第 47 卷 第 3 期 西南师范大学学报(自然科学版) 2022 年 3 月
Vol. 47 No. 3 Journal of Southwest China Normal University (Natural Science Edition) Mar. 2022

DOI:10.13718/j.cnki.xsxb.2022.03.008

解非线性半定规划的一种回溯线搜索型算法①

李丹丹[1], 王松华[2], 李远飞[1]

1. 广州华商学院 应用数学系,广州 511300;
2. 百色学院 数学与统计学院,广西 百色 533000

摘要:为避免罚函数和滤子的缺点,提高带有等式约束和半负定矩阵约束的非线性半定规划求解效率,本文通过二次半定子问题构建搜索方向,结合回溯线搜索技术和非单调充分下降性条件,提出了一种新的无罚函数无滤子的线搜索型序列半定规划算法.在合理的假设条件下,证明了新算法的适定性以及全局收敛性,最后通过初步的数值试验验证了新算法的有效性.

关 键 词:序列半定规划;回溯线搜索;非单调;全局收敛性

中图分类号:O221 **文献标志码**:A **文章编号**:1000-5471(2022)03-0061-11

A Backtracking Line Search Method for Nonlinear Semidefinite Programming

LI Dandan[1], WANG Songhua[2], LI Yuanfei[1]

1. Department of Applied Mathematics, Guangzhou Huashang College, Guangzhou 511300, China;
2. School of Mathematics and Statistics, Baise University, Baise Guangxi 533000, China

Abstract: In order to avoid the fault of penalty function and filter and improve the efficiency of solving nonlinear semidefinite programming with equality constraints and matrix inequality constraints, by computing a search direction by quadratic semidefinite subproblem and adopting backtracking line search technique and nonmonotonically sufficient descent trait, a sequential semidefinite programming algorithm without penalty function and filter on the line search method has been put forward. Under some reasonable assumptions, the proposed algorithm is well defined and globally convergent. Finally, the preliminary numerical results show that it is highly efficient.

Key words: Quadratic semidefinte programming; backtracking line search; nonmonotone; global convergence

---

① 收稿日期:2020-10-18
基金项目:广西自然科学基金项目(2020GXNSFAA159069);广东省普通高校创新团队项目(2020WCXTD008);广州华商学院校内项目(2021HSDS32).
作者简介:李丹丹,硕士,主要从事最优化方法与应用的研究.
通信作者:王松华,副教授.

考虑如下非线性半定规划问题(NLSDP):

$$\begin{aligned} &\min f(\boldsymbol{x}) \\ &\text{s. t.}\ \boldsymbol{h}(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{0} \\ &\boldsymbol{G}(\boldsymbol{x}) \preceq \boldsymbol{0} \end{aligned} \tag{1}$$

其中:$f:\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$,$\boldsymbol{h}:\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^p$ 和 $\boldsymbol{G}:\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{S}^m$ 都是连续可微函数,记 $\mathbb{S}^m$ 为 m 阶实对称矩阵组成的线性空间,$\preceq$ 为矩阵偏序,即 $\boldsymbol{A} \preceq \boldsymbol{B}$ 当且仅当 $\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}$ 是非负定矩阵.

线性半定规划[1-2]是优化领域中最经典的问题,然而众多实际问题属于非线性半定规划问题,如工程设计、最优控制、经济、金融等领域[3-4]. 因此,非线性半定规划的研究具有理论创新和实际应用的意义. 若干有效方法可求解非线性半定规划问题且其效果显著,如增广拉格朗日方法[5]、序列半定规划方法[6]、序列线性方程组方法[7]、乘子法[8]、原始-对偶内点法[9],其中序列半定规划方法应用较广. 很多学者将优良的非线性规划算法推广到非线性半定规划问题中,如文献[10]借鉴传统非线性规划的子问题修正技术,并结合信赖域框架,提出了求解非线性半定规划的一个无可行性恢复阶段的滤子算法. 文献[11]采用非单调线搜索技术来保证目标函数或约束违反度函数的充分下降,从而提出一个求解非线性半定规划的无罚无滤序列二次半定规划算法. 文献[12]提出一个求解带有不等式约束的非线性规划全局收敛性算法,该算法的接受准则既不使用罚函数也不使用滤子,且效果显著. 本文在文献[12]的基础上,将该思想推广到非线性半定规划中,提出一个求解非线性半定规划问题的无罚函数无滤子回溯线搜索型序列半定规划算法.

1 算法描述

二阶连续可微函数 $f(\boldsymbol{x})$ 的梯度和 Hesse 矩阵分别记为 $\nabla f(\boldsymbol{x})$ 和 $\nabla^2 f(\boldsymbol{x})$. 二阶连续可微向量函数 $\boldsymbol{h}(\boldsymbol{x}):=(h_1(\boldsymbol{x}), h_2(\boldsymbol{x}), \cdots, h_p(\boldsymbol{x}))^{\mathrm{T}}$,则称矩阵 $\mathrm{D}\boldsymbol{h}(\boldsymbol{x})=(\nabla h_1(\boldsymbol{x}), \nabla h_2(\boldsymbol{x}), \cdots, \nabla h_p(\boldsymbol{x}))^{\mathrm{T}} \in \mathbb{R}^{p\times n}$ 为 $\boldsymbol{h}(\boldsymbol{x})$ 的雅可比矩阵. 二阶连续可微矩阵函数 $\boldsymbol{G}(\boldsymbol{x})$,记其微分算子 $\mathrm{D}\boldsymbol{G}(\boldsymbol{x})$ 为

$$\mathrm{D}\boldsymbol{G}(\boldsymbol{x}):=\left(\frac{\partial \boldsymbol{G}(\boldsymbol{x})}{\partial x_1}, \frac{\partial \boldsymbol{G}(\boldsymbol{x})}{\partial x_2}, \cdots, \frac{\partial \boldsymbol{G}(\boldsymbol{x})}{\partial x_n}\right)$$

且对任意的 $\boldsymbol{d} \in \mathbb{R}^n$

$$\mathrm{D}\boldsymbol{G}(\boldsymbol{x})\boldsymbol{d}:=\sum_{i=1}^{n} d_i \frac{\partial \boldsymbol{G}(\boldsymbol{x})}{\partial x_i}$$

记其伴随算子 $\mathrm{D}\boldsymbol{G}(\boldsymbol{x})^*$ 为

$$\mathrm{D}\boldsymbol{G}(\boldsymbol{x})^*\boldsymbol{Z}:=\left(\left\langle\frac{\partial \boldsymbol{G}(\boldsymbol{x})}{\partial x_1}, \boldsymbol{Z}\right\rangle, \left\langle\frac{\partial \boldsymbol{G}(\boldsymbol{x})}{\partial x_2}, \boldsymbol{Z}\right\rangle, \cdots, \left\langle\frac{\partial \boldsymbol{G}(\boldsymbol{x})}{\partial x_n}, \boldsymbol{Z}\right\rangle\right)^{\mathrm{T}}$$

其中 $\boldsymbol{Z} \in \mathbb{S}^m$.

记 NLSDP(1) 的拉格朗日函数为

$$L(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{Y})=f(\boldsymbol{x})+\boldsymbol{\lambda}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{h}(\boldsymbol{x})+\langle \boldsymbol{Y}, \boldsymbol{G}(\boldsymbol{x})\rangle$$

其中 $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$,$\boldsymbol{\lambda} \in \mathbb{R}^p$,$\boldsymbol{Y} \in \mathbb{S}^m$.

