

DOI:10.13718/j.cnki.xsxb.2022.03.007

一类成年捕食幼年的 同类相食种群模型的动力学分析^①

靳欢欢, 王文静, 黄启华

西南大学 数学与统计学院, 重庆 400715

摘要: 本文建立了一类成年捕食幼年的同类相食种群模型; 讨论了解的有界性、平衡点的存在性和稳定性, 通过 Dulac 定理排除了模型周期解的存在性, 从而得到了模型的全局动力学性态; 最后, 利用 Matlab 进行数值模拟, 验证了理论分析的结果, 显示了在一定条件下系统会呈现双稳性态.

关键词: 同类相食; 阶段结构; 稳定性; 双稳态

中图分类号: O175

文献标志码: A

文章编号: 1000-5471(2022)03-0052-09

Dynamic Analysis of a Cannibalistic Population Model in which Adults Prey on Juveniles

JIN Huanhuan, WANG Wenjing, HUANG Qihua

School of Mathematics and Statistics, Southwest University, Chongqing 400715, China

Abstract: In this paper, a cannibalism population model has been established in which adults prey on juveniles. We discuss the boundedness of solutions and the existence and stability of equilibrium points. The existence of periodic solution of model has been ruled out through the Dulac theorem, so as to get the global dynamics of model. And finally, the results of theoretical analysis have been verified by numerical simulations with Matlab. The results of numerical simulations show that the system exhibits bistability under certain conditions.

Key words: cannibalism; stage structure; stability; bistability

同类相食或种内捕食是一种生命特征, 它广泛存在于不同物种之间, 如鱼类、昆虫、原生动物、两栖动物、鸟类和哺乳动物等^[1-2]. 文献[3]研究了大西洋鳕鱼之间存在的同类相食现象, 文献[4]研究了亚利桑那州虎螭之间的同类相食现象. 由于这种现象往往发生在处于生命周期不同阶段的个体之间, 故近年来很多学者建立并研究了一系列关于同类相食种群的结构(包括大小结构、年龄结构、阶段结构等)种群模型^[5-11], 并分析了相应的动力学性态. 这些模型包括连续时间的一阶双曲偏微分方程、常微分方程以及离散

① 收稿日期: 2021-05-13

基金项目: 国家自然科学基金项目(11871060).

作者简介: 靳欢欢, 硕士研究生, 主要从事生物数学及动力系统理论及其应用研究.

通信作者: 黄启华, 教授, 博士生导师.

时间的差分方程等. 文献[11] 建立了以下具有同类相食的幼年—成年种群模型

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = by - gx - mx - kx^2 - \min\{cx, M\}y \\ \frac{dy}{dt} = gx - \mu y + e \min\{cx, M\}y \end{cases}$$

并分析了其全局动力学性态, 关于该模型的生物意义及详细的解释参考文献[11].

在上述模型的基础上, 考虑到在资源有限的条件下, 幼年个体之间及成年个体之间存在的竞争, 故研究以下模型:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = \frac{by}{1+\alpha x} - mx - gx - cxy \\ \frac{dy}{dt} = gx - \mu y + ecxy - ky^2 \end{cases} \quad (1)$$

其中: $x(t)$ 和 $y(t)$ 分别表示 t 时刻幼年个体、成年个体的数量, b 为成年个体的繁殖率, 非线性项 $\frac{1}{1+\alpha x}$ 表示幼年个体之间的竞争对幼年成活率的影响, 参数 α 表示拥挤效应系数, m 为单个幼年个体的自然死亡率, g 为幼年个体向成年个体的转化率, c 表示单个成年个体对幼年个体的捕获率, μ 为单个成年个体的自然死亡率, $e(0 < e \leq 1)$ 表示成年个体捕获幼年个体后的转化率, k 表示成年个体的竞争系数. 我们假设模型中的所有参数均为正常数.

1 解的非负性与有界性

下述定理表明了模型(1) 的解的非负性和有界性.

定理 1 $\mathbb{R}_+^2$ 是模型(1) 的解的正不变集, 且满足非负初始条件(即 $x(0) \geq 0, y(0) \geq 0$) 的解最终落入下列区域中.

$$\Omega = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq M, 0 \leq y \leq N\}$$

其中

$$M = \frac{1}{2\alpha} \left(\sqrt{1 + \frac{4ab}{c}} - 1 \right), N = \frac{1}{2k} [\sqrt{(ecM - \mu)^2 + 4gkM} + ecM - \mu]$$

证 对于模型(1), 当 $x > 0, y > 0$ 时, 有 $x'|_{x=0} = by > 0, y'|_{y=0} = gx > 0$. 因此 $\mathbb{R}_+^2$ 是模型(1) 的解的正不变集.

