第 47 卷 第 4 期　　西南师范大学学报(自然科学版)　　2022 年 4 月
Vol. 47 No. 4　　Journal of Southwest China Normal University (Natural Science Edition)　　Apr. 2022

DOI:10.13718/j.cnki.xsxb.2022.04.002

必然-可能半三支概念①

魏玲[1,3]， 王振[1,3]， 祁建军[2,3]， 任睿思[1,3]

1. 西北大学 数学学院，西安 710127；2. 西安电子科技大学 计算机科学与技术学院，西安 710071；
3. 西北大学 概念、认知与智能研究中心，西安 710127

摘要： 三支概念分析是将三支决策思想引入形式概念分析而产生的数据分析与知识发现的新工具. 由于三支概念从同一角度刻画正、负两方面信息，语义较为严格，致使其在团队合作等实际问题中应用受限. 针对此问题，本文利用区间集将必然算子与可能算子进行融合，定义必然-可能三支算子，并探讨其性质，进而将半概念的思想引入三支概念分析，提出必然-可能半三支概念，并研究其代数结构. 必然-可能半三支概念可实现信息的多角度刻画，拓宽了三支概念的语义.

关 键 词： 三支概念分析；必然-可能半三支概念；必然算子；可能算子

中图分类号：O29；TP18　　**文献标志码：A**　　**文章编号：** 1000-5471(2022)04-0012-09

Necessity-Possibility Semi-Three-Way Concept

WEI Ling[1,3]， WANG Zhen[1,3]， QI Jianjun[2,3]， REN Ruisi[1,3]

1. School of Mathematics, Northwest University, Xi'an 710127, China;
2. School of Computer Science and Technology, Xidian University, Xi'an 710071, China;
3. Institute of Concepts, Cognition and Intelligence, Northwest University, Xi'an 710127, China

Abstract: Three-way concept analysis, a combination of formal concept analysis and three-way decision, is a new tool for data analysis and knowledge discovery. Three-way concept has strict semantics and describes positive information and negative information from the same perspective, which limit its applications in practical problems, such as teamwork. Based on that, by combining necessity operator and possibility operator, necessity-possibility three-way operators are firstly defined by using interval set in this paper, and their properties are researched. Further, necessity-possibility semi-three-way concepts are proposed through introducing the thought of semiconcept into three-way concept analysis, and their algebraic structures are also studied. Necessity-possibility semi-three-way concepts can describe information from multi-perspective, which extends the semantics of three-way concept.

Key words: three-way concept analysis; necessity-possibility semi-three-way concept; necessity operator; possibility operator

形式概念分析(Formal concept analysis，FCA)作为有效的、极具潜力的知识发现工具，于 1982 年由

---

① 收稿日期：2021-12-29
基金项目：国家自然科学基金项目(12171392,62006190)；陕西省自然科学基础研究计划项目(2021JM-141).
作者简介：魏玲，博士，教授，主要从事形式概念分析、粗糙集理论、三支决策与粒计算的研究.

德国数学家 Wille 首次提出，用于概念的发现、排序和显示[1-2]. Wille 将数据描述为形式背景，并定义了一对导出算子，由此生成形为(外延，内涵)二元对的形式概念，继而生成作为该理论核心数据结构的概念格. 概念格是根据形式背景中对象与属性之间的二元关系建立的一种概念层次结构，生动简洁地体现了概念之间的泛化与特化关系. 目前 FCA 的主要研究方向有属性约简[3-7]、规则获取[5,8]以及向三支概念分析[9-11]、三元概念分析[12-14]的拓广等. 同时该理论还在港口危险品管理、智慧城市等领域得到了成功的应用[15-17].

三支概念分析(Three-way concept analysis，3WCA)是将三支决策理论(Three-way decision，3WD)[18]中的三分思想应用于 FCA 而新产生的一种进行知识发现的理论[9-10]. 与形式概念一样，三支概念也表现为(外延，内涵)二元对的形式，但区别于形式概念，三支概念的内涵/外延为一个正交对[19]，用于刻画属性集/对象集的三分. 因此 3WCA 既具有 FCA 的基本表现形式和具体研究内容，也体现了 3WD 的“三分而治”思想. 自 2014 年提出以来，其思想逐渐为知识发现研究领域的研究人员所接受，研究主题与理论成果也越来越多，如：三支概念格属性约简[20-21]、三支概念格构建[22-24]、三支规则获取[25]、三支概念学习[26]、三支概念格的特征分析[27]以及三支概念格之间的关系研究[28]等.

三支概念从共性这一角度，同时考虑对象与属性之间“共同具有”以及“共同不具有”正、负两方面的信息. 但在某些实际问题中，共性信息可能不那么重要，比如在团队合作问题中，我们不仅需要知道一个团队可以合作完成哪些任务，还需要关注哪些任务仅可由该团队的成员完成，这就需要其他模态算子为我们提供的诸如必然信息等其他视角的信息，因此结合不同的模态算子来实现信息的多视角刻画就十分有意义. 其次，三支概念的外延与内涵存在着较为严苛的双向对应，故三支概念的获取也较为复杂，因此将 FCA 中半概念[29-30]的单向对应思想引入 3WCA 也显得十分有意义. 基于此，本文结合必然算子与可能算子，利用区间集[31]提出必然-可能三支算子，并定义必然-可能半三支概念，进而生成必然-可能半三支概念格.

1　基础知识

本节给出正交对、区间集以及 3WCA 的一些基本概念与性质.

