第 47 卷 第 4 期 西南师范大学学报(自然科学版) 2022 年 4 月
Vol. 47 No. 4 Journal of Southwest China Normal University (Natural Science Edition) Apr. 2022

DOI:10.13718/j.cnki.xsxb.2022.04.003

用极大交换子群阶的集合刻画 S_n ①

高丽， 汪忠碧， 陈贵云

西南大学 数学与统计学院，重庆 400715

摘要： 本文研究了与对称群的极大交换子群的阶的集合相同的有限群，并证明了对称群 $S_n(5 \leqslant n \leqslant 8)$ 可由其极大交换子群的阶的集合刻画.

关 键 词： 素图；极大交换子群；对称群

中图分类号： O152.1 **文献标志码：** A **文章编号：** 1000-5471(2022)04-0021-04

Characterization of S_n by the Set of Orders of Its Maximal Abelian Subgroups

GAO Li， WANG Zhongbi， CHEN Guiyun

School of Mathematics and Statistics, Southwest University, Chongiqng 400715, China

Abstract: In this paper, some finite groups which have the same set of orders of maximal abelian subgroups of some symmetric groups has been studied, and that the symmetric groups $S_n(5 \leqslant n \leqslant 8)$ can be uniquely characterized by the set of orders of maximal abelian subgroups.

Key words: prime graph; maximal abelian subgroups; symmetric groups

用群的局部性质研究有限群的结构是群结构研究的基本方法. 施武杰最早开始利用群的数量性质来研究有限群的结构，特别是单群的刻画. 关于交错群和对称群的数量刻画，文献[1]证明了 $G \cong A_n$ 当且仅当 $\pi_e(G)=\pi_e(A_n)$，$|G|=|A_n|$. 文献[2]证明了 $G \cong S_n$ 当且仅当 $\pi_e(G)=\pi_e(S_n)$，$|G|=|S_n|$，后来又证明了交错群可以仅用元的阶之集合刻画，即仅用 $\pi_e(G)=\pi_e(S_n)$ 刻画. 文献[3]用群的第一 ONC-度量刻画了 $S_n(n \leqslant 14)$. 文献[4]用群的第一 ONC-度量和群的阶的最大素因子刻画了 Conway 单群和 Fischer 单群. 交换子群的阶和个数是群的重要特征，文献[5]证明了群 G 的同阶交换子群的个数之集为{1，3}等价于群 G 的同阶子群的个数之集为{1，3}. 文献[6]仅用极大交换子群的阶刻画了 K_3-单群. 文献[7-8]仅用极大交换子群的阶刻画了 A_{11}、部分李型单群和散在单群. 文献[9]用极大交换子群的阶刻画了 A_p，其中 p 和 $p-2$ 是素数，即：全部素图分支数为 3 的交错群可以用极大交换子群阶的集合刻画.

本文继续探究极大交换子群的阶对群结构的影响，研究与对称群的极大交换子群阶的集合相同的有限群，得到 $S_n(n=5,7,8)$ 可由其极大交换子群阶之集合刻画.

---

① 收稿日期：2021-09-30

基金项目：国家自然科学基金项目(12071376).

作者简介：高丽，硕士研究生，主要从事群论的研究.

通信作者：陈贵云，教授.

本文所涉及的群都是有限群. 文献[6]用 $M(G)$ 代表有限群 G 的全部极大交换子群的阶的集合，但此符号在不同文献中有不同含义. 本文为了方便，用 $\pi_{\mathrm{mas}}(G)$ 代表有限群 G 的全部极大交换子群的阶的集合，其余符号都是标准的.

引理 1[10]　G 是有限群且素图不连通，则下列结论之一成立：

(i) G 为 Frobenius 群；

(ii) G 为 2-Frobenius 群；

(iii) G 有正规列：$1 \trianglelefteq H \trianglelefteq K \trianglelefteq G$，使得 H 和 G/K 是 π_1-群，K/H 是非交换单群，H 是幂零群，其中 $2 \in \pi_1$，且 $|G/K| \,\big|\, |\mathrm{Out}(K/H)|$.

