DOI:10.13718/j.cnki.xsxb.2022.03.006

开放对流环境下合作反应扩散对流模型的解的全局定性分析[①]

刘青兰， 张国洪

西南大学 数学与统计学院，重庆 400715

摘要：讨论了一个开放对流环境下合作反应扩散对流模型的动力学行为. 研究发现存在2个临界对流速率将该系统的动力学行为分为4种不同的情形：(i) 两个种群都灭绝；(ii) 物种 u 长期存活，物种 v 灭绝；(iii) 物种 v 长期存活，物种 u 灭绝；(iv) 两个物种都能持续生存. 数值模拟发现，对流速率的变化对种群的空间分布模式也有重要影响.

关 键 词：开放对流环境；合作模型；持续性；灭绝

中图分类号：O175 **文献标志码**：A **文章编号**：1000-5471(2022)03-0044-08

On Global Qualitative Analysis of Solutions of Cooperative Reaction-Diffusion-Advection Model in Open Advective Environment

LIU Qinglan， ZHANG Guohong

School of Mathematics and Statistics, Southwest University, Chongqing 400715, China

Abstract: In this paper, the dynamic behavior of a cooperative reaction-diffusion-advection model has been discussed in an open advection environment. It′s found that there are two critical advection rates which divide the dynamic behavior of the system into four different situations: 1) both populations are extinct; 2) The species-u survives for a long time, and the species-v becomes extinct; 3) The species-v survives in the long run, and the species-u becomes extinct; 4) Both species can survive continuously. Numerical simulations show that the change of advection rate also has an important impact on the spatial distribution pattern of the population.

Key words: open advection environment; cooperative model; persistence; extinction

种群之间互惠共生是自然界中一种常见的生态学关系. 许多数学家和生态学家提出了不同的数学模型来刻画物种之间相互合作的关系[1-2]. 特别地，文献[3]提出了下列合作互惠模型：

① 收稿日期：2021-05-13
基金项目：国家自然科学基金项目(11871403).
作者简介：刘青兰，硕士研究生，主要从事生物数学及动力系统理论及其应用研究.
通信作者：张国洪，副教授.

$$\begin{cases} u_t = a_1 u\left(1 - \dfrac{u}{K_1 + b_1 v} - c_1 u\right),\ t > 0 \\ v_t = a_2 v\left(1 - \dfrac{v}{K_2 + b_2 u} - c_2 v\right),\ t > 0 \end{cases} \tag{1}$$

其中：u 和 v 代表两个合作种群的密度，$a_i(i=1,2)$ 代表种群内在增长率，a_1c_1 和 a_2c_2 代表种群内竞争系数，物种 u 和 v 的环境容纳量分别为 K_1+b_1v 和 K_2+b_2u，可以看出其中一个种群的存在有利于另一个种群的生长，系数 a_i, b_i, c_i 和 $K_i(i=1,2)$ 都是正常数. Albrecht 证明了系统(1) 存在唯一全局渐近稳定的正稳态解. 在模型(1) 的基础上，文献[4-6] 考虑了扩散和交叉扩散条件下系统非常数正平衡解的存在性问题；文献[7-8] 则进一步研究了两个互惠种群在自由边界条件下是否能够入侵的条件.

近年来，对流环境中的种群动力学行为得到了大量的研究，如河流中的相互竞争种群、捕食-食饵种群，相应的动力学模型一般为反应扩散对流模型. 研究发现对流的引入对相互竞争种群及捕食食饵系统的动力学行为有重要的影响[9-11]. 基于上述分析，一个自然的问题就是对流的引入对以上互惠共生种群模型(1) 的动力学行为有什么影响，即研究下列反应-扩散-对流合作模型：

$$\begin{cases} u_t = d_1 u_{xx} - q_1 u_x + a_1 u\left(1 - \dfrac{u}{K_1 + b_1 v} - c_1 u\right), & 0 < x < L,\ t > 0 \\ v_t = d_2 v_{xx} - q_2 v_x + a_2 v\left(1 - \dfrac{v}{K_2 + b_2 u} - c_2 v\right), & 0 < x < L,\ t > 0 \\ d_1 u_x(0,t) - q_1 u(0,t) = 0,\ u_x(L,t) = 0, & t > 0 \\ d_2 v_x(0,t) - q_2 v(0,t) = 0,\ v_x(L,t) = 0, & t > 0 \\ u(x,0) = u_0(x),\ v(x,0) = v_0(x), & 0 < x < L,\ t = 0 \end{cases} \tag{2}$$

其中：$u(x,t)$ 和 $v(x,t)$ 是两个互惠物种的种群密度；$a_i, b_i, c_i, K_i(i=1,2)$ 的意义与系统(1) 相同；正常数 d_1, d_2 代表扩散系数，q_1, q_2 代表两个种群非负的对流速率；L 是栖息地的大小. 在上游 $x=0$ 处，我们假设物种满足无通量边界条件，这意味着不允许任何个体通过该边界. 在下游 $x=L$ 处，我们假设为自由流边界条件，在文献[12] 中，该边界条件被称为 Danckwerks 边界条件，它用来刻画小溪流向湖泊的自然情况.

1　系统的耗散性

本节将证明系统(2) 存在唯一一个正解，它对所有的 $x \in [0, L]$ 和 $t > 0$ 都有界.

