第 47 卷 第 4 期　　西南师范大学学报(自然科学版)　　2022 年 4 月
Vol. 47 No. 4　　Journal of Southwest China Normal University (Natural Science Edition)　　Apr. 2022

DOI:10.13718/j.cnki.xsxb.2022.04.006

一类具有线性和非线性耦合项的 Kirchhoff 型方程组的基态解[①]

李振辉，　许丽萍

河南科技大学 数学与统计学院，洛阳 471023

摘要：讨论了一类具有线性和非线性耦合项的 Kirchhoff 型方程组基态解的存在性. 首先利用 Nehari 流形讨论了常数位势时该方程组基态解的存在性；其次当位势函数满足给定条件时，获得了该方程组基态解特别是变号基态解的存在性.

关 键 词：Kirchhoff 型方程组；Nehari 流形；变号基态解

中图分类号：**O175.29**　　**文献标志码**：**A**　　**文章编号**：1000－5471(2022)04－0037－08

Ground State Solutions of a Class of Kirchhoff Type Systems with Linear and Nonlinear Couplings Terms

LI Zhenhui，　XU liping

School of Mathematics and Statistics, Henan University of Science and Technology, Luoyang 471023, China

Abstract: In this paper, the existence of ground state solutions has been studied for a class of Kirchhoff type equations with linear and nonlinear coupling terms. Firstly, the existence of the ground state solution of the system of equations with constant potential is discussed by using the Nehari manifold. Secondly, when the potential function satisfies the given conditions, the existence of the system of equations, especially the sign-changing solutions, is obtained.

Key words: Kirchhoff type system; Nehari manifold; sign-changing ground state solution

本文研究如下一类 Kirchhoff 型方程组：

$$\begin{cases} -\left(a_1+b_1\int_{\Omega}|\nabla u|^2\mathrm{d}x\right)\Delta u+(\lambda_1+V(x))u+kv=\mu_1u^3+\beta uv^2 & x\in\Omega \\ -\left(a_2+b_2\int_{\Omega}|\nabla v|^2\mathrm{d}x\right)\Delta v+(\lambda_2+V(x))v+ku=\mu_2v^3+\beta vu^2 & x\in\Omega \\ u=v=0 & x\in\partial\Omega\text{(或 }u,v\in H^1(\mathbb{R}^N),\ \Omega=\mathbb{R}^N) \end{cases} \tag{1}$$

其中 Ω 是 $\mathbb{R}^N$ 中的光滑区域，$N\leqslant 3$，$V(x)$ 是位势函数，$a_i,b_i,\lambda_i,\mu_i(i=1,2)$ 是正数，k,β 是耦合项系数.

---

① 收稿日期：2021－06－15
基金项目：国家自然科学基金项目(11671403，11671236).

作者简介：李振辉，硕士研究生，主要从事非线性分析的研究.
通信作者：许丽萍，教授.

为了研究方程组(1)解的存在性,假定位势函数 $V(x)$ 连续且满足如下条件:

(V_1) $\sup\limits_{x\in\mathbb{R}^N} V(x)=\lim\limits_{|x|\to\infty} V(x)=\Lambda>0$;

(V_2) $\inf\limits_{x\in\mathbb{R}^N} V(x)\geqslant 0$.

方程组(1)中 u 和 v 表示位移,b_i 是初始张力,而 a_i 与弹性弦的固有性质有关[1]. 如果 $V\equiv 0$,那么方程组(1)变为

$$\begin{cases}-\left(a_1+b_1\int_\Omega |\nabla u|^2\mathrm{d}x\right)\Delta u+\lambda_1 u+kv=\mu_1 u^3+\beta uv^2 & x\in\Omega\\ -\left(a_2+b_2\int_\Omega |\nabla v|^2\mathrm{d}x\right)\Delta v+\lambda_2 v+ku=\mu_2 v^3+\beta vu^2 & x\in\Omega\\ u=v=0 \qquad x\in\partial\Omega(\text{或 } u,v\in H^1(\mathbb{R}^N),\ \Omega=\mathbb{R}^N)\end{cases}\tag{2}$$

如果 $v\equiv 0$,$k=0$,$\beta=0$,那么方程组(2)可以化简为如下 Kirchhoff 型方程:

$$\begin{cases}-\left(a_1+b_1\int_\Omega |\nabla u|^2\mathrm{d}x\right)\Delta u+\lambda_1 u=\mu_1 u^3\\ u>0 \qquad u\in H_0^1(\Omega)\text{ 或 } u\in H^1(\mathbb{R}^N)\end{cases}\tag{3}$$

方程(3)是文献[2]首次提出的,用来描述弹性弦的自由振荡问题. 随后,文献[3]用变分法研究了 Kirchhoff 型方程,很多学者也对此产生兴趣,获得了一些重要成果[4-7]. 对于不含非局部项的相关结果可参见文献[8-10].

由于存在非局部项 $\int_\Omega |\nabla u|^2\mathrm{d}x$ 和 $\int_\Omega |\nabla v|^2\mathrm{d}x$ 等,方程组(1)-(2)以及方程(3)都被称为非局部问题. 如果没有非局部项,方程组(2)可以转化为非线性 Schrödinger 方程组

$$\begin{cases}-\Delta u+\lambda_1 u+kv=\mu_1 u^3+\beta uv^2 & x\in\Omega\\ -\Delta v+\lambda_2 v+ku=\mu_2 v^3+\beta vu^2 & x\in\Omega\\ u=v=0 \qquad x\in\partial\Omega(\text{或 } u,v\in H^1(\mathbb{R}^N),\ \Omega=\mathbb{R}^N)\end{cases}\tag{4}$$

文献[11]用 Nehari 流形证明了方程组(4)基态解的存在性. $k=0$ 时的一些成果见文献[12-16].

