DOI:10.13718/j.cnki.xsxb.2022.04.004

非交换拟洗牌Hopf代数的对极①

许达， 喻厚义

西南大学 数学与统计学院，重庆 400715

摘要： 给出了带权非交换拟洗牌Hopf代数对极公式的两种形式，一种是利用数学归纳法给出的显性表达式，另一种是利用由$\frac{-t}{1+t}$诱导的Hoffman-Ihara算子给出的线性算子形式.

关 键 词： 拟洗牌乘积；Hopf代数；对极

中图分类号： O153 **文献标志码：** A **文章编号：** 1000-5471(2022)04-0025-05

Antipodes of Noncommutative Quasi-Shuffle Hopf Algebras

XU Da， YU Houyi

School of Mathematics and Statistics, Southwest University, Chongqing 400715, China

Abstract: Two kinds of formulars for the antipodes of noncommutative quasi-shuffle Hopf algebras with weights have been established. One is an explicit expression obtained by means of mathematical induction, and another one is given in terms of Hoffman-Ihara operators induced by $\frac{-t}{1+t}$.

Key words: quasi-shuffle product; Hopf algebra; antipode

在由一个非空集合生成的自由结合代数上，可以定义不同的代数结构，拟洗牌代数是其中最重要的一个. 拟洗牌乘积最早出现在文献[1]关于罗巴代数的工作中，而由文献[2]在研究多重zeta函数值时正式引入并深入研究，目前在代数、数论和组合数学中均有广泛应用[3-4]. 为了研究多重zeta函数值的一般表达形式，文献[5]给出了两类交换的拟洗牌代数，利用形式幂级数构造了一类性质良好的Hoffman-Ihara算子，并借其建立了洗牌代数和交换拟洗牌代数之间的同构关系. 在此基础上，文献[6]利用形式幂级数构造了多变元的Hoffman-Ihara算子，并发展了相应的operad理论. 为了研究符号置换上的代数组合性质，文献[7]构造了带权重的非交换拟洗牌代数，证明了它具有Hopf代数结构，并建立了它与经典代数对象[8-9]的联

① 收稿日期：2021-05-25
基金项目：国家自然科学基金项目(12071377).
作者简介：许达，硕士研究生，主要从事代数学的研究.
通信作者：喻厚义，副教授.

系，但是并没有给出具体的对极公式. 本文将给出这一 Hopf 代数的两种对极公式，一种是利用数学归纳法给出的显性表达，另一种是利用 Hoffman-Ihara 算子给出的线性算子形式.

1　预备知识

设 A 是一个非空集合，称为字母表，其中的元素叫做字母. 由字母表 A 上的有限个字母形成的一个序列称为词，用 ε 表示空序列，称为空词. 设 $w=a_1a_2\cdots a_n$ 是一个词，称 n 为 w 的长度，记作 $\ell(w)$，空词的长度定义为 0. 词 $a_n\cdots a_2a_1$ 称为 w 的倒置，记作 w^r. 令 A^* 为字母表 A 上所有词的集合，K 是一个特征为 0 的域，$K\langle A\rangle$ 为 K 上由 A 生成的自由结合代数. 则 $K\langle A\rangle$ 的基础集就是以 A^* 为基底的线性空间 KA^*，其中乘法就是词的串联，即

$$(a_1a_2\cdots a_m)(b_1b_2\cdots b_n)=a_1a_2\cdots a_mb_1b_2\cdots b_n$$

下面在 $K\langle A\rangle$ 上定义一种新的乘积.

定义 1　设 A 是一个字母表，K 是一个特征为 0 的域，$\circ$ 是 KA 上一个满足结合律的乘积，$\lambda\in K$. 若 $K\langle A\rangle$ 上的一个二元运算 $*_\lambda$ 满足：

(a) $1_K *_\lambda \varepsilon=\varepsilon *_\lambda 1_K=\varepsilon$;

(b) 对任意 $a,b\in A$ 和任意 $u,v\in A^*$，都有

$$au *_\lambda bv=a(u *_\lambda bv)+b(au *_\lambda v)+\lambda(a\circ b)(u *_\lambda v)$$

则称 $*_\lambda$ 是关于 $\circ$ 的权为 λ 的拟洗牌乘积.