进一步, 由模型(1) 的第一个方程得

$$\frac{dx}{dt} \leq \frac{by}{1+\alpha x} - cxy = y \left(\frac{b}{1+\alpha x} - cx \right) = y \frac{c\alpha(M-x)(x+M')}{1+\alpha x}$$

其中,

$$M = \frac{1}{2\alpha} \left(\sqrt{1 + \frac{4ab}{c}} - 1 \right) > 0$$

$$M' = \frac{1}{2\alpha} \left(\sqrt{1 + \frac{4ab}{c}} + 1 \right) > 0$$

因此

$$0 \leq \limsup_{t \rightarrow \infty} x(t) \leq M$$

这意味着对于任意小的 $\epsilon > 0$, 存在 $T > 0$, 使得当 $t > T$ 时, 有 $x < M + \epsilon$. 所以由模型(1) 的第二个方程得

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dt} &\leq g(M + \epsilon) + ec(M + \epsilon)y - \mu y - ky^2 = -k \left[y^2 - \frac{ec(M + \epsilon) - \mu}{k} y - \frac{g(M + \epsilon)}{k} \right] = \\ &k(N_\epsilon - y)(y + N'_\epsilon) \end{aligned}$$

其中

$$N_{\epsilon} = \frac{1}{2k} [\sqrt{[ec(M+\epsilon) - \mu]^2 + 4gk(M+\epsilon)} + ec(M+\epsilon) - \mu] > 0$$

$$N'_{\epsilon} = \frac{1}{2k} [\sqrt{[ec(M+\epsilon) - \mu]^2 + 4gk(M+\epsilon)} - ec(M+\epsilon) + \mu] > 0$$

进一步有 $0 \leq \limsup_{t \rightarrow \infty} y(t) \leq N_{\epsilon}$. 由于 ϵ 是任意小的正数, 于是有

$$0 \leq \limsup_{t \rightarrow \infty} y(t) \leq N = \frac{1}{2k} [\sqrt{(ecM - \mu)^2 + 4gkM} + ecM - \mu]$$

因此, 满足非负初始条件的解最终落入区域 $\Omega = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq M, 0 \leq y \leq N\}$ 中, 其中

$$M = \frac{1}{2\alpha} \left(\sqrt{1 + \frac{4ab}{c}} - 1 \right), N = \frac{1}{2k} [\sqrt{(ecM - \mu)^2 + 4gkM} + ecM - \mu]$$

2 平衡点的存在性和局部稳定性

为了求得模型(1)的平衡点, 令模型(1)的右边为零, 得到

$$\begin{cases} \frac{by}{1+\alpha x} - mx - gx - cxy = 0 \\ gx - \mu y + ecxy - ky^2 = 0 \end{cases} \quad (2)$$

方程组(2)的正解即为模型(1)的内平衡点. 显然, 模型(1)总存在灭绝平衡点 $E_0 = (0, 0)$.

由方程组(2)的第一个方程可以得到

$$y = \frac{(m+g)(1+\alpha x)x}{b-cx(1+\alpha x)} \quad (3)$$

其中, 在 $(0, M)$ 内 $b-cx(1+\alpha x) > 0$, 当 $x \neq 0$ 时, 将(3)式代入方程组(2)的第二个方程有

$$g[b-cx(1+\alpha x)] = \frac{kx(m+g)^2(1+\alpha x)^2}{b-cx(1+\alpha x)} + (m+g)(\mu-ecx)(1+\alpha x) \quad (4)$$

记

$$G(x) = \frac{kx(m+g)^2(1+\alpha x)^2}{b-cx(1+\alpha x)} + (m+g)(\mu-ecx)(1+\alpha x) - g[b-cx(1+\alpha x)]$$

根据模型(1)的正不变集 Ω 可知, $G(x) = 0$ 在 $(0, M)$ 内的零点对应模型(1)内平衡点的横坐标 x . 可以通过判断方程 $G(x) = 0$ 在区间 $(0, M)$ 内根的存在性确定模型(1)内平衡点的存在性.

对函数 $G(x)$ 求导得到

$$\begin{aligned} G'(x) &= \frac{k(m+g)^2(1+\alpha x)(1+3\alpha x)}{b-cx(1+\alpha x)} + \frac{ck(m+g)^2x(1+\alpha x)^2(1+2\alpha x)}{[b-cx(1+\alpha x)]^2} + \\ &\quad 2ca[g-e(m+g)]x + \alpha\mu(m+g) + c[g-e(m+g)] \\ G''(x) &= 2k(m+g)^2 \left[\frac{\alpha(2+3\alpha x)}{b-cx(1+\alpha x)} + \frac{c(1+7\alpha x+13\alpha^2x^2+7\alpha^3x^3)}{[b-cx(1+\alpha x)]^2} + \frac{c^2x(1+\alpha x)^2(1+2\alpha x)^2}{[b-cx(1+\alpha x)]^3} \right] + \\ &\quad 2ca[g-e(m+g)] \\ G'''(x) &= 2k(m+g)^2 \left[\frac{3\alpha^2}{b-cx(1+\alpha x)} + \frac{c\alpha(9+33\alpha x+27\alpha^2x^2)}{[b-cx(1+\alpha x)]^2} + \right. \\ &\quad \left. \frac{c^2(1+2\alpha x)(3+24\alpha x+45\alpha^2x^2+24\alpha^3x^3)}{[b-cx(1+\alpha x)]^3} + \frac{3c^3x(1+\alpha x)^2(1+2\alpha x)^3}{[b-cx(1+\alpha x)]^4} \right] \end{aligned}$$