近年来,一些学者开始关注 Kirchhoff 型方程组解的存在性问题[17-20]. 文献[17]研究了小正参数对具有耦合项的 Kirchhoff 型方程组解的存在性和多解性的影响;文献[18]研究了一类临界的和次临界的情形下 Kirchhoff 型方程组解的存在性和多解性;文献[19]讨论了具有耦合项的非线性 Kirchhoff 型方程组正向量解的存在性和渐近性;文献[20]采用新的方法更加方便地证明了自治 Kirchhoff 型方程或方程组解的存在性. 与上述文献不同,本文研究了一类具有线性和非线性耦合项的 Kirchhoff 型方程组(1)和(2)解的存在性问题,而且证明了变号解的存在性. 在本文的研究中需要克服两个困难,其一是对两个非局项的处理,其二是证明 PS 序列的收敛性. 首先研究方程组(2). 用 Nehari 流形得到了 PS 序列. 如果 Ω 有界,用 Sobolev 嵌入定理证明了基态解的存在性;如果 $\Omega=\mathbb{R}^N$,运用 Lions 紧性引理证明了基态解的存在性. 应注意到,尽管受到文献[11]的启发,但是由于非局部项 $\int_\Omega |\nabla u|^2\mathrm{d}x$ 和 $\int_\Omega |\nabla v|^2\mathrm{d}x$ 的存在,文献[11]的方法不能直接应用于我们的问题,需要更加细致的工作. 之后,研究方程组(1),我们得到了方程组(1)解的存在性.

定理1 设 Ω 是 $\mathbb{R}^N$ 中的光滑有界区域或者 $\Omega=\mathbb{R}^N$,$\beta\in\mathbb{R}$,$k\in(-\sqrt{\lambda_1\lambda_2},0)\cup(0,\sqrt{\lambda_1\lambda_2})$,那么方程组(2)存在一个基态解 (u,v). 另外,若 $k\in(-\sqrt{\lambda_1\lambda_2},0)$,那么 $u>0$,$v>0$;若 $k\in(0,\sqrt{\lambda_1\lambda_2})$,那么 $u>0$,$v<0$,或者 $u<0$,$v>0$.

定理2 设 $\Omega=\mathbb{R}^N$,$\beta\in(-\sqrt{\mu_1\mu_2},+\infty)$,$k\in(-\sqrt{\lambda_1\lambda_2},0)\cup(0,\sqrt{\lambda_1\lambda_2})$. 若条件($V_1$)-($V_2$)成立,那么方程组(1)存在一个基态解 (u,v). 另外,若 $k\in(-\sqrt{\lambda_1\lambda_2},0)$,那么 $u>0$,$v>0$;若 $k\in(0,\sqrt{\lambda_1\lambda_2})$,那么 $u>0$,$v<0$,或者 $u<0$,$v>0$.

1 预备知识

若 $N>2$,记 $2^*=\dfrac{2N}{N-2}$;若 $N=1,2$,记 $2^*=\infty$. 定义 $C_1,C_2,C_3,C_4>0$. 若 $\Omega\subseteq\mathbb{R}^N$ 是光滑区域,

在 $H^1(\Omega)\times H^1(\Omega)$ 上定义内积

$$((u_1,v_1),(u_2,v_2))=\int_\Omega a_1\nabla u_1\nabla u_2\mathrm{d}x+\int_\Omega\lambda_1u_1u_2\mathrm{d}x+k\int_\Omega u_1v_1\mathrm{d}x+\int_\Omega a_2\nabla v_1\nabla v_2\mathrm{d}x+\int_\Omega\lambda_2v_1v_2\mathrm{d}x+k\int_\Omega u_2v_2\mathrm{d}x \tag{5}$$

和范数

$$\|(u,v)\|=((u,v),(u,v))^{\frac{1}{2}} \tag{6}$$

2　定理 1 的证明

假定 $a_i,b_i,\lambda_i,\mu_i>0$，$i=1,2$，$\beta\in\mathbb{R}$，$k\in(-\sqrt{\lambda_1\lambda_2},0)\cup(0,\sqrt{\lambda_1\lambda_2})$. 若 Ω 是 $\mathbb{R}^N$ 中的光滑有界区域，设

$$\mathscr{H}=H_0^1(\Omega)\times H_0^1(\Omega)\subseteq H^1(\Omega)\times H^1(\Omega)$$

若 $\Omega=\mathbb{R}^N$，设

$$\mathscr{H}=H^1(\mathbb{R}^N)\times H^1(\mathbb{R}^N)$$

定义 $\mathscr{H}$ 上的内积如(5) 式，范数如(6) 式. 对 $\forall(u,v)\in\mathscr{H}$，设方程组(2) 的能量泛函为

$$I(u,v)=\frac{1}{2}\|(u,v)\|^2+\frac{1}{4}(b_1L^2(u)+b_2L^2(v))-\frac{\mu_1}{4}\int_\Omega u^4\mathrm{d}x-\frac{\mu_2}{4}\int_\Omega v^4\mathrm{d}x-\frac{\beta}{2}\int_\Omega u^2v^2\mathrm{d}x$$

其中 $L(s)=\int_\Omega|\nabla s|^2\mathrm{d}x$. 设

$$\mathscr{J}(u,v)=\langle I'(u,v),(u,v)\rangle=\|(u,v)\|^2+(b_1L^2(u)+b_2L^2(v))-\mu_1\int_\Omega u^4\mathrm{d}x-\mu_2\int_\Omega v^4\mathrm{d}x-2\beta\int_\Omega u^2v^2\mathrm{d}x$$

令

$$\mathscr{N}=\{(u,v)\in\mathscr{H}\setminus\{(0,0)\}:\mathscr{J}(u,v)=0\}$$

易知，方程组(2) 的非平凡解 $(u,v)\in\mathscr{N}$. 下面先证明方程组(2) 存在一个半平凡解，从而可得 $\mathscr{N}\neq\varnothing$.

