分数阶 Schrödinger 方程^[2]. 最近, 分数阶微分方程的行波解引起许多学者的注意, 有不少研究人员对此提出许多行之有效的方法, 如: Backlund 变换法^[3]、Jacobi 椭圆函数展开

① 收稿日期: 2020-11-16

基金项目: 贵州省科学技术厅项目([2019]1162).

作者简介: 张练, 硕士研究生, 主要从事微分方程及其应用研究.

通信作者: 刘小华, 教授.

法^[4]、Riccati-展开法^[5]、Kudryashov-展开法^[6]、 $\frac{G'}{G}$ -展开法^[7-8]等. 已有学者利用辅助方程法^[9-10]得到了多个方程的新精确解, 本文采用辅助方程法考虑非线性时间分数阶 Klein-Gordon 方程^[11]

$$\frac{\partial^{2\theta} u(x, t)}{\partial t^{2\theta}} = \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} + \beta u(x, t) + \gamma u(x, t)^3, t > 0, 0 < \theta < 1 \quad (1)$$

的精确行波解, 其中 β, γ 是任意非零常数.

对于方程(1)的精确解目前已有学者展开了一些讨论, 如文献[12]运用扩展的 $\frac{G'}{G}$ -展开法得出了方程(1)的三角函数型解、双曲函数型解; 文献^[6]运用广义 Kudryashov-展开法得到了方程(1)的一些精确解; 文献^[13]运用奇异流形法得出方程(1)的部分扭状解; 文献^[14]运用改进的 Kudryashov-展开法得到了方程(1)的一些新精确解. 本文通过辅助方程法来探究时间分数阶 Klein-Gordon 方程的行波解, 运用该方法得到了方程(1)的新精确解, 通过定性分析所得解的类型与通过辅助方程法求得解的类型结果一致, 并对解进行简要分析. 本文先对方程(1)进行分数复变换, 将其转化为常微分方程, 然后化为与之等价的平面动力系统, 利用平面动力系统理论与方法对其有界行波解的性态、个数进行定性分析, 给出行波解的存在性, 最后利用辅助方程法得出方程(1)行波解的一些精确表达式.

1 方程(1)有界行波解的存在性

对(1+1)维非线性时间分数阶 Klein-Gordon 方程(1)做如下的分数复变换^[15]

$$u(x, t) = u(\xi), \xi = lx - \frac{\lambda t^\theta}{\Gamma(1+\theta)} \quad (2)$$

其中 l, λ 是任意非零常数, Γ 为伽马函数, 则可将方程(1)转化为方程

$$u_{\xi\xi} - \frac{\beta}{\lambda^2 - l^2} u - \frac{\gamma}{\lambda^2 - l^2} u^3 = 0, \lambda^2 \neq l^2 \quad (3)$$

其中 $u_{\xi\xi} = \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}$. 下面对方程(3)进行定性分析. 假设 $u_\xi = y$, 方程(3)等价于如下平面动力系统

$$\begin{cases} \frac{du}{d\xi} = y \\ \frac{dy}{d\xi} = \frac{\beta}{\lambda^2 - l^2} u + \frac{\gamma}{\lambda^2 - l^2} u^3 \end{cases} \quad (4)$$

对系统(4)进行首次积分

$$H(u, y) = \frac{1}{2} y^2 - \frac{\beta}{2(\lambda^2 - l^2)} u^2 - \frac{\gamma}{4(\lambda^2 - l^2)} u^4 = h \quad (5)$$

再令

$$f(u) = \beta u + \gamma u^3 = 0 \quad (6)$$

可得 $u_1 = 0$, $u_{2,3} = \pm \sqrt{-\frac{\beta}{\gamma}}$ (其中 $\frac{\beta}{\gamma} < 0$). 从而当 $\frac{\beta}{\gamma} \geq 0$ 时, 系统(4)只有 1 个平衡点 $(u_1, 0)$. 当 $\frac{\beta}{\gamma} < 0$ 时, 系统(4)有平衡点 $(u_1, 0)$ 与 $(u_{2,3}, 0)$, 在平衡点 $(u_i, 0)$, $i = 1, 2, 3$ 处的 Jacobi 矩阵行列式为

$$J(u_i, 0) = -\frac{1}{\lambda^2 - l^2} (\beta + 3\gamma u_i^2), i = 1, 2, 3 \quad (7)$$

根据平面动力系统理论^[16-17]可知, 如果 $J(u_i, 0) < 0$ 则为鞍点, 如果 $J(u_i, 0) > 0$ 则为中心, 如果 $J(u_i, 0) = 0$ 则为尖点, 因此对于系统(4)有:

1) 当 $\beta\gamma < 0$, $\lambda^2 - l^2 > 0$ 时, 将平衡点 $(u_1, 0)$, $(u_{2,3}, 0)$ 代入(7)式知 $J(u_1, 0) = -\frac{\beta}{\lambda^2 - l^2}$, $J(u_{2,3}, 0) = \frac{2\beta}{\lambda^2 - l^2}$, 从而可知: 平衡点 $(u_1, 0)$ 在 $\beta > 0$ 时为鞍点, 在 $\beta < 0$ 时为中心; 平衡点 $(u_{2,3}, 0)$ 在 $\beta > 0$ 时为中心, 在 $\beta < 0$ 时为鞍点.

2) 当 $\beta\gamma \geq 0, \lambda^2 - l^2 > 0$ 时, 将平衡点 $(u_1, 0)$ 代入(7)式知 $J(u_1, 0) = -\frac{\beta}{\lambda^2 - l^2}$, 从而可知平衡点 $(u_1, 0)$ 在 $\beta > 0$ 时为鞍点, 在 $\beta < 0$ 时为中心.

3) 当 $\beta\gamma < 0, \lambda^2 - l^2 < 0$ 时, 平衡点 $(u_1, 0), (u_{2,3}, 0)$ 对应的 Jacobi 矩阵行列式分别为

$$J(u_1, 0) = -\frac{\beta}{\lambda^2 - l^2}, J(u_{2,3}, 0) = \frac{2\beta}{\lambda^2 - l^2}$$

从而可知平衡点 $(u_1, 0)$ 在 $\beta > 0$ 时为中心, 在 $\beta < 0$ 时为鞍点; 平衡点 $(u_{2,3}, 0)$ 在 $\beta > 0$ 时为鞍点, 在 $\beta < 0$ 时为中心.

4) 当 $\beta\gamma \geq 0, \lambda^2 - l^2 < 0$ 时, 平衡点 $u_1(0, 0)$ 对应的 Jacobi 矩阵行列式为 $J(u_1, 0) = -\frac{\beta}{\lambda^2 - l^2}$, 从而可知平衡点 $(u_1, 0)$ 在 $\beta > 0$ 时为中心, 在 $\beta < 0$ 时为鞍点.

根据上面的奇点分析, 利用 Maple 软件画出系统(4)在不同参数条件下的相图见图 1.