对于任意非空论域 U，U 的幂集记为 $\mathscr{P}(U)$，U 的幂集的笛卡尔积记为 $\mathscr{DP}(U)$，即

$$\mathscr{DP}(U)=\mathscr{P}(U)\times\mathscr{P}(U)$$

对于任意的(A_1,B_1),$(A_2,B_2)\in\mathscr{DP}(U)$，$\mathscr{DP}(U)$ 上的包含、并、交分别定义为

$$(A_1,B_1)\subseteq(A_2,B_2)\Leftrightarrow A_1\subseteq A_2,\ B_1\subseteq B_2$$

$$(A_1,B_1)\cup(A_2,B_2)=(A_1\cup A_2,\ B_1\cup B_2)$$

$$(A_1,B_1)\cap(A_2,B_2)=(A_1\cap A_2,\ B_1\cap B_2)$$

特别地，对于$(A,B)\in\mathscr{DP}(U)$，如果 $A\cap B=\varnothing$，那么称(A,B)为一个正交对.

U 上的区间集为

$$[\underline{A},\overline{A}]=\{A\in\mathscr{P}(U)\mid \underline{A}\subseteq A\subseteq\overline{A}\}$$

U 上所有的区间集记为 $\mathscr{IP}(U)$. 对于任意$[\underline{A_1},\overline{A_1}]$,$[\underline{A_2},\overline{A_2}]\in\mathscr{IP}(U)$，$\mathscr{IP}(U)$ 上的包含、并、交分别定义为

$$[\underline{A_1},\overline{A_1}]\subseteq[\underline{A_2},\overline{A_2}]\Leftrightarrow\underline{A_1}\subseteq\underline{A_2},\ \overline{A_1}\subseteq\overline{A_2}$$

$$[\underline{A_1},\overline{A_1}]\cup[\underline{A_2},\overline{A_2}]=[\underline{A_1}\cup\underline{A_2},\ \overline{A_1}\cup\overline{A_2}]$$

$$[\underline{A_1},\overline{A_1}]\cap[\underline{A_2},\overline{A_2}]=[\underline{A_1}\cap\underline{A_2},\ \overline{A_1}\cap\overline{A_2}]$$

3WCA 的数据基础是形式背景.

定义 1[2]　称三元组(G,M,I)为一个形式背景，其中 $G=\{g_1,g_2,\cdots,g_p\}$ 为对象集，每个 $g_i(i\leqslant p)$ 称为一个对象；$M=\{m_1,m_2,\cdots,m_q\}$ 为属性集，每个 $m_j(j\leqslant q)$ 称为一个属性. $I\subseteq G\times M$ 为 G 和 M 之间的二元关系，若$(g,m)\in I$，则称对象 g 具有属性 m.

在形式背景(G,M,I)下，定义 * 算子与 $^{\bar{*}}$ 算子为：对于任意的对象子集 $X\subseteq G$ 和属性子集 $A\subseteq M$，

$$X^*=\{m\mid m\in M,\ \forall x\in X,\ xIm\}$$

$$X^{\bar{*}}=\{m\mid m\in M,\ \forall x\in X,\ xI^cm\}$$

$$A^{*}=\{g \mid g \in G,\ \forall a \in A,\ gIa\}$$

$$A^{\bar{*}}=\{g \mid g \in G,\ \forall a \in A,\ gI^{c}a\}$$

其中^{c}表示集合的补集，即 $I^{c}=G \times M-I$.

特别地，对于任意的 $g \in G$，$m \in M$，记$\{g\}^{*}$ 为 g^{*}，$\{m\}^{*}$ 为 m^{*}.

结合*算子与$^{\bar{*}}$算子，3WCA 定义一对对象导出三支算子，并可形成对象导出三支概念.

定义 2[9-10] 设(G, M, I)是一个形式背景. 对于任意的对象子集 $X \subseteq G$ 和属性子集 $A, B \subseteq M$，一对对象导出三支算子，即 OE- 算子$^{\lessdot}$：$\mathcal{P}(G) \longrightarrow \mathcal{DP}(M)$，$^{\gtrdot}$：$\mathcal{DP}(M) \longrightarrow \mathcal{P}(G)$ 定义如下：

$$X^{\lessdot}=(X^{*}, X^{\bar{*}}) \qquad (A, B)^{\gtrdot}=A^{*} \cap B^{\bar{*}}$$

若 $X^{\lessdot}=(A, B)$ 且$(A, B)^{\gtrdot}=X$ 同时成立，则$(X,(A, B))$称为(G, M, I)的一个对象导出三支概念，简称为 OE- 概念，其中 X 称为 OE- 概念的外延，(A, B)称为 OE- 概念的内涵.

对于对象子集 $\varnothing \neq X \subseteq G$，可以利用 OE- 算子得到属性集 M 上的一个正交对$(X^{*}, X^{\bar{*}})$，这个正交对可将 M 分为 3 部分：正域$\mathrm{POS}_X=X^{*}$、负域$\mathrm{NEG}_X=X^{\bar{*}}$，以及中间域$\mathrm{BND}_X=M-(X^{*} \cup X^{\bar{*}})$. POS_X，NEG_X 和 BND_X 两两互不相交，形成 M 的一个含空集的三划分，即弱三划分[32].