引理 1[18]　设方程(3) 的泛函为 $I_{\lambda_1}(u)$. 设 $\mathscr{N}_{\lambda_1}=\{u\in H_0^1(\Omega)\setminus\{0\}:\langle I'_{\lambda_1}(u),u\rangle=0\}$. 通过讨论极小化问题 $\inf\limits_{u\in\mathscr{N}_{\lambda_1}}I_{\lambda_1}(u)$，证得方程(3) 存在一个正解.

如果 $\Omega=\mathbb{R}^N$，$a_1=1$，$b_1=0$，则方程(3) 可以简化为

$$-\Delta u+\lambda_1u=\mu_1u^3\qquad u>0,\ u\in H^1(\mathbb{R}^N) \tag{7}$$

引理 2[20]　如果方程(7) 有唯一解 $Q(x)$，且代数方程 $M(c^{N-2}\|Q\|^2)=c^2$ 有唯一正根 $c^*_{\|Q\|^2}$，其中 $M:\mathbb{R}_+\longrightarrow\mathbb{R}_+$ 是一个映射，那么 $u(x)\in\left\{Q\left(\frac{x}{c^*_{\|Q\|^2}}+t\right):t\in\mathbb{R}^N\right\}$ 是方程(3) 的唯一解.

注 1　若 $|\Omega|<\infty$，由引理 1 知方程组(2) 存在一个半平凡解；若 $\Omega=\mathbb{R}^N$，由引理 2 知方程组(2) 存在一个半平凡解. 无论哪种情形，方程组(2) 都存在一个半平凡解，于是得到 $\mathscr{N}\neq\varnothing$.

引理 3　$\mathscr{N}$ 是 $\mathscr{H}$ 的一个光滑子流形.

证　对 $\forall(u,v)\in\mathscr{N}$,

$$\langle\mathscr{J}'(u,v),(u,v)\rangle=2\|(u,v)\|^2+4(b_1L^2(u)+b_2L^2(v))-4\mu_1\int_\Omega u^4\mathrm{d}x-4\mu_2\int_\Omega v^4\mathrm{d}x-8\beta\int_\Omega u^2v^2\mathrm{d}x=-2\|(u,v)\|^2<0 \tag{8}$$

易见，引理 3 成立.

引理 4　对 $\forall(u,v)\in\mathscr{N}$，$I|_{\mathscr{N}}(u,v)=\frac{1}{4}\|(u,v)\|^2$. 并且存在正数 $C_1>0$，使得对 $\forall(u,v)\in\mathscr{N}$，$\|(u,v)\|\geqslant C_1>0$.

证　若 $(u,v)\in\mathscr{N}$，那么

$$\mathscr{J}(u,v)=0 \tag{9}$$

即

$$\|(u, v)\|^2+(b_1L^2(u)+b_2L^2(v))=\mu_1\int_\Omega u^4\mathrm{d}x+\mu_2\int_\Omega v^4\mathrm{d}x+2\beta\int_\Omega u^2v^2\mathrm{d}x$$

因此,对 $\forall(u, v)\in\mathcal{N}$,

$$I(u, v)=\frac{1}{2}\|(u, v)\|^2+\frac{1}{4}(b_1L^2(u)+b_2L^2(v))-\frac{1}{4}\|(u, v)\|^2-\frac{1}{4}(b_1L^2(u)+b_2L^2(v))=\frac{1}{4}\|(u, v)\|^2$$

由 Sobolev 嵌入定理得

$$\begin{aligned}\|(u, v)\|^2&\leqslant\|(u, v)\|^2+(b_1L^2(u)+b_2L^2(v))=\\&\mu_1\int_\Omega u^4\mathrm{d}x+\mu_2\int_\Omega v^4\mathrm{d}x+2\beta\int_\Omega u^2v^2\mathrm{d}x\leqslant\\&C_2\|(u, v)\|^4_{L^4(\Omega)\times L^4(\Omega)}\leqslant C_3\|(u, v)\|^4\end{aligned}$$

既然 $\|(u, v)\|\neq 0$,那么存在$C_1>0$,使得对 $\forall(u, v)\in\mathcal{N}$, $\|(u, v)\|\geqslant C_1>0$.

引理 5 若(u, v)是 $I|_{\mathcal{N}}$ 的临界点,那么(u, v)也是 I 的临界点.

证 若(u, v)是 $I|_{\mathcal{N}}$ 的临界点,那么 $I'(u, v)=\eta\mathcal{J}'(u, v)$,其中 $\eta\in\mathbb{R}$ 是一个 Lagrange 乘子. 于是

$$\langle I'(u, v), (u, v)\rangle=\eta\langle\mathcal{J}'(u, v), (u, v)\rangle$$

由(8)式和(9)式得 $\eta=0$. 引理 5 成立.

引理 6 若$\{(u_n, v_n)\}\subseteq\mathcal{H}$是 $I|_{\mathcal{N}}$ 的 PS 序列,那么$\{(u_n, v_n)\}$是 I 的 PS 序列. 而且,若 Ω 有界,那么存在$(u, v)\in\mathcal{N}$,使得$\{(u_n, v_n)\}$在$\mathcal{H}$上有一个收敛于(u, v)的子列.