引理 2[11]　设 $G=HK$ 是以 K 为 Frobenius 核，H 为 Frobenius 补的 Frobenius 群，则 K 幂零，且 $|H| \,\big|\, (|K|-1)$. 特别地，若 $p \in \pi(H)$ 且 $q \in \pi(K)$，则 $|H_p| \,\big|\, (|K_q|-1)$，$|H| \,\big|\, (|K_q|-1)$. 此时，$t(G)=2$，$\Gamma(G)=\{\pi(H), \pi(K)\}$.

引理 3[11]　设 G 是 2-Frobenius 群，则 $G=DEF$，其中 D 和 DE 是 G 的正规子群，DE 和 EF 是分别以 D 和 E 为核的 Frobenius 群. 此时，$t(G)=2$，$\pi_1(G)=\pi(D) \cup \pi(F)$，$\pi_2(G)=\pi(E)$.

引理 4[12]　设 G 是 $2^a 3^b 5^c 7^d$ 阶单群，则 G 同构于下述群之一：

(i) Z_2, Z_3, Z_5, Z_7；

(ii) $A_5, L_2(7), A_6, L_2(8), U_3(3), U_4(2)$；

(iii) $A_7, A_8, L_3(4), L_2(49), U_3(5), A_9, J_2, S_6(2), A_{10}, U_4(3), S_4(7), O_8^+(2)$.

在以下定理的证明中，若 G 为 Frobenius 群或 2-Frobenius 群，则默认沿用引理 2 和引理 3 的记号，并不再加任何说明.

定理 1　设 G 是有限群，若 $\pi_{\mathrm{mas}}(G)=\pi_{\mathrm{mas}}(S_5)$，则 $G \cong S_5$.

证　由 Magma 计算知，S_5 的极大交换子群的阶分别为 4,5,6，则 $|G|=2^n \cdot 3 \cdot 5 (n \geqslant 2)$. 由极大交换子群的阶可知 G 的素图不连通，且 $t(G)=2$，$\pi_1(G)=\{2, 3\}$，$\pi_2(G)=\{5\}$. 由引理 1，需讨论如下 3 种情形：

情形 1　若 G 为 Frobenius 群，设 $G=HK$. 由引理 2 知，$\pi(K)=\pi_1(G)=\{2, 3\}$，$\pi(H)=\pi_2(G)=\{5\}$，$|K|=2^n \cdot 3$，$|H|=5$. 由引理 2，得 $5=|H| \,\big|\, (|K_3|-1)=2$，矛盾. 因此，$G$ 不能是 Frobenius 群.

情形 2　若 G 为 2-Frobenius 群，设 $G=DEF$. 由引理 2 知，$\pi(D) \cup \pi(F)=\{2, 3\}$，$\pi(E)=\{5\}$. 此时，$|F| \,\big|\, (|E|-1)$，所以 $|F| \,\big|\, 4$，则 $3 \in \pi(D)$. 因为 D_3E 是一个以 D_3 为 Frobenius 核的 Frobenius 群，所以 $|E| \,\big|\, (|D_3|-1)$，而 $|E|=5$，$|D_3|=3$，矛盾. 因此，G 不能是 2-Frobenius 群.

情形 3　若 G 有正规列 $1 \trianglelefteq H \trianglelefteq K \trianglelefteq G$，使得 H 和 G/K 是 $\{2, 3\}$-群，K/H 是非交换单群，H 是幂零群，其中 $2 \in \pi_1$，且 $|G/K| \,\big|\, |\mathrm{Out}(K/H)|$.