定义 1 若 $\boldsymbol{x}^* \in \mathbb{R}^n$ 是 NLSDP(1) 的可行点,且存在向量 $\boldsymbol{\lambda}^* \in \mathbb{R}^p$ 和矩阵 $\boldsymbol{Y}_* \in \mathbb{S}^m$ 满足如下条件:

$$\nabla_x L(\boldsymbol{x}^*, \boldsymbol{\lambda}^*, \boldsymbol{Y}_*)=\nabla f(\boldsymbol{x}^*)+\mathrm{D}\boldsymbol{h}(\boldsymbol{x}^*)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\lambda}^*+\mathrm{D}\boldsymbol{G}(\boldsymbol{x}^*)^*\boldsymbol{Y}_*=\boldsymbol{0}$$

$$\boldsymbol{h}(\boldsymbol{x}^*)=\boldsymbol{0}, \boldsymbol{G}(\boldsymbol{x}^*) \preceq \boldsymbol{0}, \boldsymbol{Y}_* \succeq \boldsymbol{0}, \langle \boldsymbol{G}(\boldsymbol{x}^*), \boldsymbol{Y}_*\rangle=\boldsymbol{0}$$

则称$(\boldsymbol{x}^*, \boldsymbol{\lambda}^*, \boldsymbol{Y}_*)$是 NLSDP(1) 的一个 KKT 点对,$(\boldsymbol{\lambda}^*, \boldsymbol{Y}_*)$是在 $\boldsymbol{x}^*$ 处相对应的拉格朗日乘子.

定义 2 若 $\boldsymbol{x}^* \in \mathbb{R}^n$ 是 NLSDP(1) 的可行点,$\{\nabla h_i(\boldsymbol{x}^*)\}_{i=1}^{p}$ 线性无关,且存在向量 $\boldsymbol{d} \in \mathbb{R}^n$ 使得 $\mathrm{D}\boldsymbol{h}(\boldsymbol{x}^*)\boldsymbol{d}=\boldsymbol{0}$,$\boldsymbol{G}(\boldsymbol{x}^*)+\mathrm{D}\boldsymbol{G}(\boldsymbol{x}^*)\boldsymbol{d} \prec \boldsymbol{0}$,则称 NLSDP(1) 在 $\boldsymbol{x}^*$ 处满足 MFCQ 约束规格.

本文采用线搜索型序列半定规划方法框架,设当前迭代点为 $\boldsymbol{x}^k \in \mathbb{R}^n$,定义产生搜索方向的二次半定子问题 $QSD(\boldsymbol{x}^k, \boldsymbol{B}_k)$ 如下:

$$\min \nabla f(\boldsymbol{x}^k)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{d}+\frac{1}{2}\boldsymbol{d}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}_k\boldsymbol{d}$$

$$\begin{aligned} \text{s. t.}\, & \boldsymbol{h}(\boldsymbol{x}^k)+\mathrm{D}\boldsymbol{h}(\boldsymbol{x}^k)\boldsymbol{d}=\boldsymbol{0} \\ & \boldsymbol{G}(\boldsymbol{x}^k)+\mathrm{D}\boldsymbol{G}(\boldsymbol{x}^k)\boldsymbol{d}\preceq\boldsymbol{0} \end{aligned} \tag{2}$$

其中矩阵 $\boldsymbol{B}_k\in\mathbb{R}^{n\times n}$ 是 NLSDP(1) 的拉格朗日函数的 Hesse 阵或其近似阵. 若 $QSD(\boldsymbol{x}^k,\boldsymbol{B}_k)$ 存在最优解，则记其解为 $\boldsymbol{d}^k$. 同时，为了度量 NLSDP(1) 的约束可行性，下面给出其约束违反度函数的定义：

$$\theta(\boldsymbol{x})=\lambda_1(\boldsymbol{G}(\boldsymbol{x}))_+ + \|\boldsymbol{h}(\boldsymbol{x})\|$$

其中 $\lambda_1(\boldsymbol{A})$ 表示矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的最大特征值，$(\alpha)_+=\max\{0,\alpha\}$，$(\lambda_1(\boldsymbol{G}(\boldsymbol{x})))_+$ 简记为 $\lambda_1(\boldsymbol{G}(\boldsymbol{x}))_+$. 显然，若 $\theta(\boldsymbol{x})=0$，则 $\boldsymbol{x}$ 为 NLSDP(1) 的可行解.

此外，回溯线搜索技术保证目标函数值或约束违反度函数值有所下降，故令试探点为 $\hat{\boldsymbol{x}}=\boldsymbol{x}^k+\alpha_{k,l}\boldsymbol{d}^k$，其中 $\alpha_{k,l}\in(0,1]$ 为给定的步长. 下面讨论试探点 $\hat{\boldsymbol{x}}$ 基于何种情况下被算法接受. 首先，下面给出目标函数 $f(\boldsymbol{x})$ 的非单调实际下降量和预估下降量. 记目标函数 $f(\boldsymbol{x})$ 的非单调实际下降量为

$$nared(\boldsymbol{x}^k)=\max\{f(\boldsymbol{x}^k)-\hat{f}(\boldsymbol{x}^k)\}-f(\hat{\boldsymbol{x}}) \tag{3}$$

其中 $\hat{f}(\boldsymbol{x}^{k+1})$ 更新方式为 $\hat{f}(\boldsymbol{x}^0)=f(\boldsymbol{x}^0)$，$\hat{f}(\boldsymbol{x}^{k+1})=\dfrac{1}{2}(f(\boldsymbol{x}^{k+1})+\hat{f}(\boldsymbol{x}^k))$. 记目标函数 $f(\boldsymbol{x})$ 的预估下降量为

$$pred(\boldsymbol{x}^k)=-\nabla f(\boldsymbol{x}^k)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{d}^k \tag{4}$$

因此，定义目标函数 $f(\boldsymbol{x})$ 的非单调充分下降性条件：

$$nared(\boldsymbol{x}^k)\geqslant\eta\,\alpha_{k,l}\,pred(\boldsymbol{x}^k) \tag{5}$$

其中 $\eta\in(0,1)$，这不同于单调充分下降性条件：

$$ared(\boldsymbol{x}^k)=f(\boldsymbol{x}^k)-f(\hat{\boldsymbol{x}})\geqslant\eta\,\alpha_{k,l}\,pred(\boldsymbol{x}^k)$$

而(5)式更容易接受试探点 $\hat{\boldsymbol{x}}$.

其次，在算法迭代过程中，为了防止约束违反度函数值反弹过大，故需给出其一个上界，记为 $\Theta_k^{\max}$，其更新方式如下：

$$\Theta_{k+1}^{\max}=\max\{\beta\,\Theta_k^{\max},\hat{\theta}(\boldsymbol{x}^{k+1})\} \tag{6}$$

其中 $\hat{\theta}(\boldsymbol{x}^{k+1})$ 的更新方式为 $\hat{\theta}(\boldsymbol{x}^0)=\theta(\boldsymbol{x}^0)$，$\hat{\theta}(\boldsymbol{x}^{k+1})=\dfrac{1}{2}(\theta(\boldsymbol{x}^{k+1})+\hat{\theta}(\boldsymbol{x}^k))$. 同时，下面给出约束违反度函数 $\theta(\boldsymbol{x})$ 的非单调充分下降性条件：

$$\theta(\hat{\boldsymbol{x}})\leqslant\beta\,\hat{\theta}(\boldsymbol{x}^k) \tag{7}$$

其中 $\beta\in(0,1)$.

最后，下面给出算法的接受准则. 如果约束违反度函数 $\theta(\boldsymbol{x})$ 满足非单调充分下降性条件，即(7)式成立，或目标函数 $f(\boldsymbol{x})$ 具有适当的下降量且约束违反度函数值有个合理的上界，即

$$nared(\boldsymbol{x}^k)\geqslant\gamma\theta(\hat{\boldsymbol{x}}),\ \theta(\hat{\boldsymbol{x}})\leqslant\Theta_k^{\max} \tag{8}$$

成立，其中 $\gamma\in(0,1)$. 那么考虑以下两种情况.