易知函数 $G(x)$ 有以下性质:

$$G(0) = \mu(m+g) - bg$$

$$G'(0) = \frac{k(m+g)^2}{b} + \alpha\mu(m+g) + c[g-e(m+g)]$$

$$\lim_{x \rightarrow M} G(x) = +\infty, \lim_{x \rightarrow M} G'(x) = +\infty, \lim_{x \rightarrow M} G''(x) = +\infty, G'''(x) > 0$$

于是关于方程 $G(x) = 0$ 正根的存在性有如下几种情形:

(i) 当 $g \geq e(m+g)$ 时, 有 $G'(x) > 0$, 当且仅当 $G(0) < 0$ 时函数 $G(x)$ 在区间 $(0, M)$ 内有唯一零点, 记为 x^* .

(ii) 当 $g < e(m+g)$ 时, 由于 $G'''(x) > 0$, 故若 $G''(0) > 0$ 时有 $G''(x) > 0$, 即 $G(x)$ 的图形是上凹的, 若 $G''(0) < 0$, 则存在 x_0 使得 $G(x)$ 在区间 $(0, x_0)$ 内是凸的, 在区间 (x_0, M) 内是凹的. 此时, 如果 $G'(x) = 0$, 则 $G(x)$ 在区间 $(0, M)$ 内有唯一的极小值点 $\bar{x}$. 其中 $x_0 < \bar{x}$. 故

- ① 若 $G(0) < 0$ 或 $G(0) = 0$ 且 $G'(0) < 0$, 则函数 $G(x)$ 在区间 $(0, M)$ 内有唯一零点, 记为 x^* .
- ② 若 $G(0) > 0$, $G'(0) < 0$ 且 $G(\bar{x}) < 0$, 则函数 $G(x)$ 在区间 $(0, M)$ 内有两个不同的零点, 分别记为 x_* 和 x^* , 其中 $x_* < \bar{x} < x^*$.
- ③ 若 $G(0) > 0$, $G'(0) < 0$ 且 $G(\bar{x}) = 0$, 则函数 $G(x)$ 在区间 $(0, M)$ 内有一个二重零点, 记为 $\bar{x}$. 当 $G(0) = 0$ 时,

$$G'(0) = \frac{g}{\mu^2} [gbk - \mu(bec - \mu c - ab\mu)]$$

因此, 关于模型(1) 在正不变集 Ω 上平衡点的存在性有如下定理:

- 定理 2** (i) 当满足下列条件之一时, 模型(1) 在区域 Ω 上有唯一的内平衡点 $E^* = (x^*, y^*)$,
- ① $\mu(m+g) < bg$ (图 1(a));
 - ② $\mu(m+g) = bg$ 且 $gbk < \mu(bec - \mu c - ab\mu)$ (图 1(b)).
- (ii) 当 $\mu(m+g) > bg$, $\frac{k(m+g)^2}{b} + \alpha\mu(m+g) + c[g - e(m+g)] < 0$ 且 $G(\bar{x}) < 0$ 时, 模型(1) 在区域 Ω 上有两个内平衡点 $E_* = (x_*, y_*)$ 和 $E^* = (x^*, y^*)$, 其中 $x_* < \bar{x} < x^*$ (图 1(c)).
- (iii) 当 $\mu(m+g) > bg$, $\frac{k(m+g)^2}{b} + \alpha\mu(m+g) + c[g - e(m+g)] < 0$ 且 $G(\bar{x}) = 0$ 时, 模型(1) 在区域 Ω 上有唯一的内平衡点 $\bar{E} = (\bar{x}, \bar{y})$ (图 1(d)).
- 注: 其中 y_*, y^* 和 $\bar{y}$ 均由式子 $y = \frac{(m+g)(1+\alpha x)x}{b-cx(1+\alpha x)}$ 和对应的 x 给出; 由于 $G'(0) < 0$ 意味着 $g < e(m+g)$, 因此定理 2 中的(i)②, (ii), (iii) 未明确指出 $g < e(m+g)$.