类似地，对于任意的属性子集 $A \subseteq M$ 和对象子集 $X, Y \subseteq G$，一对属性导出三支算子，简称 AE- 算子，$^{\lessdot}$：$\mathcal{P}(M) \longrightarrow \mathcal{DP}(G)$，$^{\gtrdot}$：$\mathcal{DP}(G) \longrightarrow \mathcal{P}(M)$，定义如下：

$$A^{\lessdot}=(A^{*}, A^{\bar{*}}) \qquad (X, Y)^{\gtrdot}=X^{*} \cap Y^{\bar{*}}$$

$((X, Y), A))$称为(G, M, I)的一个属性导出三支概念，即 AE- 概念，当且仅当$(X, Y)^{\gtrdot}=A$ 与 $A^{\lessdot}=(X, Y)$同时成立. (X, Y)称为 AE- 概念的外延，A 称为 AE- 概念的内涵.

所有 OE- 概念组成的集合 $\mathrm{OEL}(G, M, I)$可形成一个完备格，称之为对象导出三支概念格(简称 OE- 概念格). 对偶地，所有 AE- 概念形成的完备格称为属性导出三支概念格 $\mathrm{AEL}(G, M, I)$(简称 AE -概念格). OE- 概念格及 AE- 概念格上的偏序关系及上、下确界具体可参见文献[9-10].

例 1 表 1 为形式背景(G, M, I)，其中对象集 $G=\{1, 2, 3, 4\}$ 为 4 名学生的集合，属性集 $M=\{a, b, c, d\}$ 为 4 个问题的集合. 表 1 中“1”表示学生能解决该问题，“0”则表示不能，如：学生 1 能解决问题 a, c, d，不能解决问题 b. 表 1 形式背景的 OE- 概念格、AE- 概念格分别如图 1、图 2 所示.

表 1 形式背景(G, M, I)

G	a	b	c	d
1	1	0	1	1
2	1	1	0	0
3	0	0	1	0
4	1	1	0	0

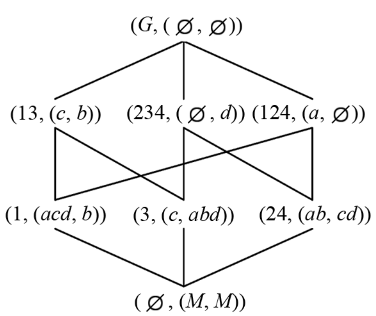

图 1 表 1 的 OE- 概念格

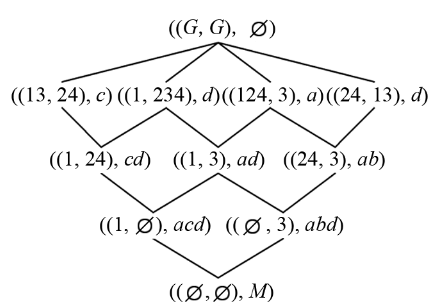

图 2 表 1 的 AE- 概念格

下面以$(13,(c, b))$为例解释 OE- 概念的语义. 该概念表明：学生 1 与 3 都可以解决的问题是 c，都不能解决的问题是 b，而能解决 c 且不能解决问题 b 的学生也恰为 1 与 3. $\{c\} \cup \{b\}$ 的补集中的问题 a, d 则是学生 1 与 3 具有差异的问题. 所以 OE- 概念清晰、完整、准确地反映了一个对象子集的正、负两种共性与差异性.

AE- 概念的解释与 OE- 概念类似，只不过是从属性角度出发，考虑一个属性子集被对象子集共同具有

以及共同不具有的情况.

此外，一些研究人员从模态逻辑的角度，将*算子称为充分算子，并陆续提出必然算子、可能算子以及对偶充分算子等概念[29-30].

给定形式背景(G, M, I)，对于任意 $X \subseteq G$，$A \subseteq M$，必然算子$^\square$定义为

$$X^\square = \{m \in M \mid m^* \subseteq X\}$$
$$A^\square = \{g \in G \mid g^* \subseteq A\}$$

可能算子$^\Diamond$定义为

$$X^\Diamond = \{m \in M \mid m^* \cap X \neq \varnothing\}$$
$$A^\Diamond = \{g \in G \mid g^* \cap A \neq \varnothing\}$$

以例 1 中的对象子集$\{1, 2\}$为例，$\{1, 2\}^\square = \{d\}$表明：能解决问题 d 的学生一定在学生 1 与 2 之中，$\{1, 2\}^\Diamond = M$ 表明：学生 1 和 2 能解决所有问题.

必然算子与可能算子的性质如下：

性质 1[33-34]　设(G, M, I)为一个形式背景，对于任意 $X, X_1, X_2 \subseteq G$，$A, A_1, A_2 \subseteq M$，有：

(i) $X^\square \subseteq X^\Diamond$，$A^\square \subseteq A^\Diamond$；

(ii) $X_1 \subseteq X_2 \Rightarrow X_1^\square \subseteq X_2^\square$，$A_1 \subseteq A_2 \Rightarrow A_1^\square \subseteq A_2^\square$；

(iii) $X_1 \subseteq X_2 \Rightarrow X_1^\Diamond \subseteq X_2^\Diamond$，$A_1 \subseteq A_2 \Rightarrow A_1^\Diamond \subseteq A_2^\Diamond$；

(iv) $(X_1 \cup X_2)^\square \supseteq X_1^\square \cup X_2^\square$，$(A_1 \cup A_2)^\square \supseteq A_1^\square \cup A_2^\square$；

(v) $(X_1 \cup X_2)^\Diamond = X_1^\Diamond \cup X_2^\Diamond$，$(A_1 \cup A_2)^\Diamond = A_1^\Diamond \cup A_2^\Diamond$；

(vi) $(X_1 \cap X_2)^\square = X_1^\square \cap X_2^\square$，$(A_1 \cap A_2)^\square = A_1^\square \cap A_2^\square$；

(vii) $(X_1 \cap X_2)^\Diamond \subseteq X_1^\Diamond \cap X_2^\Diamond$，$(A_1 \cap A_2)^\Diamond \subseteq A_1^\Diamond \cap A_2^\Diamond$.