1) 若

$$pred(\boldsymbol{x}^k)\leqslant\xi(\boldsymbol{d}^k)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}_k\boldsymbol{d}^k \tag{9}$$

且

$$\theta(\hat{\boldsymbol{x}})\leqslant\min\{\beta\Theta_k^{\max},(\Theta_k^{\max})^{\tau}\} \tag{10}$$

成立，其中 $\tau\in(2,3)$，$\xi\in(0,\dfrac{1}{2}]$，则算法接受试探点 $\hat{\boldsymbol{x}}$. 令 $\alpha_k=\alpha_{k,l}$，$\boldsymbol{x}^{k+1}=\hat{\boldsymbol{x}}$，并且采用(6)式更新 $\Theta_{k+1}^{\max}$.

2) 若

$$pred(\boldsymbol{x}^k) > \xi(\boldsymbol{d}^k)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}_k\boldsymbol{d}^k \tag{11}$$

且试探点$\hat{\boldsymbol{x}}$满足目标函数$f(\boldsymbol{x})$的非单调充分下降性条件，即(5)式成立，则算法接受试探点$\hat{\boldsymbol{x}}$，令$\alpha_k=\alpha_{k,l}$，$\boldsymbol{x}^{k+1}=\hat{\boldsymbol{x}}$且$\Theta_{k+1}^{\max}=\Theta_k^{\max}$.

然而，在回溯线搜索中，如果步长$\alpha_{k,l}$不满足上述条件，那么为了保证算法的适定性，故需要给其设置一个下界$\alpha_k^{\min}$，更新方式如下：

$$\alpha_k^{\min}=\gamma_\alpha\begin{cases}\min\left\{1-\beta,\ \dfrac{\theta(\boldsymbol{x}^k)^\tau}{pred(\boldsymbol{x}^k)^{s_\theta}}\right\}, & pred(\boldsymbol{x}^k) > \xi(\boldsymbol{d}^k)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}_k\boldsymbol{d}^k \\ \min\{1-\beta,\ \theta(\boldsymbol{x}^k)^\tau\}, & pred(\boldsymbol{x}^k) \leqslant \xi(\boldsymbol{d}^k)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}_k\boldsymbol{d}^k\end{cases} \tag{12}$$

其中$\gamma_\alpha\in(0,1)$，$s_\theta\geqslant 1$.

当子问题$QSD(\boldsymbol{x}^k,\boldsymbol{B}_k)$不相容或步长$\alpha_{k,l}<\alpha_k^{\min}$时，算法需进入可行性恢复阶段，寻找一个试探点$\hat{\boldsymbol{x}}$满足如下条件：

(A1) 子问题$QSD(\hat{\boldsymbol{x}},\boldsymbol{B}_k)$是相容的；

(A2) $\theta(\hat{\boldsymbol{x}})\leqslant\hat{\theta}(\boldsymbol{x}^k)$.

可行性恢复阶段的具体细节见文献[10].

综上所述，在(7)式或(8)式成立的条件下，若(9)式和(10)式成立，则称第k次迭代为θ型迭代. 若(5)式和(11)式成立，则称第k次迭代为f型迭代. 另外，如果可行性恢复阶段产生的试探点$\hat{\boldsymbol{x}}$满足(A1)和(A2)，那么称第k次迭代为θ型迭代.

基于以上讨论，下面给出求解NLSDP(1)的算法描述：

算法1

步骤0 (初始步)给定初始点$\boldsymbol{x}^0\in\mathbb{R}^n$，$\boldsymbol{B}_0=\boldsymbol{I}_n$(单位阵)，参数$\rho,\eta,\beta,\gamma,\gamma_\alpha\in(0,1)$，$\tau\in(2,3]$，$\xi\in\left(0,\dfrac{1}{2}\right]$，$s_\theta\geqslant 1$，及充分大的$\Theta_0^{\max}$，令$k=0$.

步骤1 令$flag=0$，求解子问题$QSD(\boldsymbol{x}^k,\boldsymbol{B}_k)$. 若$QSD(\boldsymbol{x}^k,\boldsymbol{B}_k)$存在最优解，则记为$\boldsymbol{d}^k$，否则算法进入可行性恢复阶段，转步骤7. 若$\boldsymbol{d}^k=0$，则算法停止.

步骤2 通过(12)式计算步长下界$\alpha_k^{\min}$.

步骤3 (回溯线搜索)

步骤3.1 令$l=0$，$\alpha_{k,0}=1$.

步骤3.2 若$\alpha_{k,l}<\alpha_k^{\min}$，则转步骤7，否则令试探点为$\hat{\boldsymbol{x}}=\boldsymbol{x}^k+\alpha_{k,l}\boldsymbol{d}^k$.

步骤3.3 若(7)式和(8)式不成立，则转步骤3.5.

步骤3.4 若(9)式和(10)式成立，则令$flag=1$，转步骤4. 若(5)式和(11)式成立，则转步骤4.

步骤3.5 令$\alpha_{k,l+1}=\rho\alpha_{k,l}$，$l=l+1$，转步骤3.2.

步骤4 令$\alpha_k=\alpha_{k,l}$，$\boldsymbol{x}^{k+1}=\boldsymbol{x}^k+\alpha_k\boldsymbol{d}^k$.

步骤5 使用如下式子更新$\Theta_{k+1}^{\max}$，$\hat{f}(\boldsymbol{x}^{k+1})$，$\hat{\theta}(\boldsymbol{x}^{k+1})$.

$$\Theta_{k+1}^{\max}=\begin{cases}\max\{\beta\Theta_k^{\max},\ \hat{\theta}(\boldsymbol{x}^{k+1})\}, & flag=1 \\ \Theta_k^{\max}, & flag=0\end{cases}$$

$$\hat{f}(\boldsymbol{x}^{k+1})=\frac{1}{2}(f(\boldsymbol{x}^{k+1})+\hat{f}(\boldsymbol{x}^k)),\ \hat{\theta}(\boldsymbol{x}^{k+1})=\frac{1}{2}(\theta(\boldsymbol{x}^{k+1})+\hat{\theta}(\boldsymbol{x}^k))$$

步骤6 (更新步)利用某种方法，更新$\boldsymbol{B}_k$为对称正定矩阵$\boldsymbol{B}_{k+1}$. 令$k=k+1$，转步骤1.

步骤7 (可行性恢复阶段)可行性恢复阶段产生的试探点$\hat{\boldsymbol{x}}$满足(A1)和(A2)，那么令$\boldsymbol{x}^{k+1}=\hat{\boldsymbol{x}}$，

$flag=1$，转步骤 5.

2　全局收敛性

本节将分析算法 1 的全局收敛性，为此，需作如下合理假设：

(B1) 迭代点列$\{\boldsymbol{x}^k\}$和$\{\boldsymbol{x}^k+\alpha_{k,l}\boldsymbol{d}^k\}$在紧凸集 χ 中.

(B2) $f(\boldsymbol{x}),\boldsymbol{h}(\boldsymbol{x}),\boldsymbol{G}(\boldsymbol{x})$ 在紧凸集 χ 中二阶连续可微.

(B3) 矩阵 $\boldsymbol{B}_k$ 为对称正定矩阵，且存在常数 $a,b>0$，对任意的 $\boldsymbol{d}\in\mathbb{R}^n$ 有 $a\|\boldsymbol{d}\|^2\leqslant\boldsymbol{d}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}_k\boldsymbol{d}\leqslant b\|\boldsymbol{d}\|^2$.

注 1　不失一般性，由假设 B 可知，对于任意 $\boldsymbol{x}\in\chi$，$\|\nabla^2 f(\boldsymbol{x})\|\leqslant b$，$\|\mathrm{D}^2h(\boldsymbol{x})\|\leqslant b$，$\|\mathrm{D}^2G(\boldsymbol{x})\|\leqslant b$.