易知，$5 \in \pi(K/H)$，且 $\pi(K/H) \subseteq \{2, 3, 5\}$，$K/H$ 为非交换单群. 若 $H>1$，则 $Z(H)>1$，由 G 的极大交换 2-群的阶为 4，知 $|Z(H)|=2,4$. 再由 $Z(H) \operatorname{char} H \trianglelefteq G$，知 $Z(H) \trianglelefteq G$. 取 $P_5 \in \mathrm{Syl}_5(G)$，由 N-C 定理知，$P_5$ 在 $Z(H)$ 上的共轭作用是平凡的，则 $P_5 Z(H)$ 是 G 的 10 阶或 20 阶交换子群，矛盾. 因此，$H=1$. 此时，$C_G(K)=1$，否则，$KC_G(K)=K \times C_G(K)$，G 有 5 的倍数阶交换子群，矛盾. 因此 $A_5 \cong K \leqslant G \leqslant \mathrm{Aut}(K)$，若 $|G/K|=1$，则 $G \cong A_5$，而 A_5 的极大交换子群的阶与 G 的阶并不相等，矛盾. 因此，$|G/K|=2$，$G=S_5$.

定理 2　设 G 是有限群，如果 $\pi_{\mathrm{mas}}(G)=\pi_{\mathrm{mas}}(S_6)$，则 $G \cong S_6$.

证　由 Magma 计算知 $\pi_{\mathrm{mas}}(S_6)=\{5, 6, 8, 9\}$，所以 $|G|=2^n \cdot 3^m \cdot 5 (n \geqslant 3, m \geqslant 2)$. 由极大交换子群的阶可知 G 的素图不连通，且 $t(G)=2$，$\pi_1(G)=\{2, 3\}$，$\pi_2(G)=\{5\}$. 于是有如下可能性：

若 G 为 Frobenius 群，设 $G=HK$. 由引理 2 知，$\pi(K)=\pi_1(G)=\{2, 3\}$，$\pi(H)=\pi_2(G)=\{5\}$，$|K|=2^n \cdot 3^m$，$|H|=5$. 再由 $n \geqslant 3$，$m \geqslant 2$，知 K 有 36 阶交换子群，矛盾.

若 G 为 2-Frobenius 群，设 $G=DEF$. 由引理 2 知 $\pi(D) \cup \pi(F)=\{2, 3\}$，$\pi(E)=\{5\}$. 由 $|F| \,\big|\, (|E|-1)$，

得 $|F|\,\big|\,4$，从而 $\pi(F)=\{2\}$，$3\in\pi(D)$. 取 $D_3\in \mathrm{Syl}_3(D)$，易知 D_3E 是以 D_3 为核的 Frobenius 群，由 $Z(D_3)$ char $D_3 \trianglelefteq D_3E$，得 $Z(D_3)\trianglelefteq D_3E$. 已知 G 的极大交换 3-子群的阶为 9，则 $|Z(D_3)|=3,9$. 于是，E 在 $Z(D_3)$ 上的共轭作用是平凡的，从而 D_3E 有 15 阶元，G 有 15 阶交换子群，矛盾. 因此，G 不能是 2-Frobenius 群.

若 G 有正规列 $1\trianglelefteq H\trianglelefteq K\trianglelefteq G$，使得 H 和 G/K 是 $\{2, 3\}$-群，K/H 是非交换单群，H 是幂零群，其中 $2\in\pi_1$，且 $|G/K|\,\big|\,|\mathrm{Out}(K/H)|$.