2　对象导出必然-可能半三支概念

3WCA 从正、负两方面同时考虑共性，利用正交对实现对象集\属性集的三分. 事实上，不同的模态算子从不同的角度刻画不同的信息，并且不同模态算子之间也存在着内在关系，如：必然算子与可能算子间的包含关系，使得我们可以结合两种不同的模态算子，利用区间集等工具，定义新的三支算子来获取多视角信息，并实现对象集\属性集的三分.

2.1　对象导出必然-可能三支算子

结合必然算子$^\square$与可能算子$^\Diamond$，从对象子集三分属性集的角度，定义对象导出必然-可能三支算子如下：

定义 3　设(G, M, I)为一个形式背景，对于任意 $X \in \mathcal{P}(G)$，对象导出必然-可能三支算子$^\triangleleft: \mathcal{P}(G) \longrightarrow \mathcal{IP}(M)$，定义为 $X^\triangleleft = [X^\square, X^\Diamond]$，简称为 ONPE-算子.

ONPE-算子具有如下性质：

性质 2　设(G, M, I)为一个形式背景，对于任意 $X_1, X_2 \in \mathcal{P}(G)$，我们有：

(i) $X_1 \subseteq X_2 \Rightarrow X_1^\triangleleft \subseteq X_2^\triangleleft$；

(ii) $(X_1 \cup X_2)^\triangleleft \supseteq X_1^\triangleleft \cup X_2^\triangleleft$；

(iii) $(X_1 \cap X_2)^\triangleleft \subseteq X_1^\triangleleft \cap X_2^\triangleleft$.

证　(i) 若 $X_1 \subseteq X_2$，由性质 1(b),(c)，我们有 $X_1^\square \subseteq X_2^\square$，$X_1^\Diamond \subseteq X_2^\Diamond$，则

$$X_1^\triangleleft = [X_1^\square, X_1^\Diamond] \subseteq [X_2^\square, X_2^\Diamond] = X_2^\triangleleft$$

(ii) 由性质 1(d),(e)，可知

$$\begin{aligned}&(X_1 \cup X_2)^\triangleleft = \\ &[(X_1 \cup X_2)^\square, (X_1 \cup X_2)^\Diamond] = [(X_1 \cup X_2)^\square, X_1^\Diamond \cup X_2^\Diamond] \supseteq \\ &[X_1^\square \cup X_2^\square, X_1^\Diamond \cup X_2^\Diamond] = [X_1^\square, X_1^\Diamond] \cup [X_2^\square, X_2^\Diamond] = X_1^\triangleleft \cup X_2^\triangleleft\end{aligned}$$

(iii) 由性质 1(f),(g)，我们有

$$(X_1 \cap X_2)^{\triangleleft} =$$
$$[(X_1 \cap X_2)^{\Box}, (X_1 \cap X_2)^{\Diamond}] = [X_1^{\Box} \cap X_2^{\Box}, (X_1 \cap X_2)^{\Diamond}] \subseteq$$
$$[X_1^{\Box} \cap X_2^{\Box}, X_1^{\Diamond} \cap X_2^{\Diamond}] = [X_1^{\Box}, X_1^{\Diamond}] \cap [X_2^{\Box}, X_2^{\Diamond}] = X_1^{\triangleleft} \cap X_2^{\triangleleft}$$

2.2 对象导出必然-可能半三支概念

形式概念分析中，称形如(X, X^*),(A^*, A)的二元对为形式背景(G, M, I)的半概念，其中$X \subseteq G$是任意的对象子集，$A \subseteq M$是任意的属性子集. 不难看出，半概念仅考虑对象子集与属性子集间的单向对应，而不再强调苛刻的双向对应. 基于这种思想，我们利用 ONPE-算子，定义对象导出必然-可能半三支概念为：

定义 4 设(G, M, I)为一个形式背景，对于任意$X \in \mathscr{P}(G)$，$[\underline{A}, \overline{A}] \in \mathscr{IP}(M)$，若$X^{\triangleleft} = [\underline{A}, \overline{A}]$，则称$(X, [\underline{A}, \overline{A}])$为对象导出必然-可能半三支概念，简称为 ONPSE-概念，其中X称为 ONPSE-概念的外延，$[\underline{A}, \overline{A}]$称为 ONPSE-概念的内涵.

对于对象子集$X \subseteq G$，区别于 OE-算子获取的共有属性，ONPE-算子可以同时获取必然属性$X^{\Box}$与可能属性$X^{\Diamond}$，并形成属性集M上的一个区间集$[X^{\Box}, X^{\Diamond}]$，这个区间集可将M分为 3 部分：正域$\mathrm{POS}_X = X^{\Box}$、负域$\mathrm{NEG}_X = M - X^{\Diamond}$以及中间域$\mathrm{BND}_X = X^{\Diamond} - X^{\Box}$. 并且$\mathrm{POS}_X$,$\mathrm{NEG}_X$和$\mathrm{BND}_X$两两互不相交，形成$M$的一个弱三划分.

例 2 表 1 形式背景下所有的 ONPSE-概念如表 2 所示.