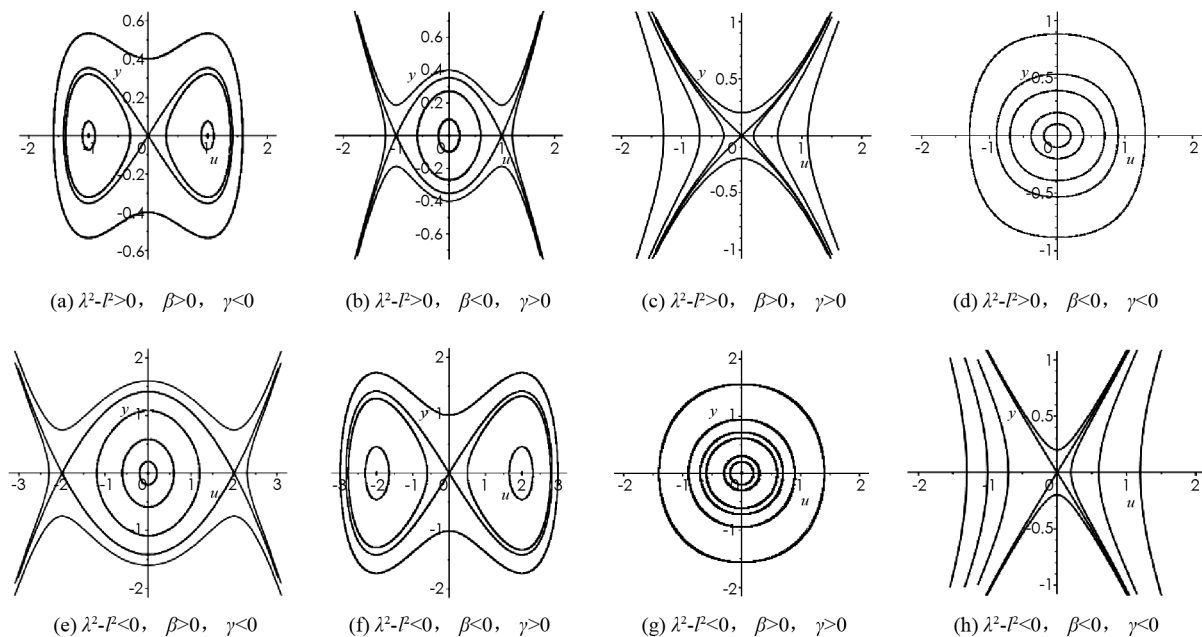


图 1 系统(4)在不同参数条件下的相图

由平面动力系统理论与方法^[16-17]可知, 同宿轨对应着方程(3)的钟状孤波解, 异宿轨对应着方程(3)的扭状孤波解, 闭轨对应着方程(3)的周期解. 因此根据相图 1 中的(a) — (h), 可得出方程(3)的有界行波解的个数及存在性结论为:

1) 系统(4)在 $\lambda^2 - l^2 > 0, \beta > 0, \gamma < 0$ 时存在两条同宿轨, 无穷多个闭轨, 从而方程(3)存在两个钟状孤波解和无穷多个周期解(图 1(a)).

2) 系统(4)在 $\lambda^2 - l^2 > 0, \beta < 0, \gamma > 0$ 时存在两条异宿轨, 无穷多个闭轨, 从而方程(3)存在两个扭状孤波解和无穷多个周期解(图 1(b)).

3) 系统(4)在 $\lambda^2 - l^2 > 0, \beta > 0, \gamma > 0$ 时不存在闭轨(图 1(c)).

4) 系统(4)在 $\lambda^2 - l^2 > 0, \beta < 0, \gamma < 0$ 时存在无穷多个闭轨, 从而方程(3)存在无穷多个周期解(图 1(d)).

5) 系统(4)在 $\lambda^2 - l^2 < 0, \beta > 0, \gamma < 0$ 时存在两条异宿轨, 无穷多个闭轨, 从而方程(3)存在两个扭状孤波解和无穷多个周期解(图 1(e)).

6) 系统(4)在 $\lambda^2 - l^2 < 0, \beta < 0, \gamma > 0$ 时存在两条同宿轨, 无穷多个闭轨, 从而方程(3)存在两个钟状孤波解和无穷多个周期解(图 1(f)).

7) 系统(4)在 $\lambda^2 - l^2 < 0, \beta > 0, \gamma > 0$ 时存在无穷多个闭轨, 从而方程(3)存在无穷多个周期解(图 1(g)).

8) 系统(4) 在 $\lambda^2 - l^2 < 0, \beta < 0, \gamma < 0$ 时不存在闭轨(图 1(h)).

由上面的定性分析可知, 方程(3) 存在 4 个钟状孤波解、4 个扭状孤波解和无穷多个周期波解, 下面运用辅助方程法讨论方程(1) 的一些有界行波解的精确表达式.

2 辅助方程法

运用辅助方程法求解非线性发展方程的精确解是十分有效的, 本文运用的辅助方程法是 Khater 博士在 2018 年所提出并改进的, 辅助方程法的具体步骤如下^[9-10]:

考虑如下的非线性偏微分方程:

$$P(u, u_t, u_x, u_{tt}, u_{xx}, u_{xt}, \dots) = 0 \quad (8)$$

其中 $u(x, t)$ 是未知函数, 且 P 是包含 $u(x, t)$ 及其各导数的多项式函数.

步骤 1: 对方程(8) 做行波变换 $u(x, t) = u(\xi)$, $\xi = lx - \lambda t$, 其中 l, λ 是任意非零常数, 即方程(8) 可化为如下的常微分方程:

$$F(u, -\lambda u', lu', \lambda^2 u'', l^2 u'', -\lambda lu'', \dots) = 0 \quad (9)$$

其中 $\left(\frac{du}{d\xi} = u', \frac{d^2 u}{d\xi^2} = u'', \dots\right)$, F 是包含 $u(x, t)$ 及其各导数的多项式函数.

步骤 2: 假设常微分方程(9) 的解具有如下形式:

$$u(\xi) = \sum_{i=0}^n a_i a^{if(\xi)} + \sum_{i=1}^n b_i a^{-if(\xi)} \quad (10)$$

其中 $a_i, b_i (i=0, 1, 2, \dots, n)$ 为待定系数, n 由齐次平衡原则确定, $f(\xi)$ 满足如下常微分方程

$$f'(\xi) = \frac{1}{\ln a} (\delta a^{f(\xi)} + \vartheta + \alpha a^{-f(\xi)}) \quad (11)$$

其中 $\alpha, \vartheta, \delta, a$ 是非零常数且 $a > 0, a \neq 1$.