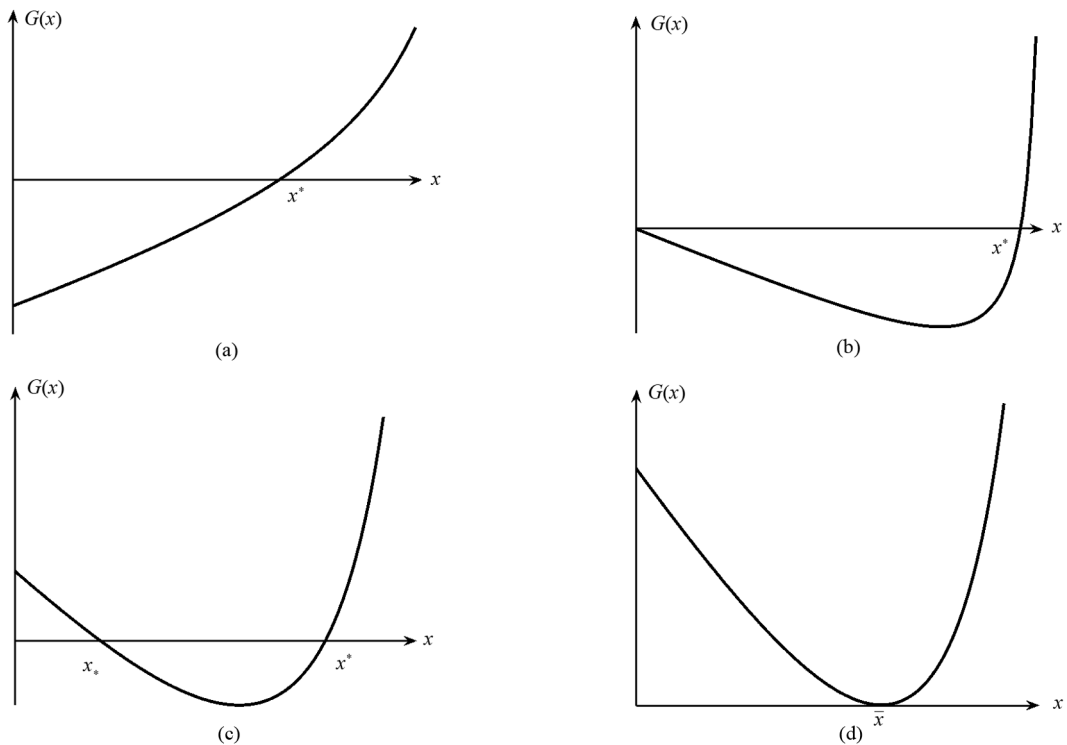


图 1 $G(x)$ 的图像

关于模型(1)的平衡点的局部稳定性有如下结论:

定理 3 (i) 对于模型(1)的灭绝平衡点 $E_0 = (0, 0)$, 当 $\mu(m+g) > bg$ 或 $\mu(m+g) = bg$ 且 $\mu(bec - \mu c - ab\mu) \leq gb k$ 时是渐近稳定的; 当 $\mu(m+g) < bg$ 或 $\mu(m+g) = bg$ 且 $\mu(bec - \mu c - ab\mu) > gb k$ 时是不稳定的.

(ii) 对于内平衡点, E^* 是不稳定的, E^* 是渐近稳定的, $\bar{E}$ 是鞍结点.

证 (i) 模型(1)在 $E_0 = (0, 0)$ 处的 Jacobi 矩阵为

$$J(E_0) = \begin{pmatrix} -m-g & b \\ g & -\mu \end{pmatrix}$$

则它的特征值分别为

$$\lambda_{1,2} = \frac{1}{2}[-(m+\mu+g) \mp \sqrt{(m+\mu+g)^2 - 4(\mu(m+g) - bg)}]$$

易知, 当 $\mu(m+g) > bg$ 时 $\lambda_1 < \lambda_2 < 0$, 故 $E_0 = (0, 0)$ 是稳定的结点; 当 $\mu(m+g) < bg$ 时 $\lambda_1 < 0 < \lambda_2$, 故 $E_0 = (0, 0)$ 是不稳定的鞍点; 当 $\mu(m+g) = bg$ 时 $\lambda_1 < 0 = \lambda_2$, 故 $E_0 = (0, 0)$ 是高阶奇点.

为了分析当 $\mu(m+g) = bg$ 时平衡点 $E_0 = (0, 0)$ 的稳定性, 将模型(1)在原点处线性化得

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -(m+g)x + by - (b\alpha + c)xy + o(|x, y|^3) \\ \frac{dy}{dt} = gx - \mu y + ecxy - ky^2 \end{cases} \quad (5)$$

做以下变换

$$\begin{cases} x = \mu u + bv \\ y = gu - \mu v \end{cases}$$

则模型(5)变为

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} = \frac{1}{gb + \mu^2} [gAu^2 + Buv - b\mu Cv^2 + o(|u, v|^3)] \\ \frac{dv}{dt} = -\left(\frac{gb}{\mu} + \mu\right)v - \frac{1}{gb + \mu^2} [\mu g Du^2 + Fuv + \mu H v^2 + o(|u, v|^3)] \end{cases} \quad (6)$$