证 不妨假定$\{I(u_n, v_n)\}$有界,则 $I|'_{\mathcal{N}}(u_n, v_n)\to 0$. 再由引理 4 得,$\{(u_n, v_n)\}$在$\mathcal{H}$上有界. 从而,存在$(u, v)\in\mathcal{H}$,使得$(u_n, v_n)\rightharpoonup(u, v)$. 若 Ω 有界,则在 $L^4(\Omega)\times L^4(\Omega)$ 上$(u_n, v_n)\to(u, v)$. 于是存在序列$\{\eta_n\}\subseteq\mathbb{R}$,使得

$$I|'_{\mathcal{N}}(u_n, v_n)=I'(u_n, v_n)-\eta_n\mathcal{J}'(u_n, v_n)$$

那么

$$o(1)=\langle I'(u_n, v_n), (u_n, v_n)\rangle-\eta_n\langle\mathcal{J}'(u_n, v_n), (u_n, v_n)\rangle=-\eta_n\langle\mathcal{J}'(u_n, v_n), (u_n, v_n)\rangle$$

由(8)式和引理 4 得$\langle\mathcal{J}'(u_n, v_n), (u_n, v_n)\rangle\leqslant-C_4$. 因此 $\eta_n=o(1)$. 既然$\{(u_n, v_n)\}$有界,那么$\{\mathcal{J}'(u_n, v_n)\}$有界. 因此,当 $n\to\infty$ 时,

$$I'(u_n, v_n)=\eta_n\mathcal{J}'(u_n, v_n)+o(1)=o(1)$$

因为 $I'(u_n, v_n)\to 0$ 和$(u_n, v_n)\rightharpoonup(u, v)$,那么 $I'(u, v)=0$ 和 $\mathcal{J}(u, v)=0$. 若 Ω 有界,那么

$$\begin{aligned}\|(u_n, v_n)\|^2=&-b_1L^2(u_n)-b_2L^2(v_n)+\mu_1\int_\Omega u_n^4\mathrm{d}x+\mu_2\int_\Omega {v_n}^4\mathrm{d}x+2\beta\int_\Omega u_n^2v_n^2\mathrm{d}x\to\\&-b_1L^2(u)-b_2L^2(v)+\mu_1\int_\Omega u^4\mathrm{d}x+\mu_2\int_\Omega v^4\mathrm{d}x+2\beta\int_\Omega u^2v^2\mathrm{d}x=\|(u, v)\|^2\end{aligned}$$

因此$(u_n, v_n)\to(u, v)\in\mathcal{H}$. 由引理 4 得 $\|(u, v)\|^2\geqslant C_1^2$,即$(u, v)\neq(0, 0)$. 那么$(u, v)\in\mathcal{N}$.

设

$$c=\inf_{(u, v)\in\mathcal{N}}I(u, v)\tag{10}$$

$$c_1=\inf_{(u', 0)\in\mathcal{N}}I(u', 0)\tag{11}$$

$$c_2=\inf_{(0, v')\in\mathcal{N}}I(0, v')\tag{12}$$

若 Ω 有界,由 Sobolev 紧嵌入定理,c_1 和 c_2 是存在的. 或者若 $\Omega=\mathbb{R}^N$,由集中紧性原理可得 c_1 和 c_2 是存在的. 由引理 4 得

$$c\geqslant\frac{C_1^2}{4}>0\tag{13}$$

定理 1 的证明 由 $c>0$ 和文献[11]的引理 2.2,存在某个序列$\{(u_n, v_n)\}\subseteq\mathcal{N}$,使得$\{(u_n, v_n)\}$是 $I|_{\mathcal{N}}$ 的$(\mathrm{PS})_c$ 序列. 因此,由引理 6 得$\{(u_n, v_n)\}$是 I 的$(\mathrm{PS})_c$ 序列. 根据对 Ω 的假定,拟分两种情形讨论

方程组(2)解的存在性.

情形 1　假设 Ω 有界. 由引理 6，考虑其子列，存在 $(u,v)\in\mathcal{N}$，在 $\mathcal{H}$ 上，$(u_n,v_n)\to(u,v)$. 因此，$I'(u,v)=0$ 和 $I(u,v)=c$.

情形 2　假定 $\Omega=\mathbb{R}^N$. 若 $\lim\limits_{n\to\infty}\inf\sup\limits_{x\in\mathbb{R}^N}\int_{B_1(x)}u_n^2(y)\mathrm{d}y=0$ 和 $\lim\limits_{n\to\infty}\inf\sup\limits_{x\in\mathbb{R}^N}\int_{B_1(x)}v_n^2(y)\mathrm{d}y=0$，那么，由文献[21]中的引理 1.21 得，在 $L^4(\mathbb{R}^N)\times L^4(\mathbb{R}^N)$ 上 $(u_n,v_n)\to(0,0)$. 因此，当 $n\to\infty$ 时，

$$\|(u_n,v_n)\|^2+(b_1L^2(u_n)+b_2L^2(v_n))=\mu_1\int_{\mathbb{R}^N}u_n^4\mathrm{d}x+\mu_2\int_{\mathbb{R}^N}v_n^4\mathrm{d}x+2\beta\int_{\mathbb{R}^N}u_n^2v_n^2\mathrm{d}x\to 0$$