以$(12, [d, M])$，$(14, [d, M])$为例解释 ONPSE-概念的语义. 概念$(12, [d, M])$表明：能解决问题d的学生在学生 1 与学生 2 当中，学生 1 和学生 2 可以合作解决所有的问题. 类似地，概念$(14, [d, M])$表明：能解决问题d的学生在学生 1 与学生 4 当中，学生 1 和学生 4 可以合作解决所有的问题. 结合两个 ONPSE-概念，我们进一步可知，能解决问题d的学生是学生 1，符合概念$(1, [d, acd])$所反映的信息.

表 2 表 1 的 ONPSE-概念

标号	ONPSE-概念	标号	ONPSE-概念
oc_1	$(\varnothing, [\varnothing, \varnothing])$	oc_9	$(23, [\varnothing, abc])$
oc_2	$(1, [d, acd])$	oc_{10}	$(24, [b, ab])$
oc_3	$(2, [\varnothing, ab])$	oc_{11}	$(34, [\varnothing, abc])$
oc_4	$(3, [\varnothing, c])$	oc_{12}	$(123, [cd, M])$
oc_5	$(4, [\varnothing, ab])$	oc_{13}	$(124, [abd, M])$
oc_6	$(12, [d, M])$	oc_{14}	$(134, [cd, M))$
oc_7	$(13, [cd, acd])$	oc_{15}	$(234, [b, abc])$
oc_8	$(14, [d, M])$	oc_{16}	$(G, [M, M])$

记(G, M, I)的所有 ONPSE-概念的集合为$\mathrm{ONPSEL}(G, M, I)$，定义其偏序关系为：对于任意$(X_1, [\underline{A_1}, \overline{A_1}])$,$(X_2, [\underline{A_2}, \overline{A_2}]) \in \mathrm{ONPSEL}(G, M, I)$，

$$(X_1, [\underline{A_1}, \overline{A_1}]) \leqslant (X_2, [\underline{A_2}, \overline{A_2}]) \Leftrightarrow X_1 \subseteq X_2$$

称$\mathrm{ONPSEL}(G, M, I)$为(G, M, I)的对象导出必然-可能半三支概念格，简称为 ONPSE-概念格. 定理 1 给出其上、下确界，并证明其是一个完备格.

定理 1 $\mathrm{ONPSEL}(G, M, I)$是一个完备格，其上、下确界分别为：

$$(X_1, [\underline{A_1}, \overline{A_1}]) \vee (X_2, [\underline{A_2}, \overline{A_2}]) = (X_1 \cup X_2, [(X_1 \cup X_2)^{\Box}, \overline{A_1} \cup \overline{A_2}])$$
$$(X_1, [\underline{A_1}, \overline{A_1}]) \wedge (X_2, [\underline{A_2}, \overline{A_2}]) = (X_1 \cap X_2, [\underline{A_1} \cap \underline{A_2}, (X_1 \cap X_2)^{\Diamond}])$$

证 对于任意的$(X_1, [\underline{A_1}, \overline{A_1}])$,$(X_2, [\underline{A_2}, \overline{A_2}]) \in \mathrm{ONPSEL}(G, M, I)$，由 ONPE-算子的定义可知

$$(X_1 \cup X_2)^{\triangleleft} = [(X_1 \cup X_2)^{\Box}, (X_1 \cup X_2)^{\Diamond}] = [(X_1 \cup X_2)^{\Box}, \overline{A_1} \cup \overline{A_2}]$$

故$(X_1 \cup X_2, [(X_1 \cup X_2)^{\Box}, \overline{A_1} \cup \overline{A_2}]) \in \mathrm{ONPSEL}(U, A, I)$. 再证$(X_1 \cup X_2, [(X_1 \cup X_2)^{\Box}, \overline{A_1} \cup \overline{A_2}])$是上确界. 首先由$X_1 \subseteq X_1 \cup X_2$且$X_2 \subseteq X_1 \cup X_2$，有

$$(X_1, [\underline{A_1}, \overline{A_1}]) \leqslant (X_1 \cup X_2, [(X_1 \cup X_2)^{\Box}, \overline{A_1} \cup \overline{A_2}])$$

$$(X_2, [\underline{A_2}, \overline{A_2}]) \leqslant (X_1 \cup X_2, [(X_1 \cup X_2)^{\square}, \overline{A_1} \cup \overline{A_2}])$$

则其为上界. 下证是最小上界. 设$(X, [\underline{A}, \overline{A}])$是$(X_1, [\underline{A_1}, \overline{A_1}])$,$(X_2, [\underline{A_2}, \overline{A_2}])$的任意上界，即

$$(X_1, [\underline{A_1}, \overline{A_1}]) \leqslant (X, [\underline{A}, \overline{A}])$$

$$(X_2, [\underline{A_2}, \overline{A_2}]) \leqslant (X, [\underline{A}, \overline{A}])$$

则 $X_1 \subseteq X$ 且 $X_2 \subseteq X$，故 $X_1 \cup X_2 \subseteq X$，因此

$$(X_1 \cup X_2, [(X_1 \cup X_2)^{\square}, (X_1 \cup X_2)^{\diamond}]) \leqslant (X, [\underline{A}, \overline{A}])$$

是最小上界，即上确界. 同理可证，$(X_1 \cap X_2, [\underline{A_1} \cap \underline{A_2}, (X_1 \cap X_2)^{\diamond}])$是一个 ONPSE -概念，且为下确界.

例 3　表 1 的 ONPSE -概念格如图 3 所示.