其中

$$\begin{aligned} A &= \mu(bec - \mu c - ab\mu) - gb k \\ B &= (bec - \mu c - ab\mu)(gb - \mu^2) + 2bk g \mu \\ C &= bec - \mu c - ab\mu + k \mu \\ D &= ec\mu + bag + cg - kg \\ F &= (gc + bag + ec\mu)(gb - \mu^2) + 2kg \mu^2 \\ H &= bcg + b^2 \alpha g + ebc\mu + k \mu^2 \end{aligned}$$

系统(6)的线性部分满足局部中心流形存在的条件^[12], 故设系统(6)在原点处的局部中心流形为 $v =$

$h(u) = au^2 + o(u^3)$, 两边关于 t 求导得 $\frac{dv}{dt} = [2au + o(u^2)] \frac{du}{dt}$, 结合系统(6)可得

$$\begin{aligned} & -\left(\frac{gb}{\mu} + \mu\right)v - \frac{1}{gb + \mu^2} [\mu g Du^2 + Fuv + \mu H v^2 + o(|u, v|^3)] = \\ & \frac{1}{gb + \mu^2} [gAu^2 + Buv - b\mu Cv^2 + o(|u, v|^3)] [2au + o(u^2)] \end{aligned} \quad (7)$$

将 $v = h(u) = au^2 + o(u^3)$ 代入(7)式, 并比较左右两边 u 的同次幂系数可得

$$a = -\frac{g\mu^2 D}{(gb + \mu^2)^2} = -\frac{g\mu^2}{(gb + \mu^2)^2} (ec\mu + bag + cg - kg)$$

即

$$v = -\frac{g\mu^2}{(gb + \mu^2)^2} (ec\mu + bag + cg - kg) u^2 + o(u^3) \quad (8)$$

将(8)式代入系统(6)的第一个方程,得到中心流形上的解满足

$$\frac{du}{dt} = \frac{g[\mu(bec - \mu c - ab\mu) - gbk]}{g b + \mu^2} u^2 - \frac{g\mu^2 B}{(gb + \mu^2)^3} (ec\mu + bag + cg - kg) u^3 + o(u^4)$$

若 $\mu(bec - \mu c - ab\mu) - gbk \neq 0$, 则 $E_0 = (0, 0)$ 为鞍结点. 若 $\mu(bec - \mu c - ab\mu) < gbk$, 则在 $u > 0$ 一侧 $E_0 = (0, 0)$ 是渐近稳定的; 若 $\mu(bec - \mu c - ab\mu) > gbk$, 则在 $u > 0$ 一侧 $E_0 = (0, 0)$ 为鞍点, 是不稳定的.

若 $\mu(bec - \mu c - ab\mu) = gbk$, 则

$$\frac{du}{dt} = -\frac{g^2 k \mu}{(gb + \mu^2)^2} (c\mu^2 + ab\mu^2 + b^2 ag + bc\mu) u^3 + o(u^4)$$

因此, 当 $\mu(bec - \mu c - ab\mu) = gbk$ 时, $E_0 = (0, 0)$ 是渐近稳定的. 综上所述, 当 $\mu(m + g) > bg$ 或 $\mu(m + g) = bg$ 且 $\mu(bec - \mu c - ab\mu) \leq gbk$ 时, $E_0 = (0, 0)$ 是渐近稳定的; 当 $\mu(m + g) < bg$ 或 $\mu(m + g) = bg$ 且 $\mu(bec - \mu c - ab\mu) > gbk$ 时, $E_0 = (0, 0)$ 是不稳定的.

(ii) 下面讨论模型(1)的内平衡点的稳定性.

模型(1)在任一内平衡点 E 处的 Jacobi 矩阵为

$$J(E) = \begin{pmatrix} -\frac{aby}{(1+ax)^2} - (m+g) - cy & \frac{b}{1+ax} - cx \\ ecy + g & ecx - \mu - 2ky \end{pmatrix}$$

由方程组(2)的第一个方程可知

$$-\frac{aby}{(1+ax)^2} - (m+g) - cy = -\frac{aby}{(1+ax)^2} - \frac{by}{x(1+ax)} = -\frac{by(1+2ax)}{x(1+ax)^2}$$

$$\frac{b}{1+ax} - cx = \frac{(m+g)x}{y}$$

由方程组(2)的第二个方程可知

$$ecx - \mu - 2ky = -\left(ky + \frac{gx}{y}\right)$$

故

$$J(E) = \begin{pmatrix} -\frac{by(1+2ax)}{x(1+ax)^2} & \frac{(m+g)x}{y} \\ ecy + g & -\left(ky + \frac{gx}{y}\right) \end{pmatrix}$$