设 $A=\lim\limits_{n\to\infty}\int_{\mathbb{R}^N}|\nabla u_n|^2\mathrm{d}x$ 和 $B=\lim\limits_{n\to\infty}\int_{\mathbb{R}^N}|\nabla v_n|^2\mathrm{d}x$，那么，当 $n\to\infty$ 时，

$$\|(u_n,v_n)\|^2=-b_1L^2(u_n)-b_2L^2(v_n)+\mu_1\int_{\mathbb{R}^N}u_n^4\mathrm{d}x+\mu_2\int_{\mathbb{R}^N}v_n^4\mathrm{d}x+2\beta\int_{\mathbb{R}^N}u_n^2v_n^2\mathrm{d}x\to -b_1A^2-b_2B^2$$

与 $\|(u_n,v_n)\|^2\geqslant C_1^2$ 相矛盾. 所以，不失一般性，存在一个正数 α，使得 $\lim\limits_{n\to\infty}\inf\sup\limits_{x\in\mathbb{R}^N}\int_{B_1(x)}u_n^2(y)\mathrm{d}y=\alpha$. 考虑其子列，可假定存在某个序列 $\{x_n\}\subseteq\mathbb{R}^N$，使得

$$\int_{B_1(x_n)}u_n^2(y)\mathrm{d}y>\frac{\alpha}{2}\tag{14}$$

由引理 4 有

$$I(u_n(\cdot-x_n),v_n(\cdot-x_n))=\frac{1}{4}\|u_n(\cdot-x_n),v_n(\cdot-x_n)\|^2=\frac{1}{4}\|(u_n,v_n)\|^2\to c$$

则 $\{(u_n(\cdot-x_n),v_n(\cdot-x_n))\}$ 有界. 取某个子列，对某些 $(u,v)\in\mathcal{H}$，在 $\mathcal{H}$ 上，$(u_n(\cdot-x_n),v_n(\cdot-x_n))\rightharpoonup(u,v)$；在 $L_{\mathrm{loc}}^2(\mathbb{R}^N)\times L_{\mathrm{loc}}^2(\mathbb{R}^N)$ 上，$(u_n(\cdot-x_n),v_n(\cdot-x_n))\to(u,v)$. 由(14)式得 $\int_{B_1(0)}u^2(y)\mathrm{d}y\geqslant\frac{\alpha}{2}$，这表明 $u\neq 0$. 因为 $\mathcal{N}$ 是平移不变的，故 $\{(u_n(\cdot-x_n),v_n(\cdot-x_n))\}\in\mathcal{N}$. 类似地，可得 $\|u_n(\cdot-x_n),v_n(\cdot-x_n)\|^2=\|(u_n,v_n)\|^2$，和 $I(u_n(\cdot-x_n),v_n(\cdot-x_n))=I(u_n,v_n)$. 则 $\|I'(u_n(\cdot-x_n),v_n(\cdot-x_n))\|=\|I'(u_n,v_n)\|$. 因此 $\{(u_n(\cdot-x_n),v_n(\cdot-x_n))\}$ 是 I 的 $(\mathrm{PS})_c$ 序列. 那么 $I'(u,v)=0$，$\mathcal{J}(u,v)=0$. 在上述讨论中知 $u\neq 0$，则 $(u,v)\in\mathcal{N}$. 由范数的弱下半连续性和(10)式得

$$c\leqslant I(u,v)=\frac{1}{4}\|(u,v)\|^2\leqslant\frac{1}{4}\lim_{n\to\infty}\inf\|(u_n(\cdot-x_n),v_n(\cdot-x_n))\|^2=$$
$$\lim_{n\to\infty}\inf I(u_n(\cdot-x_n),v_n(\cdot-x_n))=c$$

故有 $I(u,v)=c$. 综上所述，在两种情形下都有 $(u,v)\in\mathcal{N}$，$I(u,v)=c$，$I'(u,v)=0$. 因此，$u\neq 0$ 和 $v\neq 0$. 接下来，讨论 k 取不同范围值时，u 和 v 的符号.

首先，设 $k<0$. 则

$$k\int_\Omega uv\mathrm{d}x\geqslant k\int_\Omega|u||v|\mathrm{d}x$$

由 $\mathcal{J}(u,v)=0$ 得

$$\|(|u|,|v|)\|^2\leqslant\mu_1\int_\Omega|u|^4\mathrm{d}x+\mu_2\int_\Omega|v|^4\mathrm{d}x+$$
$$2\beta\int_\Omega|u|^2|v|^2\mathrm{d}x-(b_1L^2(|u|)+b_2L^2(|v|))=\|(u,v)\|^2$$

对 $t\geqslant 0$，定义一个 C^1 函数 $\varphi(t)=I(t|u|,t|v|)$，即

$$\varphi(t)=\frac{t^2}{2}\|(|u|,|v|)\|^2-\frac{t^4}{4}\|(u,v)\|^2$$

令 $t_0=\dfrac{\|(|u|,|v|)\|}{\|(u,v)\|}\in(0,1]$. 显然，$\varphi(t)$ 在 $(0,t_0)$ 上严格单调递增，在 $(t_0,+\infty)$ 上严格单调递减. 另外，注意到 $(t_0|u|,t_0|v|)\in\mathcal{N}$. 由(10)式得

$$c\leqslant I(t_0|u|,t_0|v|)=\frac{t_0^2}{4}\|(|u|,|v|)\|^2\leqslant\frac{1}{4}\|(u,v)\|^2=c\tag{15}$$

因此，$\|(|u|,|v|)\|^2=\|(u,v)\|^2$，$(|u|,|v|)\in\mathcal{N}$，$I(|u|,|v|)=c$. 不失一般性，可假设$u\geqslant 0$，$v\geqslant 0$. 由引理 5 知，$(u,v)$ 是 I 的一个临界点. 因此(u,v)是方程组(2) 的一个基态解.