步骤 3: 将方程(10), (11) 代入方程(9), 合并 $a^{\pm if(\xi)}$, $i=0, 1, 2, \dots, n$ 的各次幂系数, 并令各次幂系数等于零, 得到关于 $a_0, a_i, b_i, l, \lambda (i=1, 2, \dots, n)$ 的代数方程组, 结合 Maple 软件求解代数方程组, 可得 $a_0, a_i, b_i, l, \lambda (i=1, 2, \dots, n)$ 的值.

步骤 4: 通过方程(11) 的解和步骤 3 的值, 由假设(10) 得出方程(9) 的解, 进而可获得方程(8) 行波解的精确表达式.

方程(11) 的解有如下 3 种情形:

情形 1: 如果 $\vartheta^2 - 4\alpha\delta > 0$ 且 $\delta \neq 0$, 那么有

$$\begin{aligned} a^{f(\xi)} &= -\frac{\vartheta}{2\delta} - \frac{\sqrt{\vartheta^2 - 4\alpha\delta}}{2\delta} \tanh\left(\frac{\sqrt{\vartheta^2 - 4\alpha\delta}}{2} \xi\right) \\ a^{f(\xi)} &= -\frac{\vartheta}{2\delta} - \frac{\sqrt{\vartheta^2 - 4\alpha\delta}}{2\delta} \coth\left(\frac{\sqrt{\vartheta^2 - 4\alpha\delta}}{2} \xi\right) \end{aligned} \quad (12)$$

情形 2: 如果 $\vartheta^2 - 4\alpha\delta < 0$ 且 $\delta \neq 0$, 那么有

$$\begin{aligned} a^{f(\xi)} &= -\frac{\vartheta}{2\delta} + \frac{\sqrt{-\vartheta^2 + 4\alpha\delta}}{2\delta} \tan\left(\frac{\sqrt{-\vartheta^2 + 4\alpha\delta}}{2} \xi\right) \\ a^{f(\xi)} &= -\frac{\vartheta}{2\delta} + \frac{\sqrt{-\vartheta^2 + 4\alpha\delta}}{2\delta} \cot\left(\frac{\sqrt{-\vartheta^2 + 4\alpha\delta}}{2} \xi\right) \end{aligned} \quad (13)$$

情形 3: 如果 $\vartheta^2 = 4\alpha\delta$ 且 $\delta \neq 0$, 那么有

$$a^{f(\xi)} = -\frac{\vartheta\xi + 2}{2\delta\xi} \quad (14)$$

3 方程(1) 行波解的精确表达式

下面利用辅助方程法来讨论方程(1) 的有界行波解, 通过该方法得出了方程(1) 的两组不同参数的解,

则具体根据方程(3)的最高阶导数项 $u''(\xi)$ 与最高阶非线性项 $u^3(\xi)$ 的平衡原则, 有 $n+2=3n$ 得 $n=1$, 根据上述方法可设方程(3)的解具有如下形式:

$$u(\xi) = a_0 + a_1 a^{f(\xi)} + b_1 a^{-f(\xi)} \quad (15)$$

其中: a_0, a_1, b_1 为待定系数; 将方程(15)及其导数代入方程(3), 合并 $a^{\pm if(\xi)}$, $i=0, 1, 2, 3$ 的各次幂, 并令各次幂的系数等于零, 得到关于 $a_0, a_1, b_1, l, \lambda$ 的代数方程组为:

$$\begin{cases} a^{3f(\xi)}: a_1 \left(2\delta^2 - \frac{\gamma}{\lambda^2 - l^2} a_1^2 \right) = 0 \\ a^{2f(\xi)}: 3a_1 \left(\delta\vartheta - \frac{\gamma}{\lambda^2 - l^2} a_0 a_1 \right) = 0 \\ a^{f(\xi)}: a_1 \left(2\delta\alpha + \vartheta^2 - \frac{1}{\lambda^2 - l^2} (3\gamma a_0^2 + 3\gamma a_1 b_1 + \beta) \right) = 0 \\ a^{0f(\xi)}: (a_1 \alpha + b_1 \delta) \vartheta - \frac{a_0}{\lambda^2 - l^2} (\gamma a_0^2 + 6\gamma a_1 b_1 + \beta) = 0 \\ a^{-f(\xi)}: b_1 \left(2\delta\alpha + \vartheta^2 - \frac{1}{\lambda^2 - l^2} (3\gamma a_0^2 + 3\gamma a_1 b_1 + \beta) \right) = 0 \\ a^{-2f(\xi)}: 3b_1 \left(\alpha\vartheta - \frac{\gamma}{\lambda^2 - l^2} a_0 b_1 \right) = 0 \\ a^{-3f(\xi)}: b_1 \left(2\alpha^2 - \frac{\gamma}{\lambda^2 - l^2} b_1^2 \right) = 0 \end{cases} \quad (16)$$

结合 Maple 软件求解方程组(16), 得出以下两种情形.