易知，$5\in\pi(K/H)$，且 $\pi(K/H)\subseteq\{2, 3, 5\}$，$K/H$ 是非交换单群. 若 $|H|>1$，可设 $|H|=2^l\cdot 3^h(l\leqslant n, h\leqslant m)$，由 H 是幂零群，可知 $H=P_2P_3$，其中 $P_2\in \mathrm{Syl}_2(H)$，$P_3\in \mathrm{Syl}_3(H)$，$P_i\trianglelefteq G$ $(i=2,3)$，若 $P_i\neq 1$，则 $Z(P_i)\neq 1$，且 $Z(P_i)$ char $P_i\trianglelefteq G$，得 $Z(P_i)\trianglelefteq G(i=2,3)$. 由 $\pi_{\mathrm{mas}}(G)=\{5, 6, 8, 9\}$ 知 $|Z(P_i)|\,\big|\,8$ 或 $|Z(P_i)|\,\big|\,9$. 取 $P_5\in \mathrm{Syl}_5(G)$，则 P_5 在 $Z(P_2)$ 和 $Z(P_3)$ 上的共轭作用都是平凡的，分别产生 10 阶元和 15 阶元，这与 $\pi_{\mathrm{mas}}(G)=\{5, 6, 8, 9\}$ 矛盾. 因此 $P_2=P_3=1$，故 $H=1$. 若 $C_G(K)\neq 1$，则 G 有 5 的倍数阶交换子群，矛盾. 因此 $C_G(K)=1$. 进而 $K\leqslant G\leqslant \mathrm{Aut}(K)$，$\pi(K)=\{2, 3, 5\}$. 于是 K 可能是 A_5, A_6，或者 $U_4(2)$.

若 $K\cong A_5$，则 $|G/K|\,\big|\,2$，则 $|G|=60,120$，矛盾. 若 $K\cong U_4(2)$，则 K 有 12 阶交换子群，矛盾. 若 $K/H\cong A_6$，即 $K\cong A_6$，此时 $|G/K|\,\big|\,4$，则 $G\cong S_6, \mathrm{PSO}_3(9), M_{10}, \mathrm{P\Gamma O}_3(9)$. 因为 $\mathrm{PSO}_3(9)$ 和 $\mathrm{P\Gamma O}_3(9)$ 有 10 阶交换子群，所以 $G\cong S_6, M_{10}$. 若 $G\cong M_{10}$，则 $6\notin\pi_{\mathrm{mas}}(G)$，矛盾. 综上所述，$G\cong S_6$.

定理 3　设 G 是有限群，若 $\pi_{\mathrm{mas}}(G)=\pi_{\mathrm{mas}}(S_7)$，则 $G\cong S_7$.

证　由 Magma 计算知 $\pi_{\mathrm{mas}}(S_7)=\{6, 7, 8, 9, 10, 12\}$，则 $|G|=2^n\cdot 3^m\cdot 5\cdot 7(n\geqslant 3, m\geqslant 2)$. 由极大交换子群的阶可知 G 的素图不连通，且 $t(G)=2$，$\pi_1(G)=\{2, 3, 5\}$，$\pi_2(G)=\{7\}$. 于是有如下可能性：

若 G 为 Frobenius 群，设 $G=HK$. 由引理 2，$\pi(K)=\pi_1(G)=\{2, 3, 5\}$，$\pi(H)=\pi_2(G)=\{7\}$. 因此，$|K|=2^n\cdot 3^m\cdot 5$，$|H|=7$. 由 $|H|\,\big|\,(|K_5|-1)$ 可得矛盾. 因此，G 不是 Frobenius 群.

若 G 为 2-Frobenius 群，设 $G=DEF$. 由引理 2 和引理 3，$\pi(D)\cup\pi(F)=\{2, 3, 5\}$，$\pi(E)=\{7\}$，$|F|\,\big|\,(|E|-1)$. 于是 $|F|\,\big|\,6$，$5\in\pi(D)$. 同理由 $|E|\,\big|\,(|D_5|-1)$ 可得矛盾. 因此，G 不是 2-Frobenius 群.

若 G 有正规列 $1\trianglelefteq H\trianglelefteq K\trianglelefteq G$，使得 H 和 G/K 是 $\{2, 3, 5\}$-群，K/H 是非交换单群，H 是幂零群，其中 $2\in\pi_1$，且 $|G/K|\,\big|\,|\mathrm{Out}(K/H)|$. 易知 $7\in\pi(K/H)$，且 $\pi(K/H)\subseteq\{2, 3, 5, 7\}$.