引理 1　对于任意的 k，以下不等式成立：

$$\theta(\boldsymbol{x}^k)\leqslant\Theta_k^{\max},\ \hat{\theta}(\boldsymbol{x}^k)\leqslant\Theta_k^{\max}$$

证　采用数学归纳法，当第 0 次迭代时，由算法机制可知，$\Theta_0^{\max}$ 充分大，故 $\theta(\boldsymbol{x}^0)\leqslant\Theta_0^{\max}$ 成立. 假设第 k 次迭代时，$\theta(\boldsymbol{x}^k)\leqslant\Theta_k^{\max}$ 成立，现证明 $\theta(\boldsymbol{x}^{k+1})\leqslant\Theta_{k+1}^{\max}$ 成立.

若第 $k+1$ 次迭代为 f 型迭代，则 $\Theta_{k+1}^{\max}=\Theta_k^{\max}$. 由(8)式可得 $\theta(\boldsymbol{x}^{k+1})\leqslant\Theta_k^{\max}=\Theta_{k+1}^{\max}$.

若第 $k+1$ 次迭代为 θ 型迭代，则由(10)式和(6)式得 $\theta(\boldsymbol{x}^{k+1})\leqslant\beta\,\Theta_k^{\max}\leqslant\Theta_{k+1}^{\max}$.

综上所述，对于任意的 k，$\theta(\boldsymbol{x}^k)\leqslant\Theta_k^{\max}$ 成立，同理可证$\hat{\theta}(\boldsymbol{x}^k)\leqslant\Theta_k^{\max}$ 成立.

引理 2　算法产生的序列$\{\Theta_k^{\max}\}$是单调非增的.

证　假设第 k 次迭代到第 $k+1$ 次迭代为 θ 型迭代. 若 $\beta\Theta_k^{\max}>\hat{\theta}(\boldsymbol{x}^{k+1})$，则由(6)式可得 $\Theta_{k+1}^{\max}=\beta\,\Theta_k^{\max}<\Theta_k^{\max}$. 若 $\beta\,\Theta_k^{\max}\leqslant\hat{\theta}(\boldsymbol{x}^{k+1})$，则由(6),(10)式及引理 1 可得

$$\Theta_{k+1}^{\max}=\hat{\theta}(\boldsymbol{x}^{k+1})=\frac{1}{2}(\theta(\boldsymbol{x}^{k+1})+\hat{\theta}(\boldsymbol{x}^k))\leqslant\frac{1}{2}(\beta\Theta_k^{\max}+\Theta_k^{\max})=\frac{1}{2}(\beta+1)\Theta_k^{\max}<\Theta_k^{\max}$$

最后一个不等式成立的原因在于$\frac{1}{2}(\beta+1)\in(\frac{1}{2},1)$.

假设第 k 次迭代到第 $k+1$ 次迭代为 f 型迭代：$\Theta_{k+1}^{\max}=\Theta_k^{\max}$.

综上所述，序列$\{\Theta_k^{\max}\}$单调非增.

引理 3　考虑算法产生的迭代点列$\{\boldsymbol{x}^k\}$，若序列$\{\theta(\boldsymbol{x}^k)\}>0$和序列$\{f(\boldsymbol{x}^k)\}$有下界，则$\lim\limits_{k\to\infty}\theta(\boldsymbol{x}^k)=0$.

证　1) 假定 θ 型迭代发生有限次，故存在常数 $k_1>0$，使得当 $k>k_1$ 时，f 型迭代发生. 对于充分大的 $k(>k_1)$，若 $\theta(\boldsymbol{x}^{k+1})\leqslant\beta\,\hat{\theta}(\boldsymbol{x}^k)$，则结论成立. 否则存在无穷指标集 $\mathcal{K}_1$，使得当 $k\in\mathcal{K}_1$ 且 $k>k_1$ 时，$nared(\boldsymbol{x}^k)\geqslant\gamma\theta(\boldsymbol{x}^{k+1})$ 成立. 采用反证法. 不失一般性，假设当 $k\in\mathcal{K}_1$ 且 $k>k_1$ 时，存在正常数 ε 使得 $\theta(\boldsymbol{x}^{k+1})\geqslant\varepsilon$. 因此，有 $\max\{f(\boldsymbol{x}^k),\ \hat{f}(\boldsymbol{x}^k)\}-f(\boldsymbol{x}^{k+1})\geqslant\gamma\varepsilon$.

若 $f(\boldsymbol{x}^k)\geqslant\hat{f}(\boldsymbol{x}^k)$，则 $f(\boldsymbol{x}^k)-f(\boldsymbol{x}^{k+1})\geqslant\gamma\varepsilon$，结合$\hat{f}(\boldsymbol{x}^{k+1})$的定义可导出

$$f(\boldsymbol{x}^k)-\hat{f}(\boldsymbol{x}^{k+1})=f(\boldsymbol{x}^k)-\frac{1}{2}(f(\boldsymbol{x}^{k+1})+\hat{f}(\boldsymbol{x}^k))\geqslant\frac{1}{2}(f(\boldsymbol{x}^k)-f(\boldsymbol{x}^{k+1}))\geqslant\frac{1}{2}\gamma\varepsilon$$

于是有

$$\max\{f(\boldsymbol{x}^k),\ \hat{f}(\boldsymbol{x}^k)\}-\max\{f(\boldsymbol{x}^{k+1}),\ \hat{f}(\boldsymbol{x}^{k+1})\}\geqslant\frac{1}{2}\gamma\varepsilon$$

因此，当 k 充分大时

$$\max\{f(\boldsymbol{x}^k),\ \hat{f}(\boldsymbol{x}^k)\}\to-\infty$$

这与序列$\{f(\boldsymbol{x}^k)\}$有下界矛盾. 若$f(\boldsymbol{x}^k)<\hat{f}(\boldsymbol{x}^k)$，同理可证出矛盾.

2) 假定θ型迭代发生无限次，那么存在指标k_2，使得当$k>k_2$时，θ型迭代发生，由(10)式和引理2，可知结论成立.

引理 4 在假设B条件下，子问题$QSD(\boldsymbol{x}^k,\boldsymbol{B}_k)$的可行解$\boldsymbol{d}$满足以下不等式：

$$nared(\boldsymbol{x}^k)-\alpha_{k,l}pred(\boldsymbol{x}^k)\geqslant -\frac{1}{2}\alpha_{k,l}^2 b\|\boldsymbol{d}\|^2 \tag{13}$$

$$\theta(\boldsymbol{x}^k+\alpha_{k,l}\boldsymbol{d})\leqslant(1-\alpha_{k,l})\theta(\boldsymbol{x}^k)+\alpha_{k,l}^2 b\|\boldsymbol{d}\|^2 \tag{14}$$

其中$\alpha_{k,l}\in[\alpha_k^{\min},1]$.