从而

$$\text{tr}(J(E)) = -\frac{by(1+2ax)}{x(1+ax)^2} - \left(ky + \frac{gx}{y}\right) < 0 \quad (9)$$

$$\det(J(E)) = \frac{by(1+2ax)}{x(1+ax)^2} \left(ky + \frac{gx}{y}\right) - \frac{(m+g)x}{y} (ecy + g) =$$

$$\frac{k(m+g)y(1+3ax)}{1+ax} + \frac{cky^2(1+2ax)}{1+ax} + \frac{gcx(1+2ax)}{1+ax} +$$

$$\frac{\alpha(m+g)x(\mu - ecx)}{1+ax} - ec(m+g)x \quad (10)$$

将(3)式代入(10)式可得

$$\det(J(E)) = \frac{k(m+g)^2 x(1+3ax)}{b - cx(1+ax)} + \frac{ck(m+g)^2 x^2(1+ax)(1+2ax)}{[b - cx(1+ax)]^2} +$$

$$\frac{gcx(1+2ax)}{1+ax} + \frac{\alpha(m+g)x(\mu - ecx)}{1+ax} - ec(m+g)x =$$

$$\frac{x}{1+ax} \left[\frac{k(m+g)^2(1+ax)(1+3ax)}{b - cx(1+ax)} + \frac{ck(m+g)^2 x(1+ax)^2(1+2ax)}{[b - cx(1+ax)]^2} + \right.$$

$$2c\alpha[g - e(m + g)]x + \alpha\mu(m + g) + c[g - e(m + g)] = \frac{x}{1 + \alpha x} G'(x)$$

对于内平衡点 $E^* = (x^*, y^*)$, 有 $G'(x^*) > 0$, 即 $\det(J(E^*)) > 0$, 因此 E^* 是渐近稳定的; 对于内平衡点 $E_* = (x_*, y_*)$, 有 $G'(x_*) < 0$, 即 $\det(J(E_*)) < 0$, 因此 E_* 是不稳定的; 对于内平衡点 $\bar{E} = (\bar{x}, \bar{y})$, 有 $G'(\bar{x}) = 0$, 即 $\det(J(\bar{E})) = 0$, 此时 E_* 和 E^* 重合为一个平衡点 $\bar{E}$, 它是一个鞍结点.

3 平衡点的全局稳定性

在这一节, 讨论平衡点的全局稳定性.

定理 4 系统(1) 没有闭轨.

证 令

$$P(x, y) = \frac{by}{1 + \alpha x} - mx - gx - cxy$$

$$Q(x, y) = gx - \mu y + ecxy - ky^2$$

取 Dulac 函数 $B(x, y) = \frac{1}{xy}$, 则

$$B(x, y)P(x, y) = \frac{b}{x(1 + \alpha x)} - \frac{m}{y} - \frac{g}{y} - c$$

$$B(x, y)Q(x, y) = \frac{g}{y} - \frac{\mu}{x} + ec - \frac{ky}{x}$$

向量域 $\langle BP, BQ \rangle$ 的梯度为

$$\nabla \cdot \langle BP, BQ \rangle = \frac{\partial(BP)}{\partial x} + \frac{\partial(BQ)}{\partial y} = - \left[\frac{b(1 + 2\alpha x)}{x^2(1 + \alpha x)^2} + \frac{g}{y^2} + \frac{k}{x} \right]$$

当 $x > 0, y > 0$ 时, $\nabla \cdot \langle BP, BQ \rangle$ 严格小于零. 由 Dulac 判别法知, 不存在完全含于 xy 平面第一象限的闭轨.

定理 5 对于模型(1),

(i) 若只存在灭绝平衡点 $E_0 = (0, 0)$, 则一定是全局渐近稳定的.

(ii) 若 $\mu(m + g) < bg$, 则内平衡点 $E^* = (x^*, y^*)$ 是全局渐近稳定的.

证 (i) 若只存在灭绝平衡点 $E_0 = (0, 0)$, 则一定有 $\mu(m + g) > bg$, 此时 $E_0 = (0, 0)$ 是渐近稳定的, 又因为系统(1) 没有闭轨, 根据 Poincaré-Bendixson 定理知, 第一象限的任一轨道都收敛至灭绝平衡点 $E_0 = (0, 0)$.

(ii) 当 $\mu(m + g) < bg$ 时, 系统(1) 存在灭绝平衡点 $E_0 = (0, 0)$ 和内平衡点 $E^* = (x^*, y^*)$, 其中 $E_0 = (0, 0)$ 是不稳定的, $E^* = (x^*, y^*)$ 是渐近稳定的, 又因为系统(1) 没有闭轨, 根据 Poincaré-Bendixson 定理知, 第一象限的任一轨道都收敛至稳定的内平衡点 $E^* = (x^*, y^*)$.

4 数值模拟

以下对本文建立的模型进行数值模拟, 以此来验证以上分析的正确性.

1) 取参数为 $b = 0.58, \alpha = 0.01, m = 0.3, \mu = 0.3, g = 0.3, c = 0.1, e = 0.5, k = 0.05$, 此时 $\mu(m + g) > bg$, 模型(1) 的灭绝平衡点 $E_0 = (0, 0)$ 在 Ω 上是全局渐近稳定的(图 2(a)).