定理 1　对任意非负非平凡初值函数$(u_0(x), v_0(x))$，系统(2) 都有唯一一个非负解$(u(x,t), v(x,t))$，且存在两个仅依赖初值$(u_0(x), v_0(x))$ 的正常数 M_1, M_2 使得

$$0 < u(x,t) \leqslant M_1,\ 0 < v(x,t) \leqslant M_2,\ x \in [0, L],\ t > 0$$

证　首先，由强极大值原理可得 $u(x,t) > 0$ 以及 $v(x,t) > 0$. 然后取正常数 M_1 和 M_2 使得

$$M_1 \geqslant \max\left\{\frac{1}{c_1},\ \max_{x\in[0,L]} u_0(x)\right\},\ M_2 \geqslant \max\left\{\frac{1}{c_2},\ \max_{x\in[0,L]} v_0(x)\right\}$$

则容易验证(M_1, M_2) 和$(0, 0)$ 是系统(2) 的一对有序的上下解. 由文献[14] 的定理 8.3.1 得系统(2) 在 $S(0,0; M_1, M_2)$ 上有唯一解，其中

$$S(0,0; M_1, M_2) = \{(u, v) \in C([0, L] \times [0, +\infty));\ 0 < u(x,t) \leqslant M_1,\ 0 < v(x,t) \leqslant M_2\}$$

定理证毕.

2　种群的灭绝性

本节研究系统(2) 的平衡态解的存在性和稳定性. 我们首先回顾以下单种群模型的相关结论：

$$\begin{cases} d_1 u_{xx} - q_1 u_x + a_1 u\left(1 - \dfrac{u}{K_1} - c_1 u\right) = 0, & 0 < x < L \\ d_1 u_x(0) - q_1 u(0) = 0, & x = 0 \\ u_x(L) = 0, & x = L \end{cases} \tag{3}$$

以及

$$
\begin{cases}
d_2 v_{xx} - q_2 v_x + a_2 v\left(1 - \dfrac{v}{K_2} - c_2 v\right) = 0, & 0 < x < L \\
d_2 v_x(0) - q_2 v(0) = 0, & x = 0 \\
v_x(L) = 0, & x = L
\end{cases}
\tag{4}
$$

与(3)式相应的特征值问题如下:

$$
\begin{cases}
d_1 \phi_{xx} - q_1 \phi_x + a_1 \phi = \lambda \phi, & 0 < x < L \\
d_1 \phi_x(0) - q_1 \phi(0) = 0, & x = 0 \\
\phi_x(L) = 0, & x = L
\end{cases}
\tag{5}
$$

由 Krein-Rutman 定理[13]可得特征值问题(5)有主特征值 $\lambda_1 = \lambda_1(q_1, a_1)$,对应主特征函数为 $\phi_1(q_1, a_1)$. 由文献[9]中的引理2.2可得对于固定的 $d_1, a_1 > 0$,存在唯一的临界对流速率 $q^*_{a_1} = q^*_{a_1}(d_1, a_1) \in (0, 2\sqrt{d_1 a_1})$ 满足

$$
\begin{cases}
\lambda_1(q_1, a_1) > 0, & 0 \leqslant q_1 < q^*_{a_1} \\
\lambda_1(q_1, a_1) = 0, & q_1 = q^*_{a_1} \\
\lambda_1(q_1, a_1) < 0, & q_1 > q^*_{a_1}
\end{cases}
\tag{6}
$$

同理,对于固定的 $d_2, a_2 > 0$,也存在唯一的临界对流速率 $q^*_{a_2} = q^*_{a_2}(d_2, a_2) \in (0, 2\sqrt{d_2 a_2})$ 使得

$$
\begin{cases}
\lambda_1(q_2, a_2) > 0, & 0 \leqslant q_2 < q^*_{a_2} \\
\lambda_1(q_2, a_2) = 0, & q_2 = q^*_{a_2} \\
\lambda_1(q_2, a_2) < 0, & q_2 > q^*_{a_2}
\end{cases}
\tag{7}
$$

其中:$\lambda_1(q_2, a_2)$ 是(5)式中 d_1, q_1, a_1 被 d_2, q_2, a_2 替代后的系统的主特征值. 由文献[9]的定理2.1(b)可得单种群模型(3)和(4)的如下结果.

引理1 1) 假设 $0 \leqslant q_1 < q^*_{a_1}$,则(3)式有唯一一个全局渐近稳定的正稳态解 θ_{q_1};假设 $q_1 \geqslant q^*_{a_1}$,则系统(3)的零解全局渐近稳定.

2) 假设 $0 \leqslant q_2 < q^*_{a_2}$,则(4)式有唯一一个全局渐近稳定的正稳态解 θ_{q_2};假设 $q_2 \geqslant q^*_{a_2}$,则系统(4)的零解全局渐近稳定.

由上述引理可见,对于固定的 d_1, d_2, a_1, a_2,如果 $q_1 \geqslant q^*_{a_1}$(或 $q_2 \geqslant q^*_{a_2}$),则系统(3)(或(4))没有正平衡解. 显然,系统(2)总是存在平凡稳态解(0,0);同时当 $0 \leqslant q_1 < q^*_{a_1}$ 及 $0 \leqslant q_2 < q^*_{a_2}$ 成立时,系统(2)存在唯一的半平凡稳态解 $(\theta_{q_1}, 0)$ 和 $(0, \theta_{q_2})$.

定理2 假设 $q_1 > q^*_{a_1}$,$0 \leqslant q_2 < q^*_{a_2}$ 成立,则系统(2)的半平凡稳态解 $(0, \theta_{q_2})$ 是全局渐近稳定的.