证 由(3)式、(4)式、Taylor展开式和假设B可得

$$\begin{aligned}&nared(\boldsymbol{x}^k)-\alpha_{k,l}pred(\boldsymbol{x}^k)\geqslant ared(\boldsymbol{x}^k)-\alpha_{k,l}pred(\boldsymbol{x}^k)\geqslant\\&\qquad f(\boldsymbol{x}^k)+\alpha_{k,l}\nabla f(\boldsymbol{x}^k)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{d}-f(\boldsymbol{x}^k)-\alpha_{k,l}\nabla f(\boldsymbol{x}^k)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{d}-\frac{1}{2}\alpha_{k,l}^2\boldsymbol{d}^{\mathrm{T}}\nabla^2 f(\xi_1)\boldsymbol{d}\geqslant\\&\qquad -\frac{1}{2}\alpha_{k,l}^2 b\|\boldsymbol{d}\|^2\end{aligned}$$

其中ξ_1介于$\boldsymbol{x}^k$和$\boldsymbol{x}^k+\alpha_{k,l}\boldsymbol{d}$之间. 类似地，由Taylor展开式可推出

$$\boldsymbol{h}(\boldsymbol{x}^k+\alpha_{k,l}\boldsymbol{d})=\boldsymbol{h}(\boldsymbol{x}^k)+\alpha_{k,l}\mathrm{D}\boldsymbol{h}(\boldsymbol{x}^k)\boldsymbol{d}+\frac{1}{2}\alpha_{k,l}^2\boldsymbol{d}^{\mathrm{T}}\mathrm{D}^2\boldsymbol{h}(\xi_2)\boldsymbol{d}\leqslant(1-\alpha_{k,l})\boldsymbol{h}(\boldsymbol{x}^k)+\frac{1}{2}\alpha_{k,l}^2 b\|\boldsymbol{d}\|^2$$

$$\boldsymbol{G}(\boldsymbol{x}^k+\alpha_{k,l}\boldsymbol{d})=\boldsymbol{G}(\boldsymbol{x}^k)+\alpha_{k,l}\mathrm{D}\boldsymbol{G}(\boldsymbol{x}^k)\boldsymbol{d}+\frac{1}{2}\alpha_{k,l}^2\boldsymbol{d}^{\mathrm{T}}\mathrm{D}^2\boldsymbol{G}(\xi_3)\boldsymbol{d}\preceq(1-\alpha_{k,l})\boldsymbol{G}(\boldsymbol{x}^k)+\frac{1}{2}\alpha_{k,l}^2 b\|\boldsymbol{d}\|^2\boldsymbol{I}_n$$

其中ξ_2,ξ_3介于$\boldsymbol{x}^k$与$\boldsymbol{x}^k+\alpha_{k,l}\boldsymbol{d}$之间，进而有$\theta(\boldsymbol{x}^k+\alpha_{k,l}\boldsymbol{d})\leqslant(1-\alpha_{k,l})\theta(\boldsymbol{x}^k)+\alpha_{k,l}^2 b\|\boldsymbol{d}\|^2$.

引理 5 在假设B成立下，NLSDP(1)的可行点$\boldsymbol{x}^*$满足MFCQ条件，但不是KKT点. 那么存在$\boldsymbol{x}^*$的邻域$\mathcal{N}(\boldsymbol{x}^*)$及正常数$\eta_1$，使得当$\boldsymbol{x}^k\in\mathcal{N}(\boldsymbol{x}^*)\cap\chi$时，子问题$QSD(\boldsymbol{x}^k,\boldsymbol{B}_k)$的可行集非空，且其最优解$\boldsymbol{d}^k$满足

$$pred(\boldsymbol{x}^k)-\xi(\boldsymbol{d}^k)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}_k\boldsymbol{d}^k\geqslant\frac{1}{3}\eta_1\|\boldsymbol{d}^k\| \tag{15}$$

证 类似文献[14]的引理4.7可证结论成立.

引理 6 在假设B条件下，$\boldsymbol{d}^k$是子问题$QSD(\boldsymbol{x}^k,\boldsymbol{B}_k)$的最优解，那么若

$$\theta(\boldsymbol{x}^k)\leqslant\min\left\{\frac{(\eta\eta_1+6\xi\eta a\|\boldsymbol{d}^k\|)\eta\eta_1}{36\gamma^2 b},\ \frac{\eta\eta_1[2(1-\eta)\eta_1+6(1-\eta)\xi\|\boldsymbol{d}^k\|]}{18b\gamma}\right\} \tag{16}$$

且

$$\max\left\{\alpha_k^{\min},\ \frac{6\gamma\theta(\boldsymbol{x}^k)}{\eta\eta_1\|\boldsymbol{d}^k\|}\right\}\leqslant\alpha_{k,l}\leqslant\min\left\{\frac{\eta\eta_1+6\xi\eta a\|\boldsymbol{d}^k\|}{6\gamma b\|\boldsymbol{d}^k\|},\ \frac{2(1-\eta)\eta_1+6(1-\eta)\xi\|\boldsymbol{d}^k\|}{3b\|\boldsymbol{d}^k\|}\right\} \tag{17}$$

则$\alpha_{k,l}\geqslant\alpha_k^{\min}$，$nared(\boldsymbol{x}^k)\leqslant\eta\,\alpha_{k,l}pred(\boldsymbol{x}^k)$，$nared(\boldsymbol{x}^k)\geqslant\gamma\theta(\boldsymbol{x}^k+\alpha_{k,l}\boldsymbol{d}^k)$.

证 若

$$\alpha_{k,l}\leqslant\frac{2(1-\eta)\eta_1+6(1-\eta)\xi\|\boldsymbol{d}^{k_1}\|}{3b\|\boldsymbol{d}^k\|}$$

则由引理4和引理5得

$$\begin{aligned}&nared(\boldsymbol{x}^k)\geqslant\alpha_{k,l}pred(\boldsymbol{x}^k)-\frac{1}{2}\alpha_{k,l}^2 M\|\boldsymbol{d}^k\|^2\geqslant\\&\qquad\eta\,\alpha_{k,l}pred(\boldsymbol{x}^k)+(1-\eta)\frac{1}{3}\alpha_{k,l}\eta_1\|\boldsymbol{d}^k\|-\frac{1}{2}\alpha_{k,l}^2 b\|\boldsymbol{d}^k\|^2+(1-\eta)\alpha_{k,l}\xi a\|\boldsymbol{d}^k\|^2\end{aligned}$$

故$nared(\boldsymbol{x}^k)\geqslant\eta\,\alpha_{k,l}pred(\boldsymbol{x}^k)$成立. 结合引理4和引理5，由(16)和(17)式有

$$nared(\boldsymbol{x}^k)-\gamma\theta(\boldsymbol{x}^k+\alpha_{k,l}\boldsymbol{d}^k)\geqslant\eta\,\alpha_{k,l}pred(\boldsymbol{x}^k)-\gamma((1-\alpha_{k,l})\theta(\boldsymbol{x}^k)+\alpha_{k,l}^2 b\|\boldsymbol{d}^k\|^2)\geqslant$$

$$\frac{1}{3}\alpha_{k,l}\eta\eta_1\|\boldsymbol{d}^k\|-\gamma\theta(\boldsymbol{x}^k)+\gamma\alpha_{k,l}\theta(\boldsymbol{x}^k)-\alpha_{k,l}^2\gamma b\|\boldsymbol{d}^k\|^2+\eta\alpha_{k,l}\xi a\|\boldsymbol{d}^k\|^2=$$

$$\gamma\alpha_{k,l}\theta(\boldsymbol{x}^k)+\left(\frac{1}{6}\alpha_{k,l}\eta\eta_1\|\boldsymbol{d}^k\|-\gamma\theta(\boldsymbol{x}^k)\right)+$$

$$\alpha_{k,l}\|\boldsymbol{d}^k\|\left(\frac{1}{6}\eta\eta_1-\alpha_{k,l}\gamma b\|\boldsymbol{d}^k\|+\eta\xi a\|\boldsymbol{d}^k\|^2\right)$$

故 $nared(\boldsymbol{x}^k)\geqslant\gamma\theta(\boldsymbol{x}^k+\alpha_{k,l}\boldsymbol{d}^k)$ 成立.

引理 7　在假设 B 条件下，线搜索(步骤 3)是有限步终止的.

证　采用反证法，假设线搜索(步骤3)是不会有限步终止的，故由算法机制可知，当 $l\to\infty$ 时，$\alpha_{k,l}\to 0$，下面考虑两种情形.