情形 1:

$$a_0 = \pm \vartheta \sqrt{\frac{\beta}{\gamma(4\alpha\delta - \vartheta^2)}}, a_1 = \pm 2\delta \sqrt{\frac{\beta}{\gamma(4\alpha\delta - \vartheta^2)}}, b_1 = 0, \lambda = \pm \sqrt{\frac{2\beta + 4l^2\alpha\delta - l^2\vartheta^2}{4\alpha\delta - \vartheta^2}} \quad (17)$$

其中 l 为任意非零常数.

情形 2:

$$a_0 = \pm \vartheta \sqrt{\frac{\beta}{\gamma(4\alpha\delta - \vartheta^2)}}, a_1 = 0, b_1 = \pm 2\alpha \sqrt{\frac{\beta}{\gamma(4\alpha\delta - \vartheta^2)}}, \lambda = \pm \sqrt{\frac{2\beta + 4l^2\alpha\delta - l^2\vartheta^2}{4\alpha\delta - \vartheta^2}} \quad (18)$$

其中 l 为任意非零常数.

由(15), (17) 式与方程(11) 的解(13)、分数复变换(2) 可得方程(1) 的有界行波解为:

$$u_{1,2}(x, t) = \pm \sqrt{\frac{\beta}{\gamma}} \tan \left(\frac{l \sqrt{4\alpha\delta - \vartheta^2}}{2} x \mp \frac{\sqrt{2\beta + 4l^2\alpha\delta - l^2\vartheta^2}}{2\Gamma(1+\theta)} t^\theta \right) \quad (19)$$

$$u_{3,4}(x, t) = \pm \sqrt{\frac{\beta}{\gamma}} \cot \left(\frac{l \sqrt{4\alpha\delta - \vartheta^2}}{2} x \mp \frac{\sqrt{2\beta + 4l^2\alpha\delta - l^2\vartheta^2}}{2\Gamma(1+\theta)} t^\theta \right) \quad (20)$$

其中 $\vartheta^2 - 4\alpha\delta < 0$ 且 $\delta \neq 0$, l 为任意非零常数.

由(15), (17) 式与方程(11) 的解(12)、分数复变换(2) 可得方程(1) 的有界行波解为:

$$u_{5,6}(x, t) = \mp \sqrt{-\frac{\beta}{\gamma}} \tanh \left(\frac{l \sqrt{-4\alpha\delta + \vartheta^2}}{2} x \mp \frac{\sqrt{-2\beta - 4l^2\alpha\delta + l^2\vartheta^2}}{2\Gamma(1+\theta)} t^\theta \right) \quad (21)$$

$$u_{7,8}(x, t) = \mp \sqrt{-\frac{\beta}{\gamma}} \coth \left(\frac{l \sqrt{-4\alpha\delta + \vartheta^2}}{2} x \mp \frac{\sqrt{-2\beta - 4l^2\alpha\delta + l^2\vartheta^2}}{2\Gamma(1+\theta)} t^\theta \right) \quad (22)$$

其中 $\vartheta^2 - 4\alpha\delta > 0$ 且 $\delta \neq 0$, l 为任意非零常数.

进而可得解(19), (20) 为周期解, 且在 $\beta < 0$ 时对应系统(4) 的相图 1(b) 的闭轨, 在 $\beta > 0$ 时对应系统(4) 的相图 1(e) 的闭轨; 解(21), (22) 为扭状孤波解, 且解(21) 在 $\beta < 0$ 时对应系统(4) 的相图 1(b) 的两条异宿轨, 解(22) 在 $\beta > 0$ 时对应系统(4) 的相图 1(e) 中的两条异宿轨. 取 $\alpha=2$, $\vartheta=-3$, $\gamma=\frac{1}{5}$, $l=3$,

$\lambda = \sqrt{13}$, $\beta = -2$, $\delta = 1$, $\theta = \frac{1}{2}$, 运用 Maple 软件给出 u_7 的平面图和三维图见图 2.