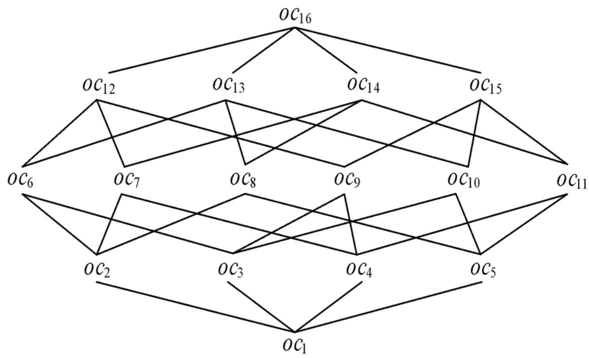

图 3　表 1 的 ONPSE -概念格

由 ONPSE -概念定义可知，任给一个对象子集 $X \subseteq G$，都存在一个 ONPSE -概念$(X, [\underline{A}, \overline{A}])$与之一一对应，因此有如下结论成立：

定理 2　$\mathrm{ONPSEL}(G, M, I) \cong \mathscr{P}(G)$，其中 $\mathscr{P}(G)$ 为 G 的幂集格.

3　属性导出必然-可能半三支概念

3.1　属性导出必然-可能三支算子

结合必然算子$^{\square}$与可能算子$^{\diamond}$，从属性子集三分对象集的角度研究属性导出必然-可能半三支概念. 因与第 2 节类似，本节证明省略. 首先，定义属性导出必然-可能三支算子如下：

定义 5　设(G, M, I)为一个形式背景，对于任意 $A \in \mathscr{P}(M)$，定义属性导出必然-可能三支算子$^{\triangleright}$：$\mathscr{P}(M) \longrightarrow \mathscr{IP}(G)$ 为 $A^{\triangleright} = [A^{\square}, A^{\diamond}]$. 简称为 ANPE -算子.

ANPE -算子具有如下性质：

性质 3　设(G, M, I)为一个形式背景，对于任意 $A_1, A_2 \in \mathscr{P}(M)$，我们有：

(i) $A_1 \subseteq A_2 \Rightarrow A_1^{\triangleright} \subseteq A_2^{\triangleright}$；

(ii) $(A_1 \cup A_2)^{\triangleright} \supseteq A_1^{\triangleright} \cup A_2^{\triangleright}$；

(iii) $(A_1 \cap A_2)^{\triangleright} \subseteq A_1^{\triangleright} \cap A_2^{\triangleright}$.

3.2　属性导出必然-可能半三支概念

ANPE -算子可以生成属性导出必然-可能半三支概念，简称 ANPSE -概念.

定义 6　设(G, M, I)为一个形式背景，对于任意$[\underline{X}, \overline{X}] \in \mathscr{IP}(G)$，$A \in \mathscr{P}(M)$，若$[\underline{X}, \overline{X}] = A^{\triangleright}$，则称$([\underline{X}, \overline{X}], A)$为属性导出必然-可能半三支概念，其中$[\underline{X}, \overline{X}]$称为 ANPSE -概念的外延，$A$ 称为 ANPSE -概念的内涵.

ONPSE -概念与 ANPSE -概念统称为必然-可能半三支概念，简称为 NPSE -概念.

类似于 ONPE-算子，对于属性子集 $A \subseteq M$，可以利用 ANPE-算子得对象集 G 上的一个区间集$[A^{\square}, A^{\diamond}]$，这个区间集可将 G 分为 3 部分：正域 $\mathrm{POS}_A = A^{\square}$、负域 $\mathrm{NEG}_A = G - A^{\diamond}$ 以及中间域 $\mathrm{BND}_A = A^{\diamond} - A^{\square}$. 并且 POS_A, NEG_A 和 BND_A 互不相交，形成 G 的一个弱三划分.

记(G, M, I)的所有 ANPSE -概念的集合为 ANPEL(G, M, I)，对于任意的$([\underline{X_1}, \overline{X_1}], A_1)$，$([\underline{X_2}, \overline{X_2}], A_2) \in$ ANPSEL(G, M, I)，定义其偏序关系：

$$([\underline{X_1}, \overline{X_1}], A_1) \leqslant ([\underline{X_2}, \overline{X_2}], A_2) \Leftrightarrow A_1 \subseteq A_2$$

称 ANPSEL(G, M, I)为(G, M, I)的属性导出必然-可能半三支概念格，简称为 ANPSE -概念格.

定理 3 ANPSEL(G, M, I)是一个完备格，其上、下确界分别为

$$([\underline{X_1}, \overline{X_1}], A_1) \vee ([\underline{X_2}, \overline{X_2}], A_2) = ([(A_1 \cup A_2)^{\Box}, \overline{X_1} \cup \overline{X_2}], A_1 \cup A_2)$$

$$([\underline{X_1}, \overline{X_1}], A_1) \wedge ([\underline{X_2}, \overline{X_2}], A_2) = ([\underline{X_1} \cap \underline{X_2}, (A_1 \cap A_2)^{\Diamond}], A_1 \cap A_2)$$

例 4 表 1 的所有 ANPSE -概念如表 3 所示，ANPSE -概念格如图 4 所示.

以$([234, G], abc)$为例解释 ANPSE -概念的语义. 概念$([234, G], abc)$表明：问题a,b,c可被所有学生合作解决，学生 2,3,4 能解决的问题在a,b,c当中. 并且G与$\{2, 3, 4\}$的差集中的学生 1 还能解决其他问题，如概念$([\varnothing, 1], d)$表明：学生 1 还能解决问题d.