假定 $\theta(\boldsymbol{x}^k)=0$，由(12)式推出 $\alpha_k^{\min}=0$. 由引理 4 可知，$pred(\boldsymbol{x}^k,\alpha_{k,l})\geqslant\xi(\boldsymbol{d}^k)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}_k\boldsymbol{d}^k$. 由引理 6 可知，若(17)式成立，则 $nared(\boldsymbol{x}^k)\geqslant\eta\,\alpha_{k,l}pred(\boldsymbol{x}^k)$，$nared(\boldsymbol{x}^k)\geqslant\gamma\theta(\boldsymbol{x}^k+\alpha_{k,l}\boldsymbol{d}^k)$ 成立. 若 $\alpha_{k,l}^2<\dfrac{\Theta_k^{\max}}{b\|\boldsymbol{d}^k\|^2}$，则由(14)式可推出 $\theta(\boldsymbol{x}^k+\alpha_{k,l}\boldsymbol{d}^k)\leqslant\Theta_k^{\max}$.

综上所述，若

$$\max\left\{\alpha_k^{\min},\frac{4\gamma\theta(\boldsymbol{x}^k)}{\eta_2\|\boldsymbol{d}^k\|}\right\}\leqslant\alpha_{k,l}\leqslant\min\left\{\frac{\eta\,\eta_2}{4\gamma M\|\boldsymbol{d}^k\|},\frac{(1-\eta)\eta_2}{M\|\boldsymbol{d}^k\|},\sqrt{\frac{\Theta_k^{\max}}{M\|\boldsymbol{d}^k\|^2}}\right\}\tag{18}$$

则 $\boldsymbol{x}^k+\alpha_{k,l}\boldsymbol{d}^k$ 被算法所接受，f 型迭代发生，矛盾.

假定 $\theta(\boldsymbol{x}^k)>0$. 由步骤 3.2 知，当 l 充分大时，$\alpha_{k,l}<\alpha_k^{\min}$，从而退出线搜索，进入可行性恢复阶段，矛盾.

定理 1　若假设 B 成立，则下面结论之一成立：

(C1) 可行性恢复阶段找不到试探点 $\hat{\boldsymbol{x}}$，满足(A1)和(A2).

(C2) 算法有限步终止，即存在某个迭代点 $\boldsymbol{x}^k$ 为 NLSDP(1) 的 KKT 点.

(C3) 算法产生的迭代点列 $\{\boldsymbol{x}^k\}$ 收敛于聚点 $\boldsymbol{x}^*$ 且该聚点 $\boldsymbol{x}^*$ 为 NLSDP(1) 的可行解，那么 $\boldsymbol{x}^*$ 或是 NLSDP(1) 的 KKT 点，或是 $\boldsymbol{x}^*$ 不满足 MFCQ 条件.

证　不失一般性，假设结论(C1)和(C2)都不成立，下面讨论两种情况分别证明结论(C3)成立.

1) 假定序列 $\{\boldsymbol{x}^k\}$ 包含无限次 θ 型迭代，那么存在无穷指标集 $\mathscr{K}_2$，使得当 $k\in\mathscr{K}_2$ 时，第 k 次迭代是 θ 型迭代. 由假设 B 可知，$\{\boldsymbol{x}^k\}$ 是有界点列，因此存在一个聚点 $\boldsymbol{x}^*$，不妨假设 $\lim\limits_{k\to\infty,\,k\in\mathscr{K}_2}\boldsymbol{x}^k=\boldsymbol{x}^*$. 由引理 3 可知，

$$\lim_{k\to\infty,\,k\in\mathscr{K}_2}\theta(\boldsymbol{x}^k)=0=\theta(\boldsymbol{x}^*)$$

即 $\boldsymbol{x}^*$ 是 NLSDP(1) 的可行点.

假设 $\boldsymbol{x}^*$ 满足 MFCQ 条件，否则结论(C3)成立，采用反证法，如果 $\boldsymbol{x}^*$ 不是 KKT 点，若(18)式成立，则由引理 4、引理 5 和引理 6 可知，f 型迭代条件被满足. 当 k 充分大时，由于 $\theta(\boldsymbol{x}^k)\leqslant\Theta_k^{\max}$，$\alpha_k^{\min}=O(\theta(\boldsymbol{x}^k)^\tau)$ 及平方根的作用，(18)式的左端的收敛速度快于右端，因此，在回溯线搜索中，步长 $\alpha_{k,l}$ 必存在且至少使得(18)式第二个不等号成立，这意味着 f 型迭代发生，故与当前点是 θ 型迭代矛盾.

2) 假定序列 $\{\boldsymbol{x}^k\}$ 中只包含有限次 θ 型迭代，那么存在正整数 k_3，使得当 $k>k_3$ 时，第 k 次迭代是 f 型迭代，于是有 $\Theta_k^{\max}$ 不会更新，故为固定常数. 由引理 3 可知，$\lim\limits_{k>k_3}\theta(\boldsymbol{x}^k)=0=\theta(\boldsymbol{x}^*)$，这说明 $\boldsymbol{x}^*$ 是 NLSDP(1) 的可行点.

假设 $\boldsymbol{x}^*$ 满足 MFCQ 条件，否则结论(C3)成立，采用反证法，如果 $\boldsymbol{x}^*$ 不是 KKT 点，类似于(1)式的讨论，若(18)式成立，f 型迭代条件被满足. 此外，当 k 充分大时，因 $\alpha_k^{\min}=O(\theta(\boldsymbol{x}^k)^\tau)\to 0$，(18)式的右端大于左端，于是在回溯线搜索中，步长 $\alpha_{k,l}$ 将会落于(18)式内或其右端，f 型迭代发生. 因此，存在 $\bar{\alpha}\in(0,1]$，使得 $\alpha_k>\rho\bar{\alpha}$ 成立. 由引理 5 得 $\alpha_k pred(\boldsymbol{x}^k)\geqslant\dfrac{1}{2}\alpha_k\eta_2\|\boldsymbol{d}^k\|\geqslant\dfrac{1}{2}\rho\,\alpha_k\eta_2\|\boldsymbol{d}^k\|^2>0$，最后不等式

成立的原因在于 $\boldsymbol{x}^*$ 不是 KKT 点，故 $\|\boldsymbol{d}^k\| \neq 0$. 由(5)式知

$$nared(\boldsymbol{x}^k) \geqslant \eta\alpha_k pred(\boldsymbol{x}^k) \geqslant \frac{1}{2}\rho\bar{\alpha}\eta\eta_2\|\boldsymbol{d}^k\| > 0$$

因此，当 k 充分大时，可推出 $f(\boldsymbol{x}^k) \to -\infty$，由假设 B 可知，这与 $\{f(\boldsymbol{x}^k)\}$ 有界矛盾. 综上所述，结论(C3)成立.

3 数值试验

为了验证算法 1 的可行性，本节给出了算法的初步数值实验，采用 MATLAB(2014a) 软件实现算法，程序在配置 Windows 10，8G RAM，3.60 GHz CPU 的计算机上运行. 子问题 QSD$(\boldsymbol{x}^k, \boldsymbol{B}_k)$ 使用文献[15] SDPT3 求解. 算法采用 BFGS 公式对 $\boldsymbol{B}_k$ 更新为 $\boldsymbol{B}_{k+1}$，其更新公式见文献[16]. 下面给出算例问题如下：

1) Rosen-Suzuki 问题：测试算例来源于文献[17]：

$$\begin{aligned}
\min \quad & x_1^2 + x_2^2 + 2x_3^2 + x_4^2 - 5x_1 - 5x_2 - 21x_3 + 7x_4 \\
\text{s.t.} \quad & \begin{pmatrix} x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 + x_1 - x_2 + x_3 - x_4 - 8 \\ x_1^2 + 2x_2^2 + x_3^2 + 2x_4^2 - x_1 - x_4 - 9 \\ 2x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 2x_1 - x_2 - x_4 - 5 \end{pmatrix} = \boldsymbol{0} \\
& \begin{pmatrix} -x_2 - x_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2x_4 & -x_1 & 0 \\ 0 & -x_1 & -x_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -x_2 - x_3 \end{pmatrix} \preceq \boldsymbol{0}
\end{aligned}$$

其数值结果见表 1.