2) 取参数为 $b = 0.8, \alpha = 0.01, m = 0.3, \mu = 0.3, g = 0.3, c = 0.7, e = 0.3, k = 0.05$, 此时 $\mu(m + g) < bg$, 模型(1) 在 Ω 上存在唯一的内平衡点 $E^* = (0.478\ 43, 0.622\ 3)$, 该平衡点 $E^* = (0.478\ 43, 0.622\ 3)$ 是全局渐近稳定的(图 2(b)).

3) 取参数为 $b = 0.48, \alpha = 0.03, m = 0.3, \mu = 0.3, g = 0.483, c = 0.15, e = 0.752\ 3, k = 0.002$, 此

时, $\bar{x} = 1.419\ 6$, 且 $\mu(m+g) > bg$, $\frac{k(m+g)^2}{b} + \alpha\mu(m+g) + c[g - e(m+g)] < 0$, $G(\bar{x}) < 0$, 模型(1) 在 Ω 上存在两个内平衡点 $E_* = (0.513\ 5, 1.016\ 1)$, $E^* = (1.971\ 8, 9.807\ 3)$. 其中, 灭绝平衡点 E_0 是局部渐近稳定的, 内平衡点 E_* 是不稳定鞍点, E^* 是局部渐近稳定的. 此时种群发展的最终状态取决于模型(1) 的初始条件, 初始值位于 E_* 稳定流形下方的解将会收敛至灭绝平衡点 E_0 , 初始值位于 E_* 稳定流形上方的解将会收敛至内平衡点 E^* , 初始值在 E_* 稳定流形上的解将会收敛至内平衡点 E_* . 因此双稳定现象发生(图 2(c) 中粗线代表它的稳定流形).