由文献[7]中的定理 2.1 可知 $*_\lambda$ 满足结合律，从而$(K\langle A\rangle, *_\lambda)$是一个结合 K-代数. 我们称$(K\langle A\rangle, *_\lambda)$是权重为$\lambda$ 的拟洗牌代数. 当$\lambda=0$，或$\circ$是零乘积时，$*_\lambda$ 就是$K\langle A\rangle$上通常的洗牌乘积 ш. 当$\circ$交换时，$*_1$ 和 $*_{-1}$ 分别特殊化为文献[5，10]中的拟洗牌乘积 $*$ 和 $\star$.

事实上，$K\langle A\rangle$具有 Hopf 代数结构. Hopf 代数广泛应用于代数、组合等各个领域[11]，其具体概念可参见文献[12]. 令 μ: $K\longrightarrow K\langle A\rangle$，$1_K\longmapsto\varepsilon$. 在 $K\langle A\rangle$ 上按如下方式定义余乘 Δ: $K\langle A\rangle\longrightarrow K\langle A\rangle\otimes K\langle A\rangle$ 和余单位 ε: $K\langle A\rangle\longrightarrow K$，对任意 $w\in A^*$，有

$$\Delta(w)=\sum_{uv=w}u\otimes v\qquad \varepsilon(w)=\begin{cases}1 & w=\varepsilon\\ 0 & \text{否则}\end{cases}\tag{1}$$

定理 1[7]　设 A 是一个字母表，K 是一个特征为 0 的域. 则对任意 $\lambda\in K$，$(K\langle A\rangle, *_\lambda, \mu, \Delta, \varepsilon)$ 是一个 Hopf 代数. 当 $\lambda\neq 0$ 时，乘积 $*_\lambda$ 是可交换的当且仅当乘积 $\circ$ 是可交换的.

下面将交换拟洗牌代数上的 Hoffman-Ihara 算子[5] 推广到带权的非交换拟洗牌代数上. 令 n 是一个正整数，$I=(i_1, i_2, \cdots, i_k)$ 是一个由有限个正整数组成的序列. 若 $i_1+i_2+\cdots+i_k=n$，则称 I 为 n 的一个合成，$\ell(I)=k$ 为 I 的长度. n 的所有合成构成的集合记作 $\mathscr{C}(n)$. 设 $w=a_1a_2\cdots a_n$ 是一个词，$I=(i_1, i_2, \cdots, i_k)$ 是 n 的一个合成，记

$$I[w]=(a_1\circ\cdots\circ a_{i_1})(a_{i_1+1}\circ\cdots\circ a_{i_1+i_2})\cdots(a_{i_1+\cdots+i_{k-1}+1}\circ\cdots\circ a_n)$$

定义 2　设 K 是一个特征为 0 的域，λ 是 K 中的非零元，令

$$f=\sum_{i=1}^{\infty}c_it^i=c_1t+c_2t^2+c_3t^3+\cdots\in tK[[t]]$$

是 $K[[t]]$ 上的一个形式幂级数，$\Psi_{f,\lambda}$: $K\langle A\rangle\longrightarrow K\langle A\rangle$ 是一个 K-线性映射. 若 $\Psi_{f,\lambda}(\varepsilon)=\varepsilon$，且对非空词$w$，有

$$\Psi_{f,\lambda}(w)=\sum_{I=(i_1, i_2, \cdots, i_k)\in\mathscr{C}(\ell(w))}\lambda^{\ell(w)-k}c_{i_1}c_{i_2}\cdots c_{i_k}I[w]$$

则称 $\Psi_{f,\lambda}$ 是 $K\langle A\rangle$ 上权重为 λ 的 Hoffman-Ihara 算子.

权等于 1 的 Hoffman-Ihara 算子在数论中有非常重要的应用[5].

2　对极公式

我们首先给出非交换拟洗牌 Hopf 代数对极的显性表达式，然后在此基础上，利用由形式幂级数 $\frac{-t}{1+t}$ 诱导的 Hoffman-Ihara 算子给出其另一种表达形式.