证 我们首先证明半平凡稳态解 $(0, \theta_{q_2})$ 是局部渐近稳定的. 为此,把(2)式对应的稳态系统在 $(0, \theta_{q_2})$ 处线性化,可以得到如下相应的特征值问题:

$$
\begin{cases}
d_1 \varphi_{xx} - q_1 \varphi_x + a_1 \varphi = \sigma \varphi, & 0 < x < L \\
d_1 \varphi_x(0) - q_1 \varphi(0) = 0, & x = 0 \\
\varphi_x(L) = 0, & x = L
\end{cases}
\tag{8}
$$

我们只需要证明(8)式的主特征值 $\sigma_1(q_1, a_1) < 0$. 事实上,$\sigma_1(q_1, a_1) = \lambda_1(q_1, a_1)$. 由(6)式即可得当 $q_1 > q^*_{a_1}$ 时,$\sigma_1(q_1, a_1) < 0$.

接下来证明在非负和非平凡初始条件下,系统(2)的解 $(u(x,t), v(x,t))$ 收敛到 $(0, \theta_{q_2})$. 由抛物方程的极大值原理可得系统(2)的解 $(u(x,t), v(x,t))$ 对所有 $x \in [0, L]$ 和 $t > 0$,都满足 $u(x,t) > 0$,$v(x,t) > 0$. 因此,在 $(0, L) \times (0, +\infty)$ 上,

$$
u_t \leqslant d_1 u_{xx} - q_1 u_x + a_1 u
$$

从而由抛物方程的比较原理可推出对任意 $x \in [0, L]$ 和 $t > 0$,有 $u(x,t) \leqslant U(x,t)$,其中 $U(x,t)$ 满足

$$\begin{cases} U_t = d_1 U_{xx} - q_1 U_x + a_1 U, & 0 < x < L,\ t > 0 \\ d_1 U_x(0, t) - q_1 U(0, t) = 0,\ U_x(L, t) = 0, & t > 0 \\ U(x, 0) = u(x, 0) \geqslant 0, & 0 < x < L \end{cases}$$

由于 $q_1 > q^*_{a_1}$，根据引理 1 可知：在 $[0, L]$ 上，当 $t \to +\infty$ 时，$U(x, t) \to 0$. 因此，在 $[0, L]$ 上，下式一致成立

$$\lim_{t \to +\infty} u(x, t) = 0$$

即对任意的 $\varepsilon > 0$，存在 $T_1 > 0$，使得对所有的 $x \in [0, L]$ 和 $t > T_1$，都有 $u(x, t) < \varepsilon$. 故在 $(0, L) \times (T_1, +\infty)$ 上

$$d_2 v_{xx} - q_2 v_x + a_2 v\left(1 - \frac{v}{K_2} - c_2 v\right) \leqslant v_t \leqslant d_2 v_{xx} - q_2 v_x + a_2 v\left(1 - \frac{v}{K_2 + b_2 \varepsilon} - c_2 v\right) \tag{9}$$

由于 $0 \leqslant q_2 < q^*_{a_2}$，因此由(9) 式左边不等式以及抛物方程比较原理可得出在 $x \in [0, L]$ 上下列极限成立

$$\liminf_{t \to +\infty} v(x, t) \geqslant \theta_{q_2} \tag{10}$$

同时，由(9) 式右边不等式以及抛物方程比较原理可得对 $x \in [0, L]$ 和 $t > T_1$，有 $v(x, t) \leqslant V^\varepsilon(x, t)$，其中 $V^\varepsilon(x, t)$ 满足

$$\begin{cases} V^\varepsilon_t = d_2 V^\varepsilon_{xx} - q_2 V^\varepsilon_x + a_2 V^\varepsilon\left(1 - \dfrac{V^\varepsilon}{K_2 + b_2 \varepsilon} - c_2 V^\varepsilon\right), & 0 < x < L,\ t > T_1 \\ d_2 V^\varepsilon_x(0, t) - q_2 V^\varepsilon(0, t) = 0,\ V^\varepsilon_x(L, t) = 0, & t > T_1 \\ V^\varepsilon(x, T_1) = v(x, T_1) \geqslant 0, & 0 < x < L \end{cases} \tag{11}$$

因为 $0 \leqslant q_2 < q^*_{a_2}$，有 $\lambda_1(q_2, a_2) > 0$. 所以 $\theta^\varepsilon_{q_2}$ 是(11) 式的稳态系统的唯一正解. 由文献[10] 的引理 5.4 可得 $0 < \theta^\varepsilon_{q_2} < \dfrac{1}{c_2}$，通过 L^p 估计和 Sobolev 嵌入定理知 $\theta^\varepsilon_{q_2} \to \theta_{q_2}$ 在 $[0, L]$ 上一致成立. 又注意到对任意 $x \in [0, L]$ 和 $t > T_1$，$v(x, t) \leqslant V^\varepsilon(x, t)$，故在 $[0, L]$ 上，下列不等式是一致成立的：

$$\limsup_{t \to +\infty} v(x, t) \leqslant \theta_{q_2}$$

结合(10) 式知在 $[0, L]$ 上 $\lim\limits_{t \to +\infty} v(x, t) = \theta_{q_2}$ 一致成立. 因此，在非负和非平凡初始条件下，系统(2) 的解 $(u(x, t), v(x, t))$ 收敛到 $(0, \theta_{q_2})$.

定理 3　假设 $0 \leqslant q_1 < q^*_{a_1}$，$q_2 > q^*_{a_2}$. 则系统(2) 的半平凡稳态解 $(\theta_{q_1}, 0)$ 是全局渐近稳定的.