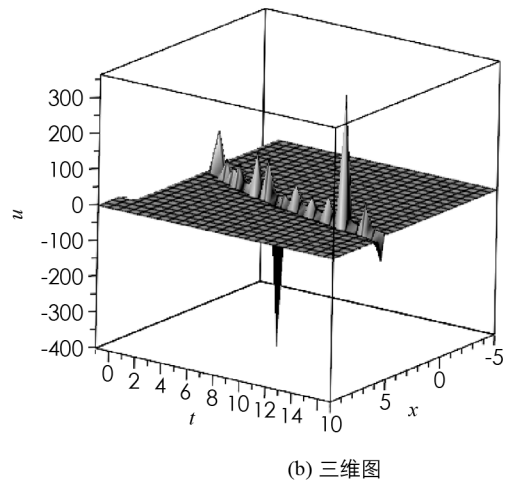
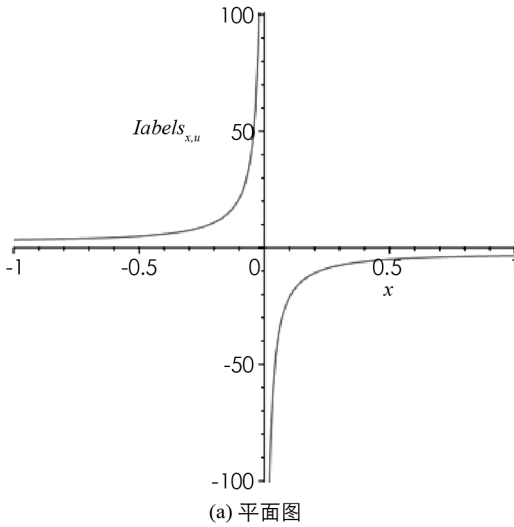


图 2 解 u_7

由(15), (18) 式与方程(11) 的解(13)、分数复变换(2) 可得方程(1) 的有界行波解为

$$u_{9,10}(x, t) = \pm \sqrt{\frac{\vartheta^2 \beta}{\gamma(4\alpha\delta - \vartheta^2)}} \pm \frac{4\alpha\delta \sqrt{\frac{\beta}{\gamma(4\alpha\delta - \vartheta^2)}}}{\sqrt{4\alpha\delta - \vartheta^2} \tan\left(\frac{l\sqrt{4\alpha\delta - \vartheta^2}}{2}x \mp \frac{\sqrt{2\beta + 4l^2\alpha\delta - l^2\vartheta^2}}{2\Gamma(1+\theta)}t^\theta\right) - \vartheta} \quad (23)$$

$$u_{11,12}(x, t) = \pm \sqrt{\frac{\vartheta^2 \beta}{\gamma(4\alpha\delta - \vartheta^2)}} \pm \frac{4\alpha\delta \sqrt{\frac{\beta}{\gamma(4\alpha\delta - \vartheta^2)}}}{\sqrt{4\alpha\delta - \vartheta^2} \cot\left(\frac{l\sqrt{4\alpha\delta - \vartheta^2}}{2}x \mp \frac{\sqrt{2\beta + 4l^2\alpha\delta - l^2\vartheta^2}}{2\Gamma(1+\theta)}t^\theta\right) - \vartheta} \quad (24)$$

其中 $\vartheta^2 - 4\alpha\delta < 0$ 且 $\delta \neq 0$, l 为任意非零常数.

由(15), (18) 式与方程(11) 的解(12)、分数复变换(2) 可得方程(1) 的有界行波解为

$$u_{13,14}(x, t) = \pm \sqrt{\frac{\vartheta^2 \beta}{\gamma(4\alpha\delta - \vartheta^2)}} \mp \frac{4\alpha\delta \sqrt{\frac{\beta}{\gamma(4\alpha\delta - \vartheta^2)}}}{\sqrt{\vartheta^2 - 4\alpha\delta} \tanh\left(\frac{l\sqrt{\vartheta^2 - 4\alpha\delta}}{2}x \mp \frac{\sqrt{l^2\vartheta^2 - 4l^2\alpha\delta - 2\beta}}{2\Gamma(1+\theta)}t^\theta\right) + \vartheta} \quad (25)$$