定理 2　设 A 是一个字母表，K 是一个特征为 0 的域，$\lambda\in K$，S 是 Hopf 代数$(K\langle A\rangle,\ *_\lambda,\mu,\Delta,\varepsilon)$的对极. 则对任意词 $w=a_1a_2\cdots a_n$，有

$$S(w)=(-1)^{\ell(w)}\sum_{I\in\mathscr{C}(\ell(w))}\lambda^{\ell(w)-\ell(I)}(a_{n-i_l+1}\circ\cdots\circ a_n)\cdots(a_1\circ\cdots\circ a_{i_1})\tag{2}$$

证　因为任何 Hopf 代数$(H,m_H,\mu_H,\Delta_H,\varepsilon_H)$的对极 S_H，都满足条件

$$m_H(I_H\otimes S_H)\Delta_H=\varepsilon_H 1_H$$

所以由(1)式可得，对任意词 $w=a_1a_2\cdots a_n$，都有

$$S(w)=-\sum_{k=0}^{n-1}S(a_1\cdots a_k)*_\lambda a_{k+1}\cdots a_n\tag{3}$$

下面对 w 的长度 n 进行归纳，证明等式(2)成立. 若 $n=1$，则由(3)式知 $S(w)=-a_1$，故(2)式成立. 假设对小于 n 的情形，结论成立. 对于 $n>1$，根据等式(3)和归纳假设可知

$$S(w)=-\sum_{k=0}^{n-1}\Big((-1)^k\sum_{(i_1,\cdots,i_l)\models k}\lambda^{k-l}(a_{k-i_l+1}\circ\cdots\circ a_k)\cdots(a_1\circ\cdots\circ a_{i_1})\Big)*_\lambda a_{k+1}\cdots a_n=$$

$$\sum_{k=0}^{n-1}\sum_{(i_1,\cdots,i_l)\models k}(-1)^{k+1}\lambda^{k-l}((a_{k-i_l+1}\circ\cdots\circ a_k)\cdots(a_1\circ\cdots\circ a_{i_1}))\ *_\lambda a_{k+1}\cdots a_n$$

根据定义 1，$S(w)$是一些词的线性组合，其中每一个加法因子的第一个字母都是以下 3 种情形之一：

$$a_{k-i_l+1}\circ\cdots\circ a_k\qquad a_{k-i_l+1}\circ\cdots\circ a_k\circ a_{k+1}\qquad a_{k+1}$$

为了简单起见，称第一种情形中的项是 k-型的，后两种情形中的项是 $k+1$-型的. 因为根据拟洗牌乘积的定义，对任意 $a,b\in A$ 和任意 $u,v\in A^*$，都有表达式

$$au*_\lambda bv=a(u*_\lambda bv)+b(au*_\lambda v)+\lambda(a\circ b)(u*_\lambda v)$$

所以对于出现在 $S(w)$的展开式中的每一个词，若它是 j-型的，且 $j\leqslant n-1$，那么它将同时出现在 $k=j$ 和 $k=j-1$ 中. 但是这两个词的系数之和恰好为 0，会相互抵消. 因此唯一不会抵消的一类词是 n-型的词，它们只出现在第 $n-1$ 项中，而且没有被抵消的词均形如

$$(a_{n-i_l+1}\circ\cdots\circ a_n)\cdots(a_1\circ\cdots\circ a_{i_1})$$

并带有系数

$$(-1)^n\lambda^{n-\ell(I)}=(-1)^{\ell(w)}\lambda^{\ell(w)-\ell(I)}$$

其中 $I=(i_1,\cdots,i_l)$是 $\ell(w)$的一个合成. 这就证明了等式(2)成立.

例如，关于 Hopf 代数 $K\langle A\rangle$ 的对极 S，有 $S(a_1)=-a_1$，$S(a_1a_2)=a_2a_1+\lambda a_1\circ a_2$和

$$S(a_1a_2a_3)=-a_3\ a_2a_1-\lambda(a_2\circ a_3)a_1-\lambda a_3(a_1\circ a_2)-\lambda^2(a_1\circ a_2\circ a_3)$$

引理 1　设 K 是一个特征为 0 的域，$\lambda\in K\backslash\{0\}$. 则对任意词 w，都有

$$\Psi_{\frac{-t}{1+t},\lambda}(w)=(-1)^{\ell(w)}\sum_{I\in\mathscr{C}(\ell(w))}\lambda^{\ell(w)-\ell(I)}I[w]$$