证　为了证明半平凡稳态解 $(\theta_{q_1}, 0)$ 是局部渐近稳定的，把(2) 式对应的稳态系统在 $(\theta_{q_1}, 0)$ 处线性化，可以得到如下相应的特征值问题：

$$\begin{cases} d_2 \psi_{xx} - q_2 \psi_x + a_2 \psi = \mu \psi, & 0 < x < L \\ d_2 \psi_x(0) - q_2 \psi(0) = 0, & x = 0 \\ \psi_x(L) = 0, & x = L \end{cases} \tag{12}$$

我们只需要证明(12) 式的主特征值 $\mu_1(q_2, a_2) < 0$. 事实上，$\mu_1(q_2, a_2) = \lambda_1(q_2, a_2)$. 由(7) 式即可得当 $q_2 > q^*_{a_2}$ 时，$\mu_1(q_2, a_2) < 0$，从而 $(\theta_{q_1}, 0)$ 局部渐近稳定. 半平凡稳态解 $(\theta_{q_1}, 0)$ 的全局吸引性的证明类似于定理 2，此处省略.

定理 4　假设 $q_1 > q^*_{a_1}$，$q_2 > q^*_{a_2}$. 则系统(2) 的平凡稳态解 $(0, 0)$ 是全局渐近稳定的.

证　首先证明系统(2) 的平凡稳态解 $(0, 0)$ 是局部渐近稳定的. 事实上，只需考虑以下特征值问题：

$$\begin{cases} d_1 \phi_{xx} - q_1 \phi_x + a_1 \phi = \bar{\mu} \phi, & 0 < x < L \\ d_2 \psi_{xx} - q_2 \psi_x + a_2 \psi = \bar{\mu} \psi, & 0 < x < L \\ d_1 \phi_x(0) - q_1 \phi(0) = 0, & \phi_x(L) = 0 \\ d_2 \psi_x(0) - q_2 \psi(0) = 0, & \psi_x(L) = 0 \end{cases} \tag{13}$$

若 $q_1 > q^*_{a_1}$，$q_2 > q^*_{a_2}$，则容易看到(13) 式的主特征值 $\bar{\mu}_1 < 0$. 即系统(2) 的平凡稳态解 $(0, 0)$ 是局部渐近稳定的. 对具有非负和非平凡初始条件的系统(2) 的解 $(u(x, t), v(x, t))$ 收敛到 $(0, 0)$ 的证明过程与定理

2 相似，此处省略. 证毕.

3 一致持续性

本节致力于研究初始条件为 $u(x,0)=u_0(x)(u_0(x)\geqslant 0$ 且 $u_0(x)\not\equiv 0)$ 和 $v(x,0)=v_0(x)(v_0(x)\geqslant 0$ 且 $v_0(x)\not\equiv 0)$ 时系统(2) 的解 $(u(x,t),v(x,t))$ 的一致持续性.

定理 5 假设 $0\leqslant q_1<q_{a_1}^*$，$0\leqslant q_2<q_{a_2}^*$. 则具有非负和非平凡初始条件的系统(2) 的解 $(u(x,t),v(x,t))$ 是一致持续的.

证 我们使用抽象持久性理论[15] 来证明这个定理. 首先定义 $\Theta(t)$ 是状态空间 P 上系统(2) 的解半流，其中在 $[0,L]$ 上，

$$P=\{(u,v)\in C[0,L]\times C[0,L]:u\geqslant 0,v\geqslant 0\}$$

令 $P_0=\{(u,v)\in P:u(x)\not\equiv 0,v(x)\not\equiv 0\}$，$\partial P_0=P\backslash P_0$. 由极大值原理可得若 $(u_0,v_0)\in P_0$，则对任意的 $x\in[0,L]$ 和 $t>0$，系统(2) 的解都满足 $u(x,t)>0$，$v(x,t)>0$. 因此，P_0 在 P 中是开的，且在系统(2) 生成的动力学下是前向不变的，即对所有 $t\geqslant 0$，有 $\Theta(t)P_0\subseteq P_0$. 再者，$\partial P_0$ 包含平衡点 $(0,0)$，$(\theta_{q_1},0)$ 和 $(0,\theta_{q_2})$. 剩下的证明分为以下 5 个步骤.

1) 令 $M_\partial=\{(u_0,v_0)\in\partial P_0:\Theta(t)(u_0,v_0)\in\partial P_0,\ \forall t\geqslant 0\}$，$\omega((u_0,v_0))$ 是正向轨道 $\gamma^+((u_0,v_0))=\{\Theta(t)(u_0,v_0):t\geqslant 0\}$ 的 ω 极限集. 先证明

$$\bigcup_{(u_0,v_0)\in M_\partial}\omega((u_0,v_0))=\{(0,0),(\theta_{q_1},0),(0,\theta_{q_2})\}$$

对任意 $t\geqslant 0$，$(u_0,v_0)\in M_\partial$ 有 $\Theta(t)(u_0,v_0)\in\partial P_0$，则 $u(x,t,(u_0,v_0))\equiv 0$ 或者 $v(x,t,(u_0,v_0))\equiv 0$. 若对任意 $t\geqslant 0$，$u(x,t,(u_0,v_0))\equiv 0$，则 $v(x,t,(u_0,v_0))$ 满足(4) 式. 由引理 1 得：$\lim\limits_{t\to+\infty}v(x,t)=0$，或者 $\lim\limits_{t\to+\infty}v(x,t)=\theta_{q_2}$. 若存在 $\tau_0>0$ 使得 $u(x,\tau_0,(u_0,v_0))\not\equiv 0$，则由极大值原理可得对任意 $t>\tau_0$ 都有 $u(x,t,(u_0,v_0))>0$. 从而对任意 $t>\tau_0$ 有 $v(x,t,(u_0,v_0))\equiv 0$. 因此，对任意 $t>\tau_0$，$u(x,t,(u_0,v_0))$ 满足系统(3). 再由引理 1 得出要么 $\lim\limits_{t\to+\infty}u(x,t)=0$，要么 $\lim\limits_{t\to+\infty}u(x,t)=\theta_{q_1}$.