表 3 表 1 的 ANPSE -概念

序号	ANPSE -概念	序号	ANPSE -概念
ac_1	$([\varnothing, \varnothing], \varnothing)$	ac_9	$([3, G], bc)$
ac_2	$([\varnothing, 124], a)$	ac_{10}	$([\varnothing, 124], bd)$
ac_3	$([\varnothing, 24], b)$	ac_{11}	$([3, 13], cd)$
ac_4	$([3, 13], c)$	ac_{12}	$([234, G], abc)$
ac_5	$([\varnothing, 1], d)$	ac_{13}	$([24, 124], abd)$
ac_6	$([24, 124], ab)$	ac_{14}	$([13, G], acd)$
ac_7	$([3, G], ac)$	ac_{15}	$([3, G], bcd)$
ac_8	$([\varnothing, 124], ad)$	ac_{16}	$([G, G], M)$

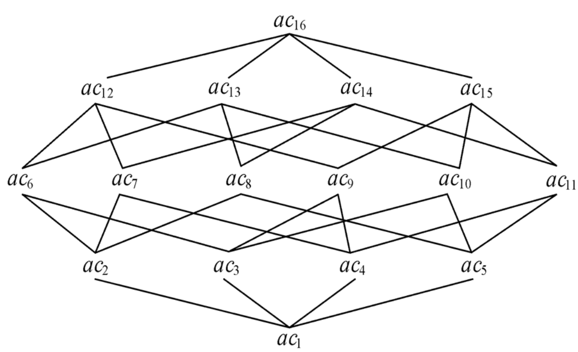

图 4 表 1 的 ANPSE -概念格

由 ANPSE -概念定义，可得以下结论：

定理 4 ANPSEL$(G, M, I) \cong \mathscr{P}(M)$，其中$\mathscr{P}(M)$为$M$的幂集格.

4 结语

本文基于多视角信息获取这一想法，结合必然算子与可能算子，从对象或属性这两种不同的角度出发，定义了对象导出与属性导出必然-可能三支算子，并结合形式概念分析中半概念的单向对应思想，获取了对象导出与属性导出必然-可能半三支概念，拓广了三支概念的语义.

事实上，对象与属性作为两种不同的研究角度，生成的两种必然-可能半三支概念的语义解释与应用场景也有所不同，如在形式概念分析与知识空间理论结合的研究[35-36]中，从对象或属性出发可分别看作是问题驱动或技能驱动这两种截然不同的研究方向，因此如何结合上述研究成果，对两种必然-可能半三支概念的语义与应用做进一步研究就很有意义. 本文仅从正面结合必然算子与可能算子获取了多视角的信息，而负信息也很重要，因此如何从负面结合必然算子与可能算子来获取信息也十分有意义. 并且必然算子与可能算子与双论域粗糙集[37-38]的下、上近似有着紧密联系[39]，因此本文获取的必然-可能半三支概念对双论域粗糙集的知识可视化也有所帮助，如：我们可以从 ONPSE -概念格迅速获取双论域粗糙集的可定

义集与不可定义集，因此如何将本文研究内容与双论域粗糙集结合也很重要. 最后，其他模态算子的结合研究也十分有意义，如文献[40]结合充分算子与可能算子探讨了共同-可能粒描述. 这些都是我们未来的研究方向.

参考文献：

[1] WILLE R. Restructuring Lattice Theory：An Approach Based on Hierarchies of Concepts [M]//RIVAL I. Ordered Sets. Dordrecht：Springer，1982：445-470.

[2] GANTER B，WILLE R. Formal Concept Analysis：Mathematical Foundations [M]. New York：Springer-Verlag，1999.

[3] 张文修，魏玲，祁建军. 概念格的属性约简理论与方法 [J]. 中国科学 E 辑：信息科学，2005，35(6)：628-639.

[4] 魏玲，祁建军，张文修. 决策形式背景的概念格属性约简 [J]. 中国科学 E 辑：信息科学，2008，38(2)：195-208.

[5] LI J H，MEI C L，LV Y J. Knowledge Reduction in Decision Formal Contexts [J]. Knowledge-Based Systems，2011，24(5)：709-715.

[6] WU W Z，LEUNG Y，MI J S. Granular Computing and Knowledge Reduction in Formal Contexts [J]. IEEE Transactions on Knowledge and Data Engineering，2009，21(10)：1461-1474.

[7] 黄治国，杨清琳. 基于启发式二分策略的属性约简方法 [J]. 西南师范大学学报(自然科学版)，2020，45(4)：59-67.

[8] LI J H，MEI C L，KUMAR C A，et al. On Rule Acquisition in Decision Formal Contexts [J]. International Journal of Machine Learning and Cybernetics，2013，4(6)：721-731.

[9] QI J J，WEI L，YAO Y Y. Three-Way Formal Concept Analysis [C]//MIAO D，PEDRYCZ W，ŚLęZAK D，et al. Rough Sets and Knowledge Technology RSKT 2014：Lecture Notes in Computer Science vol 8818. Switzerland：Springer，2014：732-741.

[10] QI J J，QIAN T，WEI L. The Connections Between Three-Way and Classical Concept Lattices [J]. Knowledge-Based Systems，2016，91：143-151.

[11] 智慧来，徐彤，李逸楠. 基于三支概念簇的知识表示 [J]. 西南大学学报(自然科学版)，2021，43(10)：10-18.

[12] WILLE R. The Basic Theorem of Triadic Concept Analysis [J]. Order，1995，12(2)：149-158.

[13] WAN Q，LI J H，WEI L. Optimal Granule Combination Selection Based on Multi-Granularity Triadic Concept Analysis [J]. Cognitive Computation，2021，2021：1-15.