由椭圆正则性定理知，$\|u\|_{L^\infty}<+\infty$，$\|v\|_{L^\infty}<+\infty$. 由于(u,v) 是方程组(2) 的解，即

$$\begin{cases}-\left(a_1+b_1\int_\Omega|\nabla u|^2\mathrm{d}x\right)\Delta u+\lambda_1 u-\beta uv^2=\mu_1 u^3-kv\geqslant 0\\ -\left(a_2+b_2\int_\Omega|\nabla v|^2\mathrm{d}x\right)\Delta v+\lambda_2 v-\beta vu^2=\mu_2 v^3-ku\geqslant 0\end{cases}$$

那么，由最大值原理知

$$u>0\qquad v>0\tag{16}$$

再者，设 $k>0$. 由上述类似的讨论，易知 $\|(|u|,-|v|)\|^2=\|(u,v)\|^2$，$(|u|,-|v|)\in\mathcal{N}$，$I(|u|,-|v|)=c$. 因此，不妨设 $u\geqslant 0$ 和 $v\leqslant 0$. 由引理 6 知，(u,v) 是 I 的一个临界点. 因此，(u,v) 是方程组(2) 的一个基态解. 与(16) 式的证明类似，由椭圆正则原理和最大值原理得 $u>0$，$v<0$.

命题 1 若 $k\in(-\sqrt{\lambda_1\lambda_2},0)\cup(0,\sqrt{\lambda_1\lambda_2})$，则 $c<\min\{c_1,c_2\}$.

证 由注 1 知，存在 $u_1>0$ 和 $v_1>0$，使得$(u_1,0)$,$(0,v_1)\in\mathcal{N}$，$c_1=I(u_1,0)$，$c_2=I(0,v_1)$. 因此

$$\int_\Omega(a_1|\nabla u_1|^2+\lambda_1 u_1^2)\mathrm{d}x+b_1L^2(u_1)=\mu_1\int_\Omega u_1^4\mathrm{d}x$$

$$\int_\Omega(a_2|\nabla v_1|^2+\lambda_2 v_1^2)\mathrm{d}x+b_2L^2(v_1)=\mu_2\int_\Omega v_1^4\mathrm{d}x$$

设 $g(t,s)=\mathcal{J}(tu_1,tsv_1)$. 显然

$$g(1,0)=\mathcal{J}(u,0)=0$$

$$\frac{\partial g}{\partial s}\Big|_{t=1,s=0}=2k\int_\Omega u_1v_1\mathrm{d}x\qquad \frac{\partial g}{\partial t}\Big|_{t=1,s=0}=-2\int_\Omega(a_1|\nabla u_1|^2+\lambda_1u_1^2)\mathrm{d}x$$

由函数 g 的光滑性和隐函数存在定理知，存在一个足够小的正数 s_0 和函数 $t(s)\in\mathscr{C}^1(-s_0,s_0)$，使得对 $s\in(-s_0,s_0)$，$t(0)=1$，$g(t(s),s)=0$，$t'(s)=-\dfrac{g_s(t,s)}{g_t(t,s)}$. 从而，$(t(s)u_1,t(s)sv_1)\in\mathcal{N}$，并且 $t'(0)=\dfrac{k\int_\Omega u_1v_1\mathrm{d}x}{\int_\Omega(a_1|\nabla u_1|^2+\lambda_1u_1^2)\mathrm{d}x}$. 设 $\alpha=t'(0)$，则

$$t'(s)=\alpha(1+o(1))\qquad t(s)=1+\alpha s(1+o(1))$$

$$t^2(s)=1+2\alpha s(1+o(1))$$

因此，对 $\forall s\in(-s_0,s_0)$，有

$$c\leqslant I(t(s)u_1,t(s)sv_1)=\frac{1}{4}t^2(s)\|(u_1,sv_1)\|^2=c_1+sk\int_\Omega u_1v_1\mathrm{d}x+o(s)$$

当 $k\in(-\sqrt{\lambda_1\lambda_2},0)$ 时，存在 $s>0$ 和 $s\ll 1$，使得 $sk\int_\Omega u_1v_1\mathrm{d}x+o(s)<0$. 那么 $c<c_1$. 类似地，当 $k\in(0,\sqrt{\lambda_1\lambda_2})$ 时，亦有 $c<c_1$. 总之，当 $k\in(-\sqrt{\lambda_1\lambda_2},0)\cup(0,\sqrt{\lambda_1\lambda_2})$ 时，$c<c_1$. 同理，当 $k\in(-\sqrt{\lambda_1\lambda_2},0)\cup(0,\sqrt{\lambda_1\lambda_2})$ 时，$c<c_2$. 于是可得命题 1 的结论.

3 定理 2 的证明

假定 $\beta\in(-\sqrt{\mu_1\mu_2},+\infty)$，$k\in(-\sqrt{\lambda_1\lambda_2},0)\cup(0,\sqrt{\lambda_1\lambda_2})$，位势函数 $V(x)$ 满足条件(V_1)－(V_2). 若 $V(x)\equiv\Lambda$，那么方程组(1) 可以转化为方程组(2). 故假定 $V(x)\not\equiv\Lambda$. 定义空间 $V=H^1(\mathbb{R}^N)\times H^1(\mathbb{R}^N)$，其内积为

$$((u_1,v_1),(u_2,v_2))_V=\int_{\mathbb{R}^N}a_1\nabla u_1\nabla u_2\mathrm{d}x+\int_{\mathbb{R}^N}(\lambda_1+V(x))u_1u_2\mathrm{d}x+k\int_{\mathbb{R}^N}u_1v_1\mathrm{d}x+$$

$$\int_{\mathbb{R}^N}a_2\nabla v_1\nabla v_2\mathrm{d}x+\int_{\mathbb{R}^N}(\lambda_2+V(x))v_1v_2\mathrm{d}x+k\int_{\mathbb{R}^N}u_2v_2\mathrm{d}x$$

范数为 $\|(u, v)\|_V = ((u, v), (u, v))^{\frac{1}{2}}$.