2) 证明 $(0,0)$ 是一致的弱排斥子，即存在 $\delta_1>0$，使得对任意的 $(u_0,v_0)\in P_0$，都有

$$\limsup_{t\to+\infty}\|\Theta(t)(u_0,v_0)-(0,0)\|\geqslant\delta_1\tag{14}$$

采取反证法，假设(14) 式不成立. 则对任意 $\delta>0$，都存在 $(u_0,v_0)\in P_0$ 使得 $\limsup\limits_{t\to+\infty}\|\Theta(t)(u_0,v_0)-(0,0)\|<\delta$. 即存在 $t_0>0$ 使得对 $t\geqslant t_0$，有 $\|u(x,t,(u_0,v_0))\|<\delta$，$\|v(x,t,(u_0,v_0))\|<\delta$. 从 u 的方程可得出

$$\begin{cases}u_t\geqslant d_1u_{xx}-q_1u_x+a_1u\left(1-\dfrac{\delta}{K_1}-c_1\delta\right), & 0<x<L,t\geqslant t_0\\ d_1u_x(0,t)-q_1u(0,t)=0,\ u_x(L,t)=0, & t\geqslant t_0\end{cases}$$

若 $(u_0,v_0)\in P_0$，由极大值原理可得 $u(x,t_0)>0$. 故存在 $\alpha_0>0$，使得 $u(x,t_0)\geqslant\alpha_0\phi_1^\delta(x)$，其中 $\phi_1^\delta(x)$ 是与(5) 式 $\left(a_1\text{ 被替换为 }a_1\left(1-\dfrac{\delta}{K_1}-c_1\delta\right)\right)$ 的主特征值 $\lambda_1\left(q_1,a_1\left(1-\dfrac{\delta}{K_1}-c_1\delta\right)\right)$ 相对应的主特征函数. 令 $\underline{u}(x,t)=\alpha_0\mathrm{e}^{\lambda_1\left(q_1,a_1\left(1-\frac{\delta}{K_1}-c_1\delta\right)\right)(t-t_0)}\phi_1^\delta(x)$，则容易验证 $\underline{u}(x,t)$ 满足

$$\begin{cases}\underline{u}_t=d_1\underline{u}_{xx}-q_1\underline{u}_x+a_1\underline{u}\left(1-\dfrac{\delta}{K_1}-c_1\delta\right), & 0<x<L,t\geqslant t_0\\ d_1\underline{u}_x(0,t)-q_1\underline{u}(0,t)=0,\ \underline{u}_x(L,t)=0, & t\geqslant t_0\\ \underline{u}(x,t_0)=\alpha_0\phi_1^\delta(x), & 0<x<L\end{cases}$$

由比较原理得出对任意的 $t\geqslant t_0$，$x\in[0,L]$，有

$$u(x,t)\geqslant\underline{u}(x,t)=\alpha_0\mathrm{e}^{\lambda_1\left(q_1,a_1\left(1-\frac{\delta}{K_1}-c_1\delta\right)\right)(t-t_0)}\phi_1^\delta(x)$$

然而，由于 $0\leqslant q_1<q_{a_1}^*$，所以 $\lambda_1(q_1,a_1)>0$. 取 $\delta>0$ 足够小使得 $\lambda_1\left(q_1,a_1\left(1-\dfrac{\delta}{K_1}-c_1\delta\right)\right)>0$，推

出 $\lim\limits_{t\to+\infty} u(x, t, (u_0, v_0)) = +\infty$. 这与对任意的 $t \geqslant t_0$，$\| u(x, t, (u_0, v_0)) \| < \delta$ 矛盾. 因此，$(0, 0)$ 是一致的弱排斥子，并且在 P 上是一个孤立的不变集.

3）证明 $(\theta_{q_1}, 0)$ 是一致的弱排斥子，即存在 $\delta_2 > 0$，使得对任意的 $(u_0, v_0) \in P_0$，都有

$$\limsup_{t\to+\infty} \| \Theta(t)(u_0, v_0) - (\theta_{q_1}, 0) \| \geqslant \delta_2 \tag{15}$$

同样采取反证法，假设(15)式不成立. 则对任意的 $\delta > 0$，都存在 $(u_0, v_0) \in P_0$ 使得 $\limsup\limits_{t\to+\infty} \| \Theta(t)(u_0, v_0) - (\theta_{q_1}, 0) \| < \delta$. 即存在 $t_1 > 0$，使得对 $t \geqslant t_1$，有

$$\| u(x, t, (u_0, v_0)) - \theta_{q_1} \| < \delta, \quad \| v(x, t, (u_0, v_0)) \| < \delta$$