2) SOFP 问题. 测试算例来源于文献[18]：

$$\begin{aligned}
\min_{F,L} \quad & \operatorname{tr}(\boldsymbol{L}\boldsymbol{Q}_F) \\
\text{s.t.} \quad & \boldsymbol{A}_F\boldsymbol{L} + \boldsymbol{L}\boldsymbol{A}_F^{\mathrm{T}} + \boldsymbol{I} = \boldsymbol{0} \\
& \boldsymbol{A}_F\boldsymbol{L} + \boldsymbol{L}\boldsymbol{A}_F^{\mathrm{T}} \preceq \boldsymbol{0},\ \boldsymbol{L} \succ \boldsymbol{0}
\end{aligned}$$

其中：$\boldsymbol{Q}_F = \boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{F}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{F}\boldsymbol{C} + \boldsymbol{I}$；$\boldsymbol{A}_F = \boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}\boldsymbol{F}\boldsymbol{C}$；矩阵变量 $\boldsymbol{L}$ 为实对称的；矩阵变量 $\boldsymbol{F}$ 不是方阵；$\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}, \boldsymbol{C}$ 为常量矩阵. 该问题的数值结果见表 2.

3) NCMP 问题. 测试算例来自于文献[9]：

$$\begin{aligned}
\min \quad & f(\boldsymbol{X}) = \frac{1}{2}\|\boldsymbol{X} - \boldsymbol{A}\|_F \\
\text{s.t.}\ & \boldsymbol{X} \succeq \varepsilon\boldsymbol{I} \\
& X_{ii} = 1,\ i = 1, 2, \cdots, m
\end{aligned}$$

其中：$\boldsymbol{A} = (a_{ij})(\in \mathbb{S}^m)$ 是给定的，且其对角线元素 $a_{ii} = 1 (i = 1, 2, \cdots, m)$，其余元素随机取自$[-1, 1]$；选取 $\varepsilon = 10^{-3}$. 数值结果见表 3.

在数值试验中，选取的参数如下：

$$\eta = 0.001,\ \tau = 0.01,\ \xi = 0.01,\ \gamma = 0.001,\ \gamma_\alpha = 0.99,\ s_\theta = 2,\ \beta = 0.999,\ \rho = 0.5$$

终止准则为 $\|\boldsymbol{d}^k\| \leqslant 10^{-4}$，设置算法 1 的迭代次数上限为 200. 下面给出表 1－3 中的符号含义如下：$\boldsymbol{x}_0$ 为初始点；Ndf 为目标函数梯度计算次数；problem 为 COMPleib 算例库算例名称；$Iter$ 为算法迭代次数；n 为自变量维数；ri 为可行性恢复阶段使用次数；p 为等式约束的维数；θ^* 为最优点约束违反度函数值；m 为半定约束矩阵维数；f^* 为最优目标函数值；Nf 为目标函数计算次数；t 为计算机运行时间(含可行性恢复阶段用时).

表 1　Rosen-Suzuki 问题数值结果

$\boldsymbol{x}_0$	Nf	Ndf	ri	$Iter$	θ^*	f^*	t/s
(0,0,0,0)	9	7	0	6	2.909842e−06	−4.400000e+01	9.778046e−01
(1,1,1,1)	8	8	0	7	3.872298e−08	−4.400000e+01	1.124225e+00
(−1,−1,−1,−1)	10	9	1	8	1.259801e−07	−4.400000e+01	1.478541e+01
(2,2,2,2)	10	8	0	7	2.143365e−07	−4.400000e+01	1.078735e+00
(−2,−2,−2,−2)	11	9	1	8	2.562562e−05	−4.400001e+01	1.353874e+01
(3,3,3,3)	9	9	0	8	4.846069e−05	−4.400008e+01	1.137814e+00
(−3,−3,−3,−3)	19	13	2	12	2.398263e−07	−4.400000e+01	3.050278e+00
(4,4,4,4)	9	9	0	8	2.273161e−07	−4.400000e+01	1.202370e+00
(−4,−4,−4,−4)	10	9	1	8	4.084088e−05	−4.400005e+01	2.737996e+00
(5,5,5,5)	9	9	0	8	6.052405e−07	−4.400000e+01	1.303321e+00
(−5,−5,−5,−5)	12	10	2	9	2.173214e−05	−4.400004e+01	3.055109e+00

表 2　SOFP 问题数值结果

problem	n	p	m	Nf	Ndf	ri	$Iter$	v^*	f^*	t/s
AC1	24	15	5	36	36	0	35	1.136596e−08	2.002884e+01	5.894461e+00
AC2	24	15	5	36	36	0	35	1.136596e−08	2.002884e+01	5.870240e+00
AC3	23	15	5	39	34	0	33	5.396258e−09	2.184061e+01	4.815004e+00
AC4	12	10	4	50	49	2	48	1.321858e−05	1.198998e+01	1.108682e+01
AC6	36	28	7	24	24	0	23	7.480358e−08	1.090587e+01	4.654131e+00
AC7	47	45	9	31	30	1	29	1.682626e−08	1.559962e+02	1.547063e+01
AC8	50	45	9	32	32	1	31	1.898036e−09	1.536099e+01	9.055273e+00
AC11	23	15	5	207	173	1	172	1.058859e−07	1.062432e+01	2.649589e+01
AC15	16	10	4	51	38	0	37	6.957024e−10	1.590686e+02	5.875121e+00
AC17	12	10	4	25	23	0	22	8.239174e−09	1.462636e+01	3.486708e+00
HE2	14	10	4	17	17	0	16	3.685343e−08	1.187440e+01	2.767874e+00
REA1	16	10	4	57	52	0	51	6.761166e−09	3.483647e+00	9.199936e+00
REA2	14	10	4	37	37	1	36	2.756428e−09	3.773181e+00	6.240587e+00
REA3	81	78	12	41	41	2	40	1.486574e−10	1.504088e+02	1.193495e+01
DIS1	52	36	8	29	29	0	28	1.374959e−08	1.535720e+01	5.586284e+00
DIS2	10	6	3	39	36	1	35	4.712442e−07	8.595294e+00	5.540266e+00
DIS3	37	21	6	39	39	0	38	2.606282e−09	5.986639e+00	6.575968e+00
DIS4	45	21	6	118	109	0	108	2.019371e−08	3.957641e+00	2.206135e+01
TG1	59	55	10	67	67	2	66	3.917937e−10	4.948601e+02	1.835817e+01
AGS	82	78	12	12	12	0	11	7.153017e−08	4.942235e+01	4.364303e+00
BDT1	75	66	11	74	51	1	50	8.088515e−11	8.831719e+02	1.512599e+01
UWV	40	36	8	14	14	0	13	2.542631e−06	2.093619e+00	2.531323e+00
IH	341	231	21	41	35	0	34	4.544945e−09	4.229681e+01	1.123686e+02
CSE1	230	210	20	20	20	1	19	5.968849e−10	7.669994e+01	3.476879e+01
EB1	56	55	10	18	18	0	17	1.041893e−10	8.713136e+02	3.913117e+00
EB2	56	55	10	18	18	0	17	1.041893e−10	8.713136e+02	3.955069e+00
EB3	56	55	10	13	13	1	12	2.019272e−08	1.549231e+03	6.521993e+00
EB4	211	210	20	25	24	1	23	1.612082e−11	8.892223e+04	8.342475e+01
TF1	36	28	7	119	83	2	82	1.591133e−10	2.967510e+02	3.975126e+01
PSM	34	28	7	27	27	0	26	9.085558e−08	3.236933e+00	4.968154e+00