方程组(1) 的极限情形是

$$\begin{cases} -\left(a_1 + b_1\int_\Omega |\nabla u|^2 \mathrm{d}x\right)\Delta u + (\lambda_1 + \Lambda)u + kv = \mu_1 u^3 + \beta u v^2 & x \in \mathbb{R}^N \\ -\left(a_2 + b_2\int_\Omega |\nabla v|^2 \mathrm{d}x\right)\Delta v + (\lambda_2 + \Lambda)v + ku = \mu_2 v^3 + \beta v u^2 & x \in \mathbb{R}^N \\ u, v \in H^1(\mathbb{R}^N) \end{cases} \tag{17}$$

设方程组(1) 的能量泛函为

$$I_V(u, v) = \frac{1}{2}\|(u, v)\|_V + \frac{1}{4}(b_1 L^2(u) + b_2 L^2(v)) + k\int_{\mathbb{R}^N} uv\mathrm{d}x - \frac{\mu_1}{4}\int_{\mathbb{R}^N} u^4\mathrm{d}x - \frac{\mu_2}{4}\int_{\mathbb{R}^N} v^4\mathrm{d}x - \frac{\beta}{2}\int_{\mathbb{R}^N} u^2v^2\mathrm{d}x$$

类似地，定义方程组(17) 的能量泛函为

$$I_\Lambda(u, v) = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N}[a_1|\nabla u|^2 + (\lambda_1 + \lambda)u^2]\mathrm{d}x + k\int_{\mathbb{R}^N} uv\mathrm{d}x + \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N}[a_2|\nabla v|^2 + (\lambda_2 + \Lambda)v^2]\mathrm{d}x - \frac{\mu_1}{4}\int_{\mathbb{R}^N} u^4\mathrm{d}x - \frac{\mu_2}{4}\int_{\mathbb{R}^N} v^4\mathrm{d}x - \frac{\beta}{2}\int_{\mathbb{R}^N} u^2v^2\mathrm{d}x + \frac{1}{4}(b_1L^2(u) + b_2(L^2(v)))$$

设

$$\begin{aligned} \mathcal{J}_V(u, v) = \langle I'_V(u, v), (u, v)\rangle = &\int_{\mathbb{R}^N}[a_1|\nabla u|^2 + (\lambda_1 + V)u^2]\mathrm{d}x + 2k\int_{\mathbb{R}^N} uv\mathrm{d}x + \\ &\int_{\mathbb{R}^N}[a_2|\nabla v|^2 + (\lambda_2 + V)v^2]\mathrm{d}x - \mu_1\int_{\mathbb{R}^N} u^4\mathrm{d}x - \mu_2\int_{\mathbb{R}^N} v^4\mathrm{d}x - \\ &2\beta\int_{\mathbb{R}^N} u^2v^2\mathrm{d}x + (b_1L^2(u) + b_2(L^2(v))) \end{aligned}$$

定义 Nehari 流形

$$\mathcal{N}_V = \{(u, v) \in H^1(\mathbb{R}^N) \times H^1(\mathbb{R}^N)\backslash\{(0, 0)\}: \mathcal{J}_V(u, v) = 0\} \neq \varnothing$$

定义 $c_V = \inf\limits_{(u, v)\in\mathcal{N}_V} I_V(u, v)$，其中 c_Λ 和第 2 节中的 c 有关，只需将 λ_1，λ_2 替代为 $\lambda_1 + \Lambda$，$\lambda_2 + \Lambda$.

引理 7　假定 $V(x)$ 满足条件$(\mathrm{V}_1) - (\mathrm{V}_2)$，那么 $c_V < c_\Lambda$.

证　设 $\beta > -\sqrt{\mu_1\mu_2}$. 由文献[21] 的章节 4，定义 $c_V = \inf\limits_{\gamma\in\Gamma}\max\limits_{t\in[0, 1]} I_V(\gamma(t))$，其中

$$\Gamma = \{\gamma \in \mathscr{C}([0, 1], X): \gamma(0) = (0, 0), I_V(\gamma(1)) < 0\}$$

设$(\bar{u}, \bar{v})$ 为方程组(17) 的基态解. 因为 $V(x) \leqslant \Lambda$，$V(x) \not\equiv \Lambda$，$\bar{u} \neq 0$，$\bar{v} \neq 0$，那么存在正数 t_0，使得

$$\max_{t>0} I_V(t\bar{u}, t\bar{v}) = I_V(t_0\bar{u}, t_0\bar{v}) < I_\Lambda(t_0\bar{u}, t_0\bar{v}) = \max_{t>0} I_\Lambda(t\bar{u}, t\bar{v}) = c_\Lambda$$

故有 $c_V < c_\Lambda$.

接下来，我们将用集中紧性原理和引理 7 证明定理 2.