若 $(u_0, v_0) \in P_0$，由极大值原理可得 $u(x, t_1) > 0$，$v(x, t_1) > 0$. 故存在 $\alpha_1 > 0$，使得 $v(x, t_1) \geqslant \alpha_1 \psi_1^\delta(x)$，其中 $\psi_1^\delta(x)$ 是与(5)式 $\left(d_1, q_1, a_1 \text{ 被分别替换为 } d_2, q_2, a_2\left(1 - \dfrac{\delta}{K_2} - c_2\delta\right)\right)$ 的主特征值 $\lambda_1\left(q_2, a_2\left(1 - \dfrac{\delta}{K_2} - c_2\delta\right)\right)$ 相对应的主特征函数. 再者，从 v 的等式可得

$$\begin{cases} v_t \geqslant d_2 v_{xx} - q_2 v_x + a_2 v\left(1 - \dfrac{\delta}{K_2} - c_2\delta\right), & 0 < x < L, t \geqslant t_1 \\ d_2 v_x(0, t) - q_2 v(0, t) = 0, \ v_x(L, t) = 0, & t \geqslant t_1 \end{cases}$$

令 $\underline{v}(x, t) = \alpha_1 e^{\lambda_1\left(q_2, a_2\left(1-\frac{\delta}{K_2}-c_2\delta\right)\right)(t-t_1)} \psi_1^\delta(x)$. 容易验证 $\underline{v}(x, t)$ 满足

$$\begin{cases} \underline{v}_t = d_2 \underline{v}_{xx} - q_2 \underline{v}_x + a_2 \underline{v}\left(1 - \dfrac{\delta}{K_2} - c_2\delta\right) & 0 < x < L, t \geqslant t_1 \\ d_2 \underline{v}_x(0, t) - q_2 \underline{v}(0, t) = 0, \ \underline{v}_x(L, t) = 0, & t \geqslant t_1 \\ \underline{v}(x, t_1) = \alpha_1 \psi_1^\delta(x), & 0 < x < L \end{cases}$$

从比较原理得出对任意 $t \geqslant t_1$，$x \in [0, L]$，有

$$v(x, t) \geqslant \underline{v}(x, t) = \alpha_1 e^{\lambda_1\left(q_2, a_2\left(1-\frac{\delta}{K_2}-c_2\delta\right)\right)(t-t_1)} \psi_1^\delta(x)$$

然而，由于 $0 \leqslant q_2 < q_{a_2}^*$，所以 $\lambda_1(q_2, a_2) > 0$. 取 $\delta > 0$ 足够小使得 $\lambda_1\left(q_2, a_2\left(1 - \dfrac{\delta}{K_2} - c_2\delta\right)\right) > 0$，推出 $\lim\limits_{t\to+\infty} v(x, t, (u_0, v_0)) = +\infty$. 这与对任意的 $t \geqslant t_1$，$\| v(x, t, (u_0, v_0)) \| < \delta$ 矛盾. 因此，$(\theta_{q_1}, 0)$ 是一致的弱排斥子，并且在 P 上是一个孤立的不变集.

4）证明 $(0, \theta_{q_2})$ 是一致的弱排斥子，它是 P 中的孤立不变集. 这个证明类似于第 3 步，此处省略.

5）对任意的 $(u, v) \in P$，定义 $P \longrightarrow [0, +\infty)$ 上的一个连续函数：

$$D((u, v)) = \min\{\min_{x\in[0, L]} u(x), \min_{x\in[0, L]} v(x)\}$$

根据标准的比较原理可得：$D^{-1}(0, +\infty) \subseteq P_0$，并且如果 $D((u, v)) > 0$ 或 $(u, v) \in P_0$，$D((u, v)) = 0$，则对任意 $t > 0$，有 $D(\Theta(t)(u, v)) > 0$. 即 D 是半流 $\Theta(t): P \longrightarrow P$ 的广义距离函数[15].

由定理 1 知，半流 $\Theta(t): P \longrightarrow P$ 是点耗散的. 从文献[16]的定理 21.2 得出对任意 $t > 0$，$\Theta(t): P \longrightarrow P$ 是紧的. 再根据文献[17]的定理 2.6 得出 $\Theta(t)$ 具有全局紧吸引子，且它吸引 P 上的每个有界集. 注意到 $(0, 0)$，$(\theta_{q_1}, 0)$ 和 $(0, \theta_{q_2})$ 均是一致的弱排斥子，它们在 P 中是孤立的，那我们可以得出

$$W^s(\{(0, 0)\}) \cap D^{-1}(0, +\infty) = \varnothing, \ W^s(\{(\theta_{q_1}, 0)\}) \cap D^{-1}(0, +\infty) = \varnothing$$

$$W^s(\{(0, \theta_{q_2})\}) \cap D^{-1}(0, +\infty) = \varnothing$$

其中 $W^s(\{(0, 0)\})$，$W^s(\{(\theta_{q_1}, 0)\})$ 和 $W^s(\{(0, \theta_{q_2})\})$ 分别是 $(0, 0)$，$(\theta_{q_1}, 0)$ 和 $(0, \theta_{q_2})$ 的稳定集[15]. 因此 $\{(0, 0)\} \cup \{(\theta_{q_1}, 0)\} \cup \{(0, \theta_{q_2})\}$ 的子集在 ∂P_0 中没有形成一个圈.