证　由于

$$\frac{-t}{1+t}=\sum_{i=1}^{\infty}(-1)^{i}t^{i}=-t+t^{2}-t^{3}+\cdots$$

所以根据定义 2，对任意词 w，都有

$$\Psi_{f,\lambda}(w)=\sum_{I=(i_1,i_2,\cdots,i_k)\in\mathscr{C}(\ell(w))}\lambda^{\ell(w)-k}(-1)^{i_1+i_2+\cdots+i_k}I[w]=$$

$$(-1)^{\ell(w)}\sum_{I\in\mathscr{C}(\ell(w))}\lambda^{\ell(w)-\ell(I)}I[w]$$

令 $R:K\langle A\rangle\longrightarrow K\langle A\rangle$ 是由 $R(w)=w^{r}$ 诱导的一个线性映射，其中 w 是 A 上的词. 下面我们利用 R 和 $\Psi_{\frac{-t}{1+t},\lambda}$ 给出对极 S 的另一种表达形式.

定理 3 设 A 是一个字母表，K 是一个域，λ 是 K 中的非零元，S 是 Hopf 代数 $(K\langle A\rangle,\ *_{\lambda},\mu,\Delta,\varepsilon)$ 的对极. 则 $S=R\Psi_{\frac{-t}{1+t},\lambda}$.

证 对于 A 上的任意词 $w=a_1a_2\cdots a_n$，以及 n 的一个合成 $I=(i_1,i_2,\cdots,i_k)$，有

$$(a_{n-i_k+1}\circ\cdots\circ a_n)\cdots(a_1\circ\cdots\circ a_{i_1})=R(I[w])$$

所以，由定理 2 知

$$S(w)=(-1)^{\ell(w)}\sum_{I\in\mathscr{C}(\ell(w))}\lambda^{\ell(w)-\ell(I)}R(I[w])$$

因为 R 是线性映射，故由引理 1 得

$$S(w)=R\Big((-1)^{\ell(w)}\sum_{I\models\ell(w)}\lambda^{\ell(w)-\ell(I)}I[w]\Big)=R\Psi_{\frac{-t}{1+t},\lambda}(w)$$

这就证明了 $S=R\Psi_{\frac{-t}{1+t},\lambda}$.

注 1 对于非交换的拟洗牌代数，R 与 $\Psi_{f,\lambda}$ 关于映射合成一般是不可交换的. 例如，令 $A=\{a_1,a_2,a_3\}$，并且令乘积 $\circ$ 由 $x\circ y=x$（对任意 $x,y\in A$）所定义. 则

$$R\Psi_{\frac{-t}{1+t},\lambda}(a_1a_2a_3)=-R(a_1a_2a_3+\lambda a_1a_2\circ a_3+\lambda a_1\circ a_2a_3+\lambda^{2}a_1\circ a_2\circ a_3)=$$

$$-a_3a_2a_1-\lambda a_2a_1-\lambda a_3a_1-\lambda^{2}a_1$$

而

$$\Psi_{\frac{-t}{1+t},\lambda}R(a_1a_2a_3)=-a_3a_2a_1-\lambda a_3\ a_1-\lambda a_3a_2-\lambda^{2}a_3$$

因此，当 $\lambda\neq 0$ 时，$R\Psi_{\frac{-t}{1+t},\lambda}\neq\Psi_{\frac{-t}{1+t},\lambda}R$.

然而，当拟洗牌乘积 $*_{\lambda}$ 可交换时，文献[5]的命题 4.3 证明了对所有 $f\in tK[[t]]$，R 与 $\Psi_{f,\lambda}$ 都是可交换的. 这就是说，交换的拟洗牌 Hopf 代数的对极也可以表示为 $S=\Psi_{\frac{-t}{1+t},\lambda}R$. 因此，文献[5]中的定理 4.2 是本文定理 2 的特殊情形.

定义 1 中的条件(b)对非交换拟洗牌乘积的定义是从前向后归纳给出的. 事实上，容易证明也可以从后向前归纳定义，即对所有字母 $c,d\in A$ 和词 $u,v\in A^{*}$，都有

$$uc*_{\lambda}vd=(u*_{\lambda}vd)c+(uc*_{\lambda}v)d+\lambda(u*_{\lambda}v)(c\circ d)\tag{4}$$

命题 1 对所有 $\lambda\in K$，映射 R 是 $(K\langle A\rangle,\ *_{\lambda})$ 的一个代数自同构.