设 $|H|=2^l\cdot 3^h\cdot 5(l\leqslant n, h\leqslant m)$，由 H 是幂零群，可设 $H=P_2P_3P_5$，其中 $P_2\in \mathrm{Syl}_2(H)$，$P_3\in \mathrm{Syl}_3(H)$，$P_5\in \mathrm{Syl}_5(H)$. 根据 P_i char $H\trianglelefteq G$，得 $P_i\trianglelefteq G(i=2,3,5)$. 若 $P_i\neq 1$，则 $Z(P_i)\neq 1$，且 $Z(P_i)$ char $P_i\trianglelefteq G$，得 $Z(P_i)\trianglelefteq G(i=2,3,5)$. 取 $P_7\in \mathrm{Syl}_7(G)$，则 P_7 在 $Z(P_2), Z(P_3)$ 和 $Z(P_5)$ 上的共轭作用都是平凡的，从而 G 有 7 的倍数阶交换子群，矛盾. 因此，$P_2=P_3=P_5=1$，从而 $H=1$. 再次由 G 无 7 的倍数阶交换子群得 $C_G(K)=1$. 从而 $K\trianglelefteq G\trianglelefteq \mathrm{Aut}(K)$.

因为 $7\in\pi(K/H)$，$\pi(K/H)\subseteq\{2, 3, 5, 7\}$，由引理 4 得 K 同构于下列单群之一：

$$A_7, A_8, A_9, U_3(3), U_4(3), L_3(2), L_2(8), L_3(4), S_6(2)$$

若 K 同构于 $L_3(2), L_2(8)$ 或 $U_3(3)$ 之一，则 $\mathrm{Aut}(K)$ 无 12 阶交换子群，从而 G 也无 12 阶交换子群，矛盾. 因为 A_8 有 15 阶交换子群，所以 $K\ncong A_8$. 另外，由 $L_3(4), A_9, U_4(3), S_6(2)$ 分别有 16,16,81,15 阶交换子群知，K 不能为 $L_3(4), A_9, U_4(3), S_6(2)$. 因此 $K\cong A_7$，$A_7\trianglelefteq G\trianglelefteq S_7$. 由于 A_7 无 12 阶交换子群，所以 $G\cong S_7$.

定理 4　设 G 是有限群，若 $\pi_{\mathrm{mas}}(G)=\pi_{\mathrm{mas}}(S_8)$，则 $G\cong S_8$.

证　由 Magma 计算知 $\pi_{\mathrm{mas}}(S_8)=\{7, 8, 10, 12, 15, 16, 18\}$，则 $|G|=2^n\cdot 3^m\cdot 5\cdot 7(n\geqslant 4, m\geqslant 2)$. 由极大交换子群的阶可知 G 的素图不连通，且 $t(G)=2$，$\pi_1(G)=\{2, 3, 5\}$，$\pi_2(G)=\{7\}$. 于是有如下可

能性:

若G为Frobenius群，设$G=HK$. 由引理2知，$\pi(K)=\pi_1(G)=\{2, 3, 5\}$，$\pi(H)=\pi_2(G)=\{7\}$. 因此，$|K|=2^n \cdot 3^m \cdot 5$，$|H|=7$. 仿照定理3 G为Frobenius群的情形，由$|H| \bigm| (|K_5|-1)$可推得矛盾.

若G为2-Frobenius群，设$G=DEF$. 由引理2，$\pi(D) \cup \pi(F)=\{2, 3, 5\}$，$\pi(E)=\{7\}$. 同定理3 G为2-Frobenius群的情形，$|F| \bigm| 6$，于是$5 \in \pi(D)$. 又因为D_5E是以D_5为核的Frobenius群，所以$|E| \bigm| (|D_5|-1)$，但是$|E|=7$，$|D_5|=5$，矛盾. 因此G不能为2-Frobenius群.