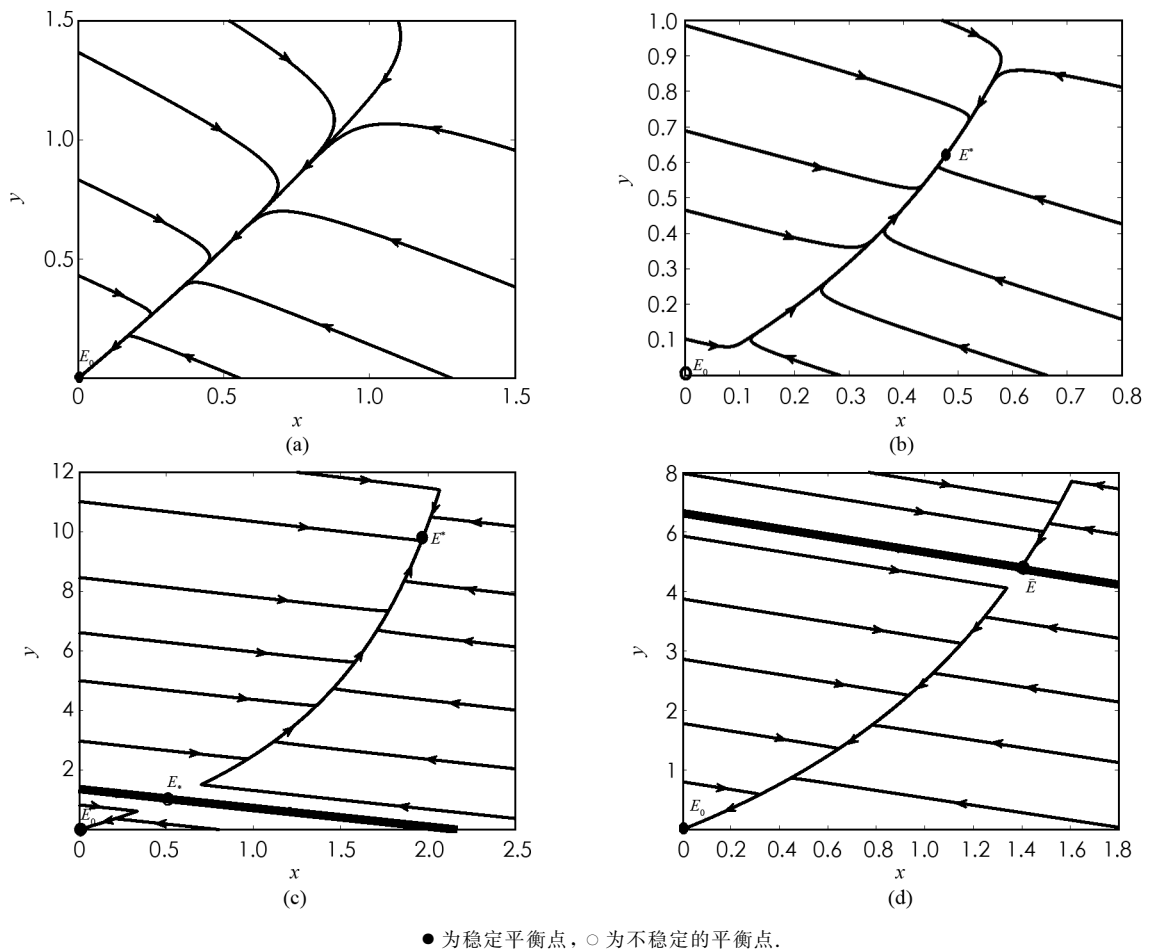


图 2 模型(1) 在各个条件下的相图

4) 取参数为 $b=0.475\ 86$, $\alpha=0.03$, $m=0.3$, $\mu=0.301\ 122\ 16$, $g=0.483$, $c=0.149$, $e=0.752\ 3$, $k=0.002$, 此时, $\bar{x} = 1.399$, 且 $\mu(m+g) > bg$, $\frac{k(m+g)^2}{b} + \alpha\mu(m+g) + c[g - e(m+g)] < 0$, $G(\bar{x}) = 0$, 模型(1) 在 Ω 上存在唯一内平衡点 $\bar{E} = (1.399, 4.412\ 7)$. 其中, 灭绝平衡点 E_0 是局部渐近稳定的, 内平衡点 $\bar{E}$ 是鞍结点. 此时种群发展的最终状态取决于模型(1) 的初始条件, 初始值位于 $\bar{E}$ 稳定流形下方的解将会收敛至灭绝平衡点 E_0 , 初始值位于 $\bar{E}$ 稳定流形上方或在稳定流形上的解将会收敛至内平衡点 $\bar{E}$. 因此双稳定现象发生(图 2(d) 中粗线代表它的稳定流形).

5 结语

本文讨论了一个由常微分方程系统给出的幼年—成年两阶段结构模型, 描述了其同类相食的动力学行为. 分析了模型平衡点的存在性和稳定性, 通过 Dulac 定理排除了模型周期解的存在性, 从而得到了模型的全局动力学行为. 通过对相应结果进行数值模拟发现在一定条件下系统会出现双稳定现象. 值得思考的是, 该模型忽略了环境中的资源与同类相食行为之间的相互作用. 为了了解这二者的相互作用如何影响种群的

长期动力学行为,下一阶段将对模型(1)做一些改进,考虑把资源作为状态变量或重要参数,使其更具有现实意义.

参考文献:

- [1] FOX L R. Cannibalism in Natural Populations [J]. Annual Review of Ecology and Systematics, 1975, 6(1): 87-106.
- [2] POLIS G A. The Evolution and Dynamics of Intraspecific Predation [J]. Annual Review of Ecology and Systematics, 1981, 12(1): 225-251.
- [3] WIKAN A, EIDE A. An Analysis of a Nonlinear Stage-Structured Cannibalism Model with Application to the Northeast Arctic Cod Stock [J]. Bulletin of Mathematical Biology, 2004, 66(6): 1685-1704.
- [4] MCCARTHY M L, WHITEMAN H H. A Model of Inter-Cohort Cannibalism and Paedomorphosis in Arizona Tiger Salamanders, *Ambystoma Tigrinum Nebulosum* [J]. International Journal of Biomathematics, 2016, 9(2): 49-65.
- [5] PERSSON L, CLAESSEN D, DE ROOS A M, et al. Cannibalism in a size-Structured Population: Energy Extraction and Control [J]. Ecological Monographs, 2004, 74(1): 135-157.
- [6] DIEKMANN O, NISBET R M, GURNEY W S C, et al. Simple Mathematical Models for Cannibalism: a Critique and a New Approach [J]. Mathematical Biosciences, 1986, 78(1): 21-46.
- [7] KANG Y, RODRIGUEZ-RODRIGUEZ M, EVILSIZOR S. Ecological and Evolutionary Dynamics of Two-Stage Models of Social Insects with Egg Cannibalism [J]. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 2015, 430(1): 324-353.
- [8] SAITO Y, JUNG C, LIM Y. Effects of Cannibalism on a Basic Stage Structure [J]. Applied Mathematics and Computation, 2010, 217(5): 2133-2141.
- [9] LI J, CAI L M, LI Y. Stage-Structured Wild and Sterile Mosquito Population Models and Their Dynamics [J]. Journal of Biological Dynamics, 2017, 11(sup1): 79-101.
- [10] VEPRASKAS A, CUSHING J M. A Juvenile-Adult Population Model: Climate Change, Cannibalism, Reproductive Synchrony, and Strong Allee Effects [J]. Journal of Biological Dynamics, 2017, 11(sup1): 1-24.
- [11] LI X, HUANG Q H. Global Analysis of a Juvenile-Adult Model for Cannibalistic Species [J]. International Journal of Biomathematics, 2021, 14(6): 1-22.
- [12] 马知恩, 周义仓, 李承治. 常微分方程定性及稳定性方法 [M]. 2 版. 北京: 科学出版社, 2015.

责任编辑 张枸