续表2

problem	n	p	m	Nf	Ndf	ri	$Iter$	v^*	f^*	t/s
NN2	4	3	2	12	12	0	11	2.521602e−07	3.464101e+00	1.417314e+00
NN4	16	10	4	38	38	0	37	1.115935e−08	5.407893e+00	5.591353e+00
NN8	10	6	3	23	23	0	22	9.158054e−08	4.438271e+00	2.924295e+00
NN11	151	136	16	19	17	0	16	1.597531e−08	2.758270e+02	1.370178e+01
NN15	10	6	3	39	28	0	27	1.561633e−11	4.695404e+02	3.910308e+00
NN16	52	36	8	51	48	0	47	8.034399e−08	1.536476e+01	9.902896e+00
HF2D10	21	15	5	129	129	0	128	4.070270e−11	2.212944e+00	2.076513e+01
HF2D11	21	15	5	94	94	0	93	1.193584e−11	6.163041e−01	1.420317e+01
HF2D12	23	15	5	188	188	0	187	1.540758e−13	1.561422e+00	3.007262e+01
HF2D13	23	15	5	61	61	0	60	6.163357e−09	5.109497e−01	1.007186e+01
HF2D14	23	15	5	71	68	1	67	5.248154e−09	4.556687e+00	1.102718e+01
HF2D15	23	15	5	72	70	0	69	5.511780e−09	1.493680e+00	1.132006e+01
HF2D17	23	15	5	65	62	0	61	1.347097e−08	7.647003e−01	9.770694e+00
HF2D18	19	15	5	70	70	0	69	5.408328e−09	1.309318e+01	1.111994e+01
TMD	29	21	6	153	88	0	87	6.719449e−08	4.798488e+01	1.252311e+01
DLR1	59	55	10	36	26	0	25	1.090330e−09	2.981597e+03	5.282559e+00
ROC7	21	15	5	96	79	1	78	9.079127e−09	4.877359e+01	1.134368e+01
ROC8	61	45	9	117	79	1	78	2.294950e−09	2.260803e+02	3.358968e+01

表3 NCMP问题数值结果

n	m	Nf	Ndf	ri	$Iter$	θ^*	f^*	t/s
10	5	3	3	0	2	0	2.985476e+00	4.144104e−01
45	10	4	3	0	2	0	1.464388e+01	6.320547e−01
105	15	4	4	0	3	0	3.687125e+01	1.208966e+00
190	20	4	4	0	3	0	6.456659e+01	1.803714e+00
300	25	3	3	1	2	0	1.060971e+02	3.379095e+00
435	30	3	3	0	2	0	1.528332e+02	5.762822e+00
595	35	4	4	1	3	0	2.018428e+02	2.230029e+01
780	40	4	3	0	2	0	2.636459e+02	2.315747e+01
990	45	4	4	1	3	0	3.198401e+02	6.724972e+01
1225	50	4	4	0	3	0	4.028660e+02	9.947544e+01
1485	55	4	4	0	3	0	5.261936e+02	1.825175e+02
1770	60	4	3	0	2	0	6.033772e+02	1.977210e+02
2080	65	4	4	0	3	0	6.841134e+02	4.900648e+02
2415	70	4	4	0	3	0	8.069238e+02	7.372437e+02
2775	75	4	4	0	3	0	9.119964e+02	1.145665e+03
3160	80	4	4	0	3	0	1.038616e+03	1.815576e+03

4 小结

本文提出一种新的求解非线性半定规划的无罚无滤回溯线搜索型序列半定规划算法，新方法基于传统的二次规划子问题构建二次半定子问题，通过求解该子问题产生搜索方向，为了避免使用罚函数和滤子，采用回溯线搜索技术来保证目标函数值或约束违反度函数值充分下降. 而非单调的充分性下降条件使得试探点更加容易被算法接受. 同时在合理的假设条件下，证明了该算法的适定性以及全局收敛性，最后初步的数值试验结果表明了该算法的有效性.

参考文献：

[1] 席鸣晓，罗洪林. 利用半无限规划的离散化方法求解半定规划问题 [J]. 重庆师范大学学报(自然科学版)，2018，35(2)：21-27.

[2] 马纪英，陈文燕，贾慧羡. 半定规划松弛求解新方法及在通信问题中的应用 [J]. 西南师范大学学报(自然科学版)，2017，42(3)：39-42.

[3] BEN-TAL A，JARRE F，KOČVARA M，et al. Optimal Design of Trusses under a Nonconvex Global Buckling Constraint [J]. Optimization and Engineering，2000，1(2)：189-213.

[4] ROCHE J R，HERSKOVITS J，BAZÁN E，et al. A Feasible Direction Algorithm for General Nonlinear Semidefinite Programming [J]. Structural and Multidisciplinary Optimization，2017，55(4)：1261-1279.

[5] BIRGIN E G，GÓMEZ W，HAESER G，et al. An Augmented Lagrangian Algorithm for Nonlinear Semidefinite Programming Applied to the Covering Problem [J]. Computational and Applied Mathematics，2019，39(1)：1-21.

[6] 李丹丹，王松华，李远飞. 求解非线性半定规划的一个无罚无滤信赖域型算法 [J]. 数学的实践与认识，2021，51(15)：163-174.

[7] LI J L，YANG Z P，WU J Q，et al. A New QP-Free Algorithm without a Penalty Function or a Filter for Nonlinear Semidefinite Programming [J]. Acta Mathematicae Applicatae Sinica，English Series，2020，36(3)：714-736.

[8] ZHANG Y L，WU J，ZHANG L W. The Rate of Convergence of Proximal Method of Multipliers for Nonlinear Semidefinite Programming [J]. Optimization，2020，69(4)：875-900.

[9] KATO A，YABE H，YAMASHITA H. An Interior Point Method with a Primal-Dual Quadratic Barrier Penalty Function for Nonlinear Semidefinite Programming [J]. Journal of Computational and Applied Mathematics，2015，275：148-161.

[10] 吴加其. 非线性半定规划的两个滤子法 [D]. 南宁：广西大学，2019.

[11] 黎健玲，张辉，杨振平，等. 非线性半定规划一个全局收敛的无罚无滤子 SSDP 算法 [J]. 运筹学学报，2018，22(4)：1-16.

[12] HUANG M X，PU D G. A Line Search SQP Method without a Penalty or a Filter [J]. Computational and Applied Mathematics，2015，34(2)：741-753.

[13] GOMEZ W，RAMIREZ H. A Filter Algorithm for Nonlinear Semidefinite Programming [J]. Computational and Applied Mathematics，2010，29(29)：297-328.

[14] ZHU Z B，ZHU H L. A Filter Method for Nonlinear Semidefinite Programming with Global Convergence [J]. Acta Mathematica Sinica，English Series，2014，30(10)：1810-1826.

[15] TOH K C，TUTUNCU R H，TODD M J. On the Implementation of SDPT3 (Version 3.1)-a MATLAB Software Package for Semidefinite-Quadratic-Linear Programming [C]//2004 IEEE International Conference on Robotics and Automation. New York：IEEE Press，2004：290-296.

[16] ZHAO Q，CHEN Z W. On the Superlinear Local Convergence of a Penalty-Free Method for Nonlinear Semidefinite Programming [J]. Journal of Computational and Applied Mathematics，2016，308：1-19.

[17] 苗世彩. 求解非线性半定规划的一类无惩罚方法 [D]. 苏州：苏州大学，2013.

[18] LEIBFRITZ F. Compleib：Constrained Matrix-optimization Problem library-a Collection of Test Examples for Nonlinear Semidefinite Programs，Control System Design and Related Problems [EB/OL]. (2006-03-15)[2020-9-15]. http://www.complib.de/.

责任编辑　张枸