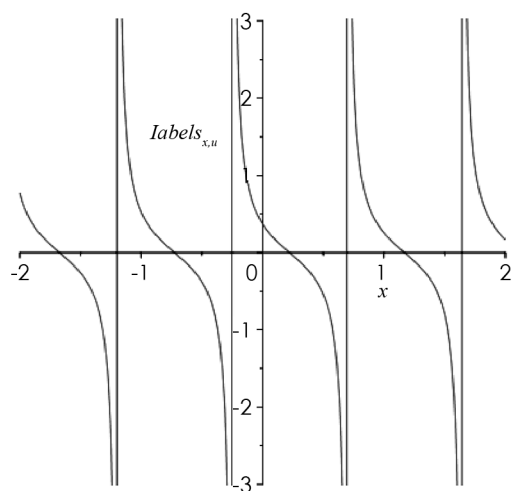
$$u_{15,16}(x, t) = \pm \sqrt{\frac{\vartheta^2 \beta}{\gamma(4\alpha\delta - \vartheta^2)}} \mp \frac{4\alpha\delta \sqrt{\frac{\beta}{\gamma(4\alpha\delta - \vartheta^2)}}}{\sqrt{\vartheta^2 - 4\alpha\delta} \coth\left(\frac{l\sqrt{\vartheta^2 - 4\alpha\delta}}{2}x \mp \frac{\sqrt{l^2\vartheta^2 - 4l^2\alpha\delta - 2\beta}}{2\Gamma(1+\theta)}t^\theta\right) + \vartheta} \quad (26)$$

其中 $\vartheta^2 - 4\alpha\delta > 0$ 且 $\delta \neq 0$, l 为任意非零常数.

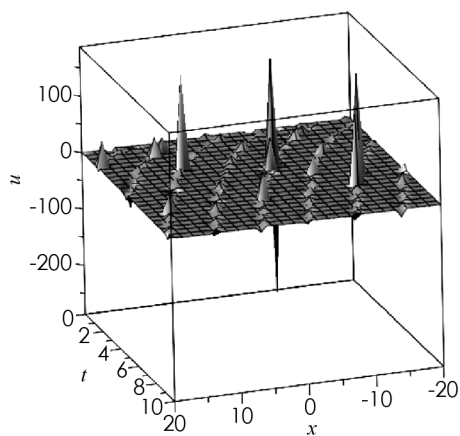
由上述解知: 解(23), (24) 为周期解, 在 $\beta < 0$ 时对应系统(4) 的相图 1(b) 中的闭轨, 在 $\beta > 0$ 时对应系统(4) 的相图 1(e) 中的闭轨; 解(25), (26) 为扭状孤波解, 解(25) 在 $\beta < 0$ 时对应系统(4) 的相图 1(b) 的两条异宿轨, 解(26) 在 $\beta > 0$ 时对应系统(4) 的相图 1(e) 中的两条异宿轨. 取 $\alpha = 5$, $\vartheta = 3$, $\gamma = -6$, $l = -2$,

$\lambda = \sqrt{\frac{42}{11}}$, $\beta = -1$, $\delta = 1$, $\theta = \frac{1}{2}$ 时运用 Maple 软件给出 u_{11} 的平面图和三维图见图 3; 取 $\alpha = 2$, $\vartheta = -3$,

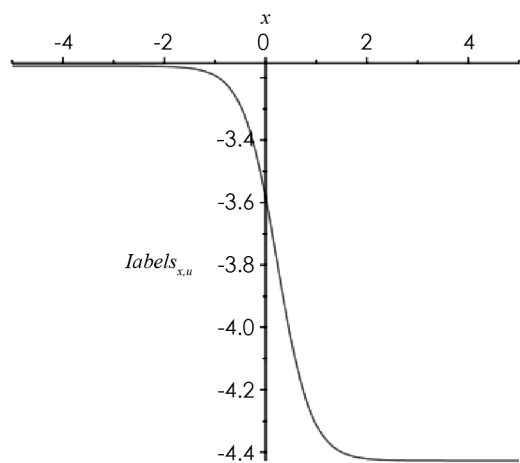
$\gamma = 5$, $l = 3$, $\lambda = -\sqrt{13}$, $\beta = -2$, $\delta = 1$, $\theta = \frac{1}{2}$ 时运用 Maple 软件给出 u_{14} 的平面图和三维图见图 4.



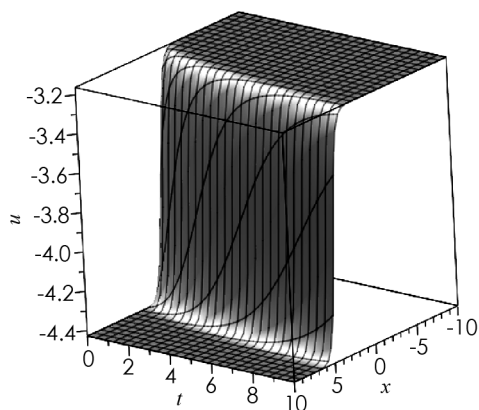
(a) 平面图



(b) 三维图

图 3 解 u_{11} 

(a) 平面图



(b) 三维图

图 4 解 u_{14}

注 1 解(25)与解(21)分别是图 1(b)中的两条异宿轨对应的扭状孤波解的两种不同表达式,解(26)与解(22)分别是图 1(e)中的两条异宿轨对应的扭状孤波解的两种不同表达式。