若G有正规列$1 \trianglelefteq H \trianglelefteq K \trianglelefteq G$，使得$H$和$G/K$是$\{2, 3, 5\}$-群，$K/H$是非交换单群，$H$是幂零群，其中$2 \in \pi_1$，且$|G/K| \bigm| |\mathrm{Out}(K/H)|$. 易知，$7 \in \pi(K/H)$. 仿照定理3可证$H=1$，并且$C_G(K) \neq 1$将导致$G$含有7的倍数阶交换子群，因此$C_G(K)=1$，进而$K \trianglelefteq G \trianglelefteq \mathrm{Aut}(K)$.

因为$7 \in \pi(K/H) \subseteq \{2, 3, 5, 7\}$，$K/H$是非交换单群，由引理4可知，$K/H \cong A_7, A_8, A_9, U_3(3), U_4(3), L_3(2), L_2(8), L_3(4), S_6(2)$.

若$K \cong A_7$，则$A_7 \trianglelefteq G \trianglelefteq S_7$，但$S_7$无15阶子群，故$G$无15阶子群，矛盾. 由$A_9$有27阶极大交换子群，则$K \ncong A_9$. 当$K$为$L_3(2), L_2(8), U_3(3)$之一时，$G$无15阶极大交换子群，所以$K \neq L_3(2), L_2(8), U_3(3)$. 因为$U_4(3)$中有81阶交换子群，所以$K \neq U_4(3)$. 又由$S_6(2)$有32阶交换子群知$K \neq S_6(2)$. 若$K=L_3(4)$，由于$G$含有15阶交换子群，而$L_3(4)$却没有，因此$G$必定包含$L_3(4)$被3阶群的扩张$PGL_3(4)$，但由Magma计算知$PGL_3(4)$包含21阶元，矛盾. 综上所述，$K \cong A_8$，从而$A_8 \trianglelefteq G \trianglelefteq S_8$，易得$G \cong S_8$.

参考文献:

[1] SHI W J, BI J X. A New Characterization of the Alternating Groups [J]. Chinese Science Bulletin, 1990, 35(2): 167.
[2] 毕建行. 对称群的一个特征性质 [J]. 数学学报, 1990, 33(1): 70-77.
[3] 岳念，晏燕雄. 对称群$S_n(n \leqslant 14)$的新刻画 [J]. 西南师范大学学报(自然科学版), 2021, 46(6): 1-4.
[4] 雷倩，何立官. 关于Conway单群和Fischer单群的刻画 [J]. 西南大学学报(自然科学版), 2020, 42(10): 96-100.
[5] 钱焱，陈贵云. 同阶交换子群个数之集为1,3的有限群 [J]. 西南大学学报(自然科学版), 2021, 43(10): 100-104.
[6] WANG L H. A New Characterization of Simple K_3-Groups [J]. Northeastern Mathematical Journal, 2001, 17(2): 205-209.
[7] 韩章家，陈贵云，张志让，等. 单群A_{11}的特征性质 [J]. 西南师范大学学报(自然科学版), 2005, 30(4): 638-641.
[8] 韩章家. 有限单群的特征性质 [D]. 重庆: 西南师范大学, 2004.
[9] CHEN G Y. A Characterization of Alternating Groups by the Set of Orders of Maximal Abelian Subgroups [J]. Siberian Mathematical Journal, 2006, 47(3): 594-596.
[10] WILLIAMS J S. Prime Graph Components of Finite Groups [J]. Journal of Algebra, 1981, 69(2): 487-513.
[11] WANG Z B, HE L G, CHEN G Y. An ONC-Characterization of A_{14} and A_{15} [J]. Italian Journal of Pure and Applied Mathematics, 2019, 41: 536-546.
[12] 施武杰. $2^a 3^b 5^c 7^d$阶单群与Janko单群 [J]. 西南师范大学学报(自然科学版), 1987(4): 1-8.

责任编辑　廖坤