从而由文献[15]的定理 3 可得：存在 $\eta > 0$，使得对任意的 $(u_0, v_0) \in P_0$，有

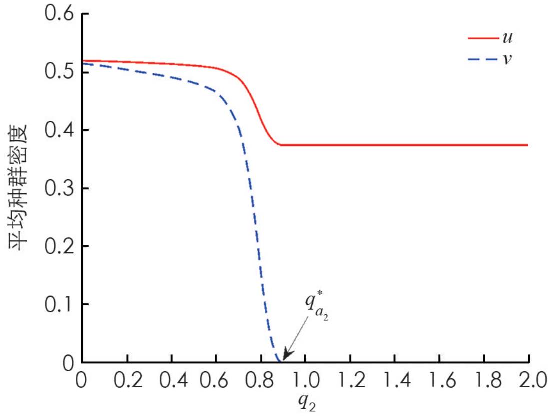
$$\min_{(u, v)\in\omega((u_0, v_0))} D((u, v)) > \eta$$

推出对任意的 $(u_0, v_0) \in P_0$，有 $\liminf\limits_{t\to\infty} u(x, t) \geqslant \eta$，$\liminf\limits_{t\to\infty} v(x, t) \geqslant \eta$. 即初始条件为 $(u_0, v_0) \in P_0$ 的系统(2)是一致持续的.

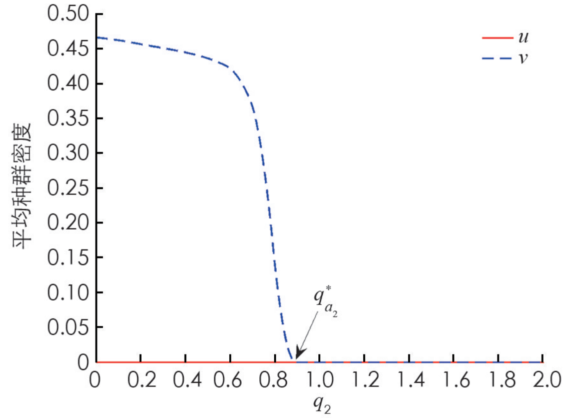
4 数值模拟

本节通过数值模拟研究对流速率对系统(2)动力学行为及种群空间分布的影响. 由前面的理论分析已经知道两个共生种群的对流速率 q_1,q_2 对系统(2)的动力学行为有很大的影响. 取 $d_1=0.01$, $d_2=0.02$, $a_1=2$, $a_2=3$, $K_1=0.4$, $K_2=0.5$, $b_1=0.3$, $b_2=0.1$, $c_1=0.1$, $c_2=0.2$ 和 $L=10$, 并通过改变 q_1,q_2 的值来观察系统(2)的各种动力学性态的变化.

首先, 取较小的对流速率 $q_1=0.1$ 使其满足 $0\leqslant q_1<q_{a_1}^*$, 研究对流速率 q_2 对系统(2)的性态的影响. 可以发现当 q_1 比较小时, 存在一个唯一的临界对流速率 $q_{a_2}^*$, 使得当对流速率 $q_2>q_{a_2}^*$ 时, 半平凡稳态解 $(\theta_{q_1},0)$ 是全局渐近稳定的; 当对流速率 q_2 满足 $0\leqslant q_2<q_{a_2}^*$ 时, 系统(2)存在正稳态解. 从生物学意义上讲, 当对流速率 q_1 足够小时, 如果对流速率 q_2 小于 $q_{a_2}^*$, 则两个共生物种将共存, 如果对流速率 q_2 大于 $q_{a_2}^*$, 则物种 u 存活, 物种 v 灭绝(图 1(a)). 其次, 选取较大的 $q_1=0.6$ 满足 $q_1>q_{a_1}^*$. 则当对流速率 q_2 满足 $0\leqslant q_2<q_{a_2}^*$ 时, 半平凡稳态解 $(0,\theta_{q_2})$ 全局渐近稳定, 即种群 u 灭绝而种群 v 持续生存; 当对流速率 q_2 满足 $q_2>q_{a_2}^*$ 时, 平凡稳态解 $(0,0)$ 全局渐近稳定, 即两个互惠种群都将灭绝(图 1(b)).



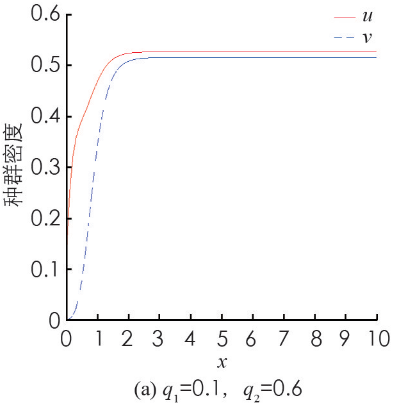
(a) $q_1=0.1$



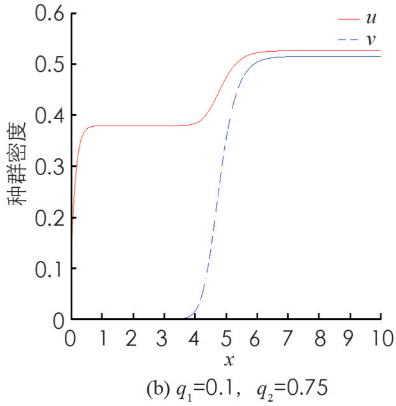
(b) $q_1=0.6$

图 1 对流速率 q_2 对系统(2)动力学性态的影响

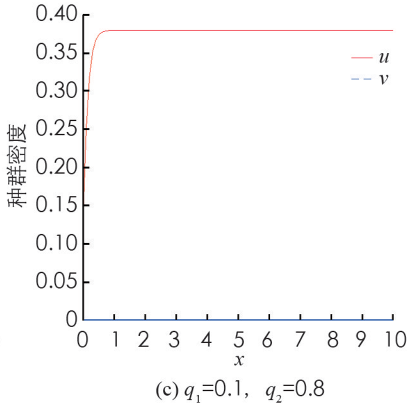
接下来, 我们关注对流速率对种群在河流[0, L]中密度分布的影响. 先固定对流速率 q_1, 然后取不同的 q_2 来观察这两个共生物种在河流[0, L]中的分布情况. 通过数值模拟发现, 当对流速率 q_2 很小时, 两个物种共存, 且在整条河流都有分布(图 2(a)). 当对流速率 q_2 逐渐增大时, 两个物种仍然可以共存, 但种群 v 已经被冲到河流下游, 生存区域变小, 导致平均密度降低, 同时使得互惠种群 u 的平均密度也降低(图 2(b)). 当对流速率 q_2 足够大时, 物种 v 将灭绝(图 2(c)). 对流速率 q_1 的变化对两个种群的密度分布影响是相似的, 在此不再赘述.