4 结论

本文利用平面动力系统理论与方法以及辅助方程法,讨论了非线性时间分数阶 Klein-Gordon 方程有界行波解的存在性及精确表达式,其中包括双曲函数解、三角函数解;由定性结论可知方程(1)还存在 4 个钟状孤波解和无穷多个周期解,在此用辅助方程法还没能给出其精确表达式。

参考文献:

- [1] METZLER R, KLAFTER J. The Random Walk's Guide to Anomalous Diffusion; a Fractional Dynamics Approach [J]. Physics Reports, 2000, 339(1): 1-77.
- [2] LASKIN N. Fractional Schrodinger Equation[J]. Physics, 2002, 66(5): 249-264.
- [3] LI B, CHEN Y, ZHANG H Q. Auto-Bäcklund Transformations and Exact Solutions for the Generalized Two-Dimensional Korteweg-de Vries-Burgers-Type Equations and Burgers-Type Equations [J]. Zeitschrift Für Naturforschung A, 2003, 58(7-8): 464-472.
- [4] YAN Z Y. The Extended Jacobian Elliptic Function Expansion Method and Its Application in the Generalized Hirota-Satsuma Coupled KdV System [J]. Chaos, Solitons & Fractals, 2003, 15(3): 575-583.

[5] CHEN M X, HU H C, ZHU H D. Consistent Riccati Expansion and Exact Solutions of the Kuramoto-Sivashinsky Equation [J]. Applied Mathematics Letters, 2015, 49: 147-151.

[6] DEMIRAY S T, PANDIR Y, BULUT H. The Investigation of Exact Solutions of Nonlinear Time-Fractional Klein-Gordon Equation by Using Generalized Kudryashov Method [J]. Aip Conference Proceedings, 2014, 1637: 283-289.

[7] LI C, GUO Q L, ZHAO M M. On the Solutions of (2+1)-Dimensional Time-Fractional Schrödinger Equation [J]. Applied Mathematics Letters, 2019, 94: 238-243.

[8] 何彩霞, 刘小华. 耦合 KdV 型方程有界行波解的存在性及其显式表达式 [J]. 西南师范大学学报(自然科学版), 2014, 39(7): 26-29.

[9] MAHAK N, AKRAM G. The Modified Auxiliary Equation Method to Investigate Solutions of the Perturbed Nonlinear Schrödinger Equation with Kerr Law Nonlinearity [J]. Optik, 2020, 207: 164467.

[10] KHATER M. Explicit Travelling Wave Solutions and Stability Properties for a Class of Nonlinear Evolution Equations [D]. 镇江: 江苏大学, 2020.

[11] BEKIR A, AKSOY E, CEVIKEL A C. Exact Solutions of Nonlinear Time Fractional Partial Differential Equations by Sub-Equation Method [J]. Mathematical Methods in the Applied Sciences, 2015, 38(13): 2779-2784.

[12] 李钊, 孙峪怀, 张雪, 等. 非线性分数阶 Klein-Gordon 方程的新显式解 [J]. 四川大学学报(自然科学版), 2017, 54(2): 221-226.

[13] SALEH R, KASSEM M, MABROUK S M. Exact Solutions of Nonlinear Fractional Order Partial Differential Equations via Singular Manifold Method [J]. Chinese Journal of Physics, 2019, 61: 290-300.

[14] HOSSEINI K, MAYELI P, ANSARI R. Modified Kudryashov Method for Solving the Conformable Time-Fractional Klein-Gordon Equations with Quadratic and Cubic Nonlinearities [J]. Optik, 2017, 130: 737-742.

[15] JUMARIE G. Table of some Basic Fractional Calculus Formulae Derived from a Modified Riemann-Liouville Derivative for Non-Differentiable Functions [J]. Applied Mathematics Letters, 2009, 22(3): 378-385.

[16] 张芷芬, 丁同仁, 黄文灶, 等. 微分方程定性理论 [M]. 北京: 科学出版社, 1985: 1-556.

[17] 宋佳谦, 刘小华. 积分微分 KP 层次方程的精确行波解 [J]. 西南师范大学学报(自然科学版), 2019, 44(10): 16-22.

责任编辑 张构