定理 2 的证明　类似于(13) 式的证明，有 $c_V > 0$. 由文献[11] 的引理 2.2 知，存在某个序列$\{(\bar{u}_n, \bar{v}_n)\} \subseteq \mathcal{N}_V$，使得$\{(\bar{u}_n, \bar{v}_n)\}$ 是 $I_V|_{\mathcal{N}_V}$ 的$(\mathrm{PS})_{c_V}$ 序列. 类似于引理 5，$\{(\bar{u}_n, \bar{v}_n)\}$ 是 I_V 的$(\mathrm{PS})_{c_V}$ 序列. 显然地，$\{(\bar{u}_n, \bar{v}_n)\}$ 有界. 考虑其子列，存在$(\bar{u}, \bar{v}) \in H^1(\mathbb{R}^N) \times H^1(\mathbb{R}^N)$，使得在 $H^1(\mathbb{R}^N) \times H^1(\mathbb{R}^N)$ 上$(\bar{u}_n, \bar{v}_n) \rightharpoonup (\bar{u}, \bar{v})$. 运用反证法和定理 7，可证得 $\bar{u} \neq 0$ 或 $\bar{v} \neq 0$. 下面类似于定理 1 的证明，可分 Ω 为有界区域以及 $\Omega = \mathbb{R}^N$ 两种情形证明$(\bar{u}, \bar{v})$ 是方程组(1) 的基态解，同时还可如定理 1 那样，依据 k 的符号讨论 $\bar{u}$ 以及 $\bar{v}$ 的符号，从而可得定理 2 的结论.

参考文献：

[1] CHEN B，OU Z Q. Sign-Changing and Nontrivial Solutions for a Class of Kirchhoff-Type Problems [J]. Journal of Mathematical Analysis and Applications，2020，481(1)：1-18.

[2] KIRCHHOFF G. Mechanik [M]. Leipzig：Teubner，1883.

[3] LIONS J L. On Some Questions in Boundary Value Problems of Mathematical Physics [J]. North-Holland Mathematics

Studies, 1978, 30: 284-346.

[4] MAO A M, ZHANG Z T. Sign-Changing and Multiple Solutions of Kirchhoff Type Problems without the P.S. Condition [J]. Nonlinear Analysis, 2009, 70(3): 1275-1287.

[5] PERERA K, ZHANG Z T. Nontrivial Solutions of Kirchhoff-Type Problems Via the Yang Index [J]. Journal of Differential Equations, 2006, 221(1): 246-255.

[6] ZHANG Z T, PERERA K. Sign Changing Solutions of Kirchhoff Type Problems Via Invariant Sets of Descent Flow [J]. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 2006, 317(2): 456-463.

[7] CHENG B T, WU X. Existence Results of Positive Solutions of Kirchhoff Type Problems [J]. Nonlinear Analysis, 2009, 71(10): 4883-4892.

[8] 苑紫冰,欧增奇. 一类具有 Hardy-Sobolev 临界指数的 Kirchhoff 方程的多解性 [J]. 西南师范大学学报(自然科学版), 2021, 46(8): 32-36.

[9] 余芳,陈文晶. 带有临界指数增长的分数阶问题解的存在性 [J]. 西南大学学报(自然科学版), 2020, 42(10): 116-123.

[10] 蒙璐,储昌木,雷俊. 一类带有变指数增长的 Neumann 问题 [J]. 西南大学学报(自然科学版), 2021, 43(6): 82-88.

[11] LI K, ZHANG Z T. Existence of Solutions for a Schrödinger System with Linear and Nonlinear Couplings [J]. Journal of Mathematical Physics, 2016, 57(8): 081504-1-081504-18.

[12] AMBROSETTI A, COLORADO E. Standing Waves of Some Coupled Nonlinear Schrödinger Equations [J]. Journal of the London Mathematical Society, 2007, 75(1): 67-82.

[13] AMBROSETTI A, COLORADO E. Bound and Ground States of Coupled Nonlinear Schrödinger Equations [J]. Comptes Rendus Mathematique, 2006, 342(7): 453-458.

[14] BARTSCH T, WANG Z Q, WEI J C. Bound States for a Coupled Schrödinger System [J]. Journal of Fixed Point Theory and Applications, 2007, 2(2): 353-367.

[15] DANCER E N, WEI J C, WETH T. A Priori Bounds Versus Multiple Existence of Positive Solutions for a Nonlinear Schrödinger System [J]. Annales de L'institut Henri Poincaré Analyse Nonlinéaire, 2010, 27(3): 953-969.

[16] CHEN Z J, ZOU W M. An Optimal Constant for the Existence of Least Energy Solutions of a Coupled Schrödinger System [J]. Calculus of Variations and Partial Differential Equations, 2013, 48(3-4): 695-711.

[17] LÜ D F, XIAO J H. Ground State Solutions for a Coupled Kirchhoff-Type System [J]. Mathematical Methods in the Applied Sciences, 2015, 38(18): 4931-4948.

[18] ZHANG Z T, SUN Y M. Existence and Multiplicity of Solutions for Nonlocal Systems with Kirchhoff Type [J]. Acta Mathematicae Applicatae Sinica(English Series), 2016, 32(1): 35-54.

[19] LÜ D F, PENG S J. Existence and Asymptotic Behavior of Vector Solutions for Coupled Nonlinear Kirchhoff-Type Systems [J]. Journal of Differential Equations, 2017, 263(12): 8947-8978.

[20] GUO J M, MA S W, ZHANG G. Solutions of the Autonomous Kirchhoff Type Equations in $\mathbb{R}^N$ [J]. Applied Mathematics Letters, 2018, 82: 14-17.

[21] WILLEM M. Minimax Theorems [M]. Boston: Birkhäuser, 1996.

责任编辑 廖坤