(a) $q_1=0.1$, $q_2=0.6$



(b) $q_1=0.1$, $q_2=0.75$



(c) $q_1=0.1$, $q_2=0.8$

图 2 对流速率 q_2 对系统(2)的种群密度分布的影响

5　结论及讨论

研究了对流环境中具有 Danckwerks 边界条件的互惠共生模型. 在 $q_1 - q_2$ 平面上存在两条临界曲线：$q_1 = q^*_{a_1}$，$q_2 = q^*_{a_2}$ 将系统(2) 的动力学行为划分为 4 种情况. 更准确地说，如果对流速率 q_1 和 q_2 都分别小于临界对流速率，则两个共生物种能持续生存；如果对流速率 q_1 和 q_2 都分别大于临界对流速率，则两个物种都将灭绝；如果对流速率满足 $q_1 > q^*_{a_1}$ 和 $0 \leqslant q_2 < q^*_{a_2}$，则物种 u 将灭绝，物种 v 存活下来；如果对流速率满足 $0 \leqslant q_1 < q^*_{a_1}$ 和 $q_2 > q^*_{a_2}$，则这两个物种的生存状态与前者相反. 与 ODE 系统(1) 相比，本文中的系统(2) 还存在其平凡稳态解和半平凡稳态解全局渐近稳定的情况. 然而在本文中共存稳态解的稳定性还没有得到解决，这是一个开放性的问题.

参考文献：

[1] WU J H，WEI G S. Coexistence States for Cooperative Model with Diffusion [J]. Computers & Mathematics With Applications，2002，43(10-11)：1277-1290.

[2] 姚晓洁，秦发金. 一类具有脉冲和收获率的 Lotla-Volterra 合作系统的 4 个正概周期解 [J]. 西南师范大学学报(自然科学版)，2016，41(11)：7-14.

[3] ALBRECHT F，GATZKE H，HADDAD A，et al. The Dynamics of Two Interacting Populations [J]. Journal of Mathematical Analysis and Applications，1974，46(3)：658-670.

[4] PAO C V. Strongly Coupled Elliptic Systems and Applications to Lotka-Volterra Models with Cross-Diffusion [J]. Nonlinear Analysis：Theory，Methods & Applications，2005，60(7)：1197-1217.

[5] ZHOU H，LIN Z G. Coexistence in a Strongly Coupled System Describing a Two-Species Cooperative Model [J]. Applied Mathematics Letters，2007，20(11)：1126-1130.

[6] ADAM B，LIN Z G，TARBOUSH A K. Coexistence in a Mutualistic Model with Cross-Diffusion in a Heterogeneous Environment [J]. International Journal of Biomathematics，2018，11(6)：1850078.

[7] LI M，LIN Z G. The Spreading Fronts in a Mutualistic Model with Advection [J]. Discrete & Continuous Dynamical Systems - B，2015，20(7)：2089-2105.

[8] ZHANG Q Y，WANG M X. Dynamics for the Diffusive Mutualist Model with Advection and Different Free Boundaries [J]. Journal of Mathematical Analysis and Applications，2019，474(2)：1512-1535.

[9] LOU Y，ZHOU P. Evolution of Dispersal in Advective Homogeneous Environment：The Effect of Boundary Conditions [J]. Journal of Differential Equations，2015，259(1)：141-171.

[10] LOU Y，NIE H，WANG Y E. Coexistence and Bistability of a Competition Model in Open Advective Environments [J]. Mathematical Biosciences，2018，306：10-19.

[11] NIE H，WANG B，WU J H. Invasion Analysis on a Predator-Prey System in Open Advective Environments [J]. Journal of Mathematical Biology，2020，81(6-7)：1429-1463.

[12] VASILYEVA O. Population Dynamics in River Networks：Analysis of Steady States [J]. Journal of Mathematical Biology，2019，79(1)：63-100.

[13] KREIN M G，RUTMAN M A. Linear Operators Leaving Invariant a Cone in a Banach Space [J]. Uspekhi Matematicheskikh Nauk，1948，3(1)：3-95.

[14] PAO C V. Nonlinear Parabolic and Elliptic Equations [M]. New York：Plenum Press，1992.

[15] SMITH H L，ZHAO X Q. Robust Persistence for Semidynamical Systems [J]. Nonlinear Analysis：Theory，Methods & Applications，2001，47(9)：6169-6179.

[16] ARSCOTT F M. Periodic-Parabolic Boundary Value Problems and Positivity [J]. Bulletin of the London Mathematical Society，1992，24(6)：619-620.

[17] MAGAL P，ZHAO X Q. Global Attractors and Steady States for Uniformly Persistent Dynamical Systems [J]. SIAM Journal on Mathematical Analysis，2005，37(1)：251-275.

责任编辑　张栒