[14] WEI L，QIAN T，WAN Q，et al. A Research Summary About Triadic Concept Analysis [J]. International Journal of Machine Learning and Cybernetics，2018，9(4)：699-712.

[15] CHEN J H，ZHENG H Y，WEI L，et al. Factor Diagnosis and Future Governance of Dangerous Goods Accidents in China's Ports [J]. Environmental Pollution，2020，257：1-8.

[16] QUINTERO N Y，RESTREPO G. Formal Concept Analysis Applications in Chemistry：From Radionuclides and Molecular Structure to Toxicity and Diagnosis [M]. New-York：Springer，2017.

[17] XIE J P，YANG M H，LI J H，et al. Rule Acquisition and Optimal Scale Selection in Multi-Scale Formal Decision Contexts and Their Applications to Smart City [J]. Future Generation Computer Systems，2018，83：564-581.

[18] YAO Y Y. An Outline of A Theory of Three-Way Decisions [C]//YAO J T，YANG Y，SLOWINSKIN，et al. Proceedings of 2012 Rough Sets and Current Trends in Computing：Lecture Notes in Computer Science vol 7413. Berlin，Heidelberg：Springer，2012：1-17.

[19] CIUCCI D. Orthopairs：A Simple and Widely Used Way to Model Uncertainty [J]. Fundamenta Informaticae ，2011，108(3/4) ：287-304.

[20] REN R S，WEI L. The Attribute Reductions of Three-Way Concept Lattices [J]. Knowledge-Based Systems，2016，99：92-102.

[21] WANG Z，WEI L，QI J，et al. Attribute Reduction of SE-ISI Concept Lattices for Incomplete Contexts [J]. Soft Computing，2020，24(20)：15143-15158.

[22] QIAN T，WEI L，QI J J. Constructing Three-Way Concept Lattices Based on Apposition and Subposition of Formal Contexts [J]. Knowledge-Based Systems，2017，116：39-48.

[23] YANG S C，LU Y N，JIA X Y，et al. Constructing Three-Way Concept Lattice Based on The Composite of Classical Lattices [J]. International Journal of Approximate Reasoning，2020，121：174-186.

[24] 祁建军，汪文威. 多线程并行构建三支概念 [J]. 西安交通大学学报，2017，51(3)：116-121.

[25] WEI L. LIU L, QI J J, et al. Rules Acquisition of Formal Decision Contexts Based on Three-Way Concept Lattices [J]. Information Sciences, 2020, 516: 529-544.

[26] HUANG C C, LI J H, MEI C L, et al. Three-Way Concept Learning Based on Cognitive Operators: An Information Fusion Viewpoint [J]. International Journal of Approximate Reasoning, 2017, 83(1): 218-242.

[27] YU H Y, LI Q G, CAI M J. Characteristics of Three-Way Concept Lattices and Three-Way Rough Concept Lattices [J]. Knowledge-Based Systems, 2018, 146: 181-189.

[28] ZHAO X R, MIAO D Q, HU B Q. On Relationship Between Three-Way Concept Lattices [J]. Information Sciences, 2020, 538: 396-414.

[29] VORMBROCK B, WILLE R. Semiconcept and Protoconcept Algebras: The Basic Theorems [M]//Formal Concept Analysis. Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg, 2005: 34-48.

[30] HOWLADER P, BANERJEE M. Algebras from Semiconcepts in Rough Set Theory [C]//NGUYEN H, HA Q T, LI T, et al. International Joint Conference on Rough Sets. Switzerland: Springer Cham, 2018: 440-454.

[31] YAO Y Y. Interval Sets and Interval-Set Algebras [C]//2009 8th IEEE International Conference on Cognitive Informatics. June 15-17, 2009, Hongkong China. Piscataway: IEEE, 307-314.

[32] YAO Y Y. Three-Way Decision and Granular Computing [J]. International Journal of Approximate Reasoning, 2018, 103: 107-123.

[33] DÜNTSCH N, GEDIGA G. Modal-Style Operators in Qualitative Data Analysis [C]//2002 IEEE International Conference on Data Mining, December 9-12, 2002, Maebashi City, Japan, Piscataway: IEEE, 2002: 155-162.

[34] DÜNTSCH I, GEDIGA G. Approximation Operators in Qualitative Data Analysis [C]//SWART H, ORŁOWSKA E, SCHMIDT G, et al. Theory and Applications of Relational Structures as Knowledge Instruments. Lecture Notes in Computer Science vol 2929. Berlin Heidelberg: Springer, 2003: 214-230.

[35] 李进金, 孙文. 知识空间、形式背景和知识基 [J]. 西北大学学报(自然科学版), 2019, 49(4): 517-526.

[36] SUN W, LI J J, GE X, et al. Knowledge Structures Delineated by Fuzzy Skill Maps [J]. Fuzzy Sets and Systems, 2021, 407: 50-66.

[37] PEI D W, XU Z B. Rough Set Models on Two Universes [J]. International Journal of General Systems , 2004, 33(5): 569-581.

[38] 谢德华, 刘财辉, 凌敏. 局部多粒度覆盖粗糙集 [J]. 西南大学学报(自然科学版), 2021, 43(10): 1-9.

[39] SHAO M W. GUO L, WANG C Z. Connections Between Two-Universe Rough Sets and Formal Concepts [J]. International Journal of Machine Learning and Cybernetics, 2018, 9(11): 1869-1877.

[40] ZHI H L, QI J J. Common-Possible Concept Analysis: A Granule Description Viewpoint [J]. Applied Intelligence, 2021, 2021: 1-12.

责任编辑 廖坤