证 因为 R 是双射，故只需证明对任意词 u_1,u_2，$R(u_1*_{\lambda}u_2)=R(u_1)*_{\lambda}R(u_2)$. 若 u_1,u_2 中有一个是空词 ε，则结论显然成立. 若 u_1,u_2 均不是空词 ε，则可设 $u_1=aw$，$u_2=bv$，其中 $a,b\in A$，$w,v\in A^{*}$.

一方面，根据(4)式可得

$$R(u_1)*_{\lambda}R(u_2)=w^{r}a*_{\lambda}v^{r}b=(w^{r}*_{\lambda}v^{r}b)a+(w^{r}a*_{\lambda}v^{r})b+\lambda\ (w^{r}*_{\lambda}v^{r})a\circ b$$

另一方面，对 u_1,u_2 的长度之和 $\ell(u_1)+\ell(u_2)$ 进行数学归纳，并由 R 是线性映射可知

$$R(u_1*_{\lambda}u_2)=R(a(w*_{\lambda}bv))+R(b(aw*_{\lambda}v))+R(\lambda\ a\circ b(w*_{\lambda}v))=$$

$$(R(w *_\lambda bv))a + (R(aw *_\lambda v))b + \lambda(R(w *_\lambda v))a \circ b =$$
$$(R(w) *_\lambda R(bv))a + (R(aw) *_\lambda R(v))b + \lambda(R(w) *_\lambda R(v))a \circ b =$$
$$(w^r *_\lambda v^r b)a + (w^r a *_\lambda v^r)b + \lambda(w^r *_\lambda v^r)a \circ b$$

所以 $R(u_1 *_\lambda u_2) = R(u_1) *_\lambda R(u_2)$，这就证明了 R 是一个同构映射.

推论 1　线性映射 $\Psi_{\frac{-t}{1+t},\lambda}$：$(K\langle A\rangle,\ *_\lambda) \longrightarrow (K\langle A\rangle,\ *_\lambda)$ 是一个代数反同构.

证　因为 Hopf 代数的对极是一个代数反同构，所以由定理 3 知，$R\Psi_{\frac{-t}{1+t},\lambda}$ 是一个代数反同构. 而根据命题 1，R 是一个同构映射，所以 $\Psi_{\frac{-t}{1+t},\lambda}$ 是一个代数反同构.

参考文献：

[1] CARTIER P. On the Structure of Free Baxter Algebras [J]. Advances in Mathematics，1972，9(2)：253-265.

[2] HOFFMAN M E. Quasi-Shuffle Products [J]. Journal of Algebraic Combinatorics，2000，11(1)：49-68.

[3] HOFFMAN M E. The Algebra of Multiple Harmonic Series [J]. Journal of Algebra，1997，194(2)：477-495.

[4] 雷鹏. 洗牌积在代数和数论中的应用 [D]. 兰州：兰州大学，2014.

[5] HOFFMAN M E，IHARA K. Quasi-Shuffle Products Revisited [J]. Journal of Algebra，2017，481：293-326.

[6] YAMAMOTO S. Multivariable Hoffman-Ihara Operators and the Operad of Formal Power Series [J]. Journal of Algebra，2020，556：634-648.

[7] GUO L，THIBON J-Y，YU H Y. The Hopf Algebras of Signed Permutations，of Weak Quasi-Symmetric Functions and of Malvenuto-Reutenauer [J]. Advances in Mathematics，2020，374：107341.

[8] 李梦琪，李雪珊. 排列的右弱 Bruhat 序与拟对称生成函数 [J]. 西南师范大学学报(自然科学版)，2021，46(6)：14-19.

[9] 罗天红，罗永乐，王正攀. 一类图逆半群的同余格的性质 [J]. 西南大学学报(自然科学版)，2021，43(4)：73-78.

[10] IHARA K，KAJIKAWA J，OHNO Y，et al. Multiple Zeta Values Vs Multiple Zeta-Star Values [J]. Journal of Algebra，2011，332(1)：187-208.

[11] 晏潘，王守峰. 广义限制的 P-限制半群 [J]. 西南大学学报(自然科学版)，2021，43(8)：70-76.

[12] SWEEDLER M. Hopf Algebras [M]. New York：W. A. Benjamin，1969.

责任编